

Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru

Liczba w fizyce bez jednostki nic nie znaczy, a liczba bez niepewności znaczy mniej, niż się wydaje. Ta lekcja to warsztat, z którego korzysta każda następna. Uczy przeliczać jednostki, sprawdzać wzory po wymiarach i zgadywać je z wymiarów, szacować rząd wielkości bez kalkulatora, zaokrąglać uczciwie, a na końcu podawać wynik pomiaru z niepewnością i oceniać, czy dwa wyniki się zgadzają.

CZAS

ok. 2,5 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

28 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 5-5, 6-2, 6-3; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: czyj zegar?
- 1 Jednostki SI i przeliczanie
- 2 Analiza wymiarowa
- 3 Rzędy wielkości i szacowanie
- 4 Cyfry znaczące i zaokrąglenie
- 5 Niepewność pomiaru
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: czyj zegar?

Feynman pyta, co wziąć za wzorzec czasu. Puls? Różni się u każdego. Zegar? Tylko czyj? Opowiada historię chłopca ze Szwajcarii, który chciał, żeby wszystkie zegary w mieście były w południe jednocześnie. Wszyscy uznali to za świetny pomysł, pod warunkiem że to inne zegary dostosują się do ich zegara. Na szczęście mamy jeden wspólny zegar, Ziemię. Sekunda była więc przez długi czas zdefiniowana jako $1/86\,400$ średniej doby. (Od 1960 r. formalnie liczone ją już z długości roku, ale idea była ta sama: wzorcem był ruch Ziemi.) Feynman dodaje jednak, że obrót Ziemi nie jest idealnie regularny, a zegary atomowe są dokładniejsze. Przewiduje, że naukowcy wkrótce zdefiniują jednostkę czasu przez drgania atomów. (FLP I-5-5)

Miał rację. Wykłady powstały w 1961–1963 r., a już w 1967 r. sekundę zdefiniowano jako czas trwania $9\,192\,631\,770$ okresów promieniowania atomu cezu-133. W 1983 r. metr stał się drogą, którą światło przebywa w próżni w $1/299\,792\,458$ sekundy. Od 2019 r. wszystkie jednostki SI, łącznie z kilogramem, są zdefiniowane przez ustalone wartości stałych przyrody. Wzorzec nie jest już niczym zegarem ani kawałkiem metalu w sejfie: wzorzec może w zasadzie odtworzyć każde laboratorium z odpowiednim sprzętem, bez porównywania z jednym egzemplarzem.

Ale nawet najlepszy wzorzec nie da pomiaru bez niepewności. Uczeń mierzy przyspieszenie ziemskie i dostaje $(9,72 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$. Tablice podają $9,81 \text{ m/s}^2$.

Pytanie na start. Czy wynik ucznia jest błędny, czy zgodny z tablicami? Odpowiedź w przykładzie 5.2.

Jednostki SI i przeliczanie

Układ SI ma siedem **jednostek podstawowych**: metr (m), kilogram (kg), sekundę (s), amper (A), kelwin (K), mol (mol) i kandelę (cd). W mechanice wystarczą pierwsze trzy. Wszystkie inne to **jednostki pochodne**, zbudowane z podstawowych przez mnożenie i dzielenie. Jednostki pochodne wynikają ze wzorów: siła to masa razy przyspieszenie, więc niuton to $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Wielkość	Jednostka	W jednostkach podstawowych	Skąd
siła	niuton, N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$	$F = ma$
energia, praca	dżul, J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	$W = Fs$
moc	wat, W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$	$P = W/t$
ciśnienie	paskal, Pa	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$	$p = F/S$
częstotliwość	herc, Hz	1/s	liczba okresów na sekundę

Bardzo duże i bardzo małe wartości zapisujemy z **przedrostkami**, które są potęgami tysiąca: kilo (k, 10^3), mega (M, 10^6), giga (G, 10^9), tera (T, 10^{12}) oraz mili (m, 10^{-3}), mikro (μ , 10^{-6}), nano (n, 10^{-9}), piko (p, 10^{-12}). Centy (c, 10^{-2}) i hekto (h, 10^2) przetrwały w codziennym użyciu. Przedrostek podnosi się do potęgi razem z jednostką: $1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$, a nie 10^{-2} m^2 .

1.1 Przeliczanie: mnożenie przez jedynekę

Najpewniejszy sposób przeliczania to mnożenie przez ułamki równe 1, takie jak $\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$ albo $\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$. Jednostki skracają się jak liczby, więc od razu widać, czy ułamek jest odwrócony:

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Warto pamiętać: $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$, $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$, $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$, $1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$, a rok to ok. $\pi \cdot 10^7 \text{ s}$ (z dokładnością do 0,5%).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 25 min

- 1 Przelicz: 54 km/h na m/s; 25 m/s na km/h; 2,5 l na m^3 ; 7,9 g/ cm^3 na kg/m^3 .

- 2 Ile metrów kwadratowych ma 1 mm^2 ? Ile metrów sześciennych ma 1 cm^3 ?

- 3 Czajnik o mocy 2 kW grzeje wodę przez 3 minuty. Ile to energii w dżulach i w kilowatogodzinach?

- 4 Wyraż dżul i wat w jednostkach podstawowych, korzystając z $W = Fs$ i $P = W/t$.
Sprawdź, że $\frac{1}{2}mv^2$ ma jednostkę dżula.

- 5 Ciśnienie atmosferyczne to ok. 1013 hPa. Jaka siła działa od strony powietrza na kartkę A4 (21 cm $\times$ 29,7 cm) leżącą na stole? Czemu kartka nie jest przyciśnięta do stołu?

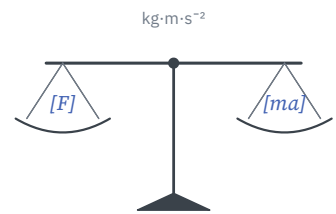

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Analiza wymiarowa

Każda wielkość fizyczna ma **wymiar**: zapis tego, jak jej jednostka składa się z jednostek podstawowych. Piszemy go w nawiasie kwadratowym: $[v] = \text{m/s}$, $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Liczby takie jak 2, π czy kąt w radianach są **bezwymiarowe**.

Z tego, że równanie fizyczne musi być prawdziwe w dowolnych jednostkach, wynikają trzy reguły:

1. Obie strony równania mają ten sam wymiar.
2. Dodawać i odejmować można tylko wielkości o tym samym wymiarze. Nie dodaje się metrów do sekund.
3. Argumenty funkcji $\exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos$ są bezwymiarowe. W $e^{-t/\tau}$ czas τ ma wymiar sekund, a w $\cos(\omega t)$ częstość ω ma wymiar $1/s$ (lekcje 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne i 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne).



2.1 Sprawdzanie wzorów

Analiza wymiarowa to najtańszy test każdego wyniku. Jeśli wyprowadziłeś na zasięg rzutu wzór $R = v_0^2 \sin 2\theta / g^2$, to wymiar $\frac{m^2/s^2}{m^2/s^4} = s^2$ od razu mówi, że wzór jest zły: zasięg ma być w metrach.

Poprawny wzór $v_0^2 \sin 2\theta / g$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne) ma wymiar $\frac{m^2/s^2}{m/s^2} = m \checkmark$. Test nie wyłapie złego czynnika liczbowego ani pomyłki sinusa z cosinusem, ale wyłapie wiele pomyłek w algebrze.

2.2 Zgadywanie wzorów

Analiza wymiarowa potrafi więcej: jeśli wiesz, od jakich wielkości zależy wynik, często wystarczy to do znalezienia wzoru z dokładnością do stałej liczbowej. Przepis:

1. Wypisz wielkości, od których wynik może zależeć.
2. Zapisz wynik jako ich iloczyn w nieznanych potęgach, razem ze stałą liczbową C .
3. Porównaj potęgi kilogramów, metrów i sekund po obu stronach. Dostaniesz układ równań (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste).

Przykład 2.1

Siła oporu powietrza

Siła oporu szybko jadącego samochodu zależy od gęstości powietrza ρ , prędkości v i pola przekroju czołowego S . Znajdź postać wzoru. Ile razy wzrośnie opór, gdy prędkość wzrośnie ze 100 do 140 km/h?

- 1 Zakładamy $F = C\rho^a v^b S^c$, gdzie $[\rho] = \text{kg/m}^3$, $[v] = \text{m/s}$, $[S] = \text{m}^2$, a $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- 2 Kilogramy: $a = 1$. Sekundy: $-b = -2$, więc $b = 2$. Metry: $-3a + b + 2c = 1$, czyli $-3 + 2 + 2c = 1$, $c = 1$.
- 3 $F = C\rho v^2 S$.

Wynik: opór rośnie jak kwadrat prędkości, więc przy 140 km/h jest $(1,4)^2 \approx 2$ razy większy niż przy 100 km/h.

Sprawdzenie: w aerodynamice pisze się $F = \frac{1}{2}C_D\rho v^2 S$, gdzie współczynnik oporu C_D dla samochodu wynosi ok. 0,3 (fizyka Dział 10: Płyny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne) ✓. Analiza wymiarowa nie powie, ile wynosi C : to trzeba zmierzyć albo policzyć. Wzór jest też przybliżeniem, bo C_D nieco zależy od prędkości.

SYMULACJA 1

Szukanie wykładników. Wynik ma postać $C \rho^a v^b S^c$. Dobierz wykładniki tak, żeby potęgi kilogramów, metrów i sekund zgadzały się z wymiarem siły. Tabela pokazuje, której jednostki brakuje, a której jest za dużo.

jednostka	$\rho^a v^b S^c$ daje	siła F wymaga	
kg	kg^0	kg^1	za mało
m	m^1	m^1	✓
s	s^{-1}	s^{-2}	za dużo

dobierz wykładniki

wymiar $\rho^a v^b S^c \text{ m}^1 \cdot \text{s}^{-1}$

zgodność nie

Stan na rysunku: siła F ; $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; wymiar $\text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1}$.

 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Który z wzorów na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest na pewno błędny:
 $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t$, $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, $s = v_0 + \frac{1}{2} a t^2$?

- 2 We wzorze $x(t) = A e^{-kt} \cos(\omega t)$ jaki wymiar mają k i ω , jeśli x to położenie w metrach?

- 3 Prędkość fali na strunie zależy od siły napięcia F i masy jednostki długości struny μ (kg/m). Znajdź wzór z dokładnością do stałej. Oblicz v dla $F = 80 \text{ N}$ i $\mu = 5 \text{ g/m}$, przyjmując stałą równą 1.

- 4 Fale na głębokiej wodzie: prędkość może zależeć od długości fali λ , od g i od gęstości wody ρ . Pokaż, że ρ nie może wystąpić we wzorze, i znajdź zależność v od λ . Ile razy szybsza jest fala dziesięć razy dłuższa?

- 5 Okres obiegu satelity po okręgu o promieniu r wokół planety może zależeć od r , od masy planety M i od stałej grawitacji G ($[G] = \text{m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$). Pokaż, że M i G mogą wystąpić tylko jako iloczyn GM , i znajdź wzór. To trzecie prawo Keplera.

- 6 Znajdź analizą wymiarową okres drgań ciężarka o masie m na sprężynie o stałej k ($[k] = \text{N/m}$). Czy okres może zależeć od amplitudy A (w metrach)? Porównaj z wahadłem: okres może zależeć od długości l , od g , od masy m i od amplitudy kątowej θ_0 . Czy analiza wymiarowa wyklucza tu zależność od amplitudy?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

3 Rzędy wielkości i szacowanie

Rząd wielkości liczby to potęga dziesięciu, najbliższa tej liczbie w skali logarytmicznej (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne). Człowiek ma ok. 10^0 m wzrostu, Ziemia ok. 10^7 m średnicy, atom ok. 10^{-10} m. Feynman poświęca cały rozdział temu, jak mierzy się odległości i czasy od rozmiarów jąder atomowych do rozmiarów Wszechświata. Zakres to ponad 40 rzędów wielkości.

SYMULACJA 2 Skala długości od jądra atomu do obserwowalnego Wszechświata. Każda kratka to dziesięć razy więcej. Przesuwaj suwak i porównuj: o ile rzędów wielkości różnią się dwa obiekty?



długość $1,6 \cdot 10^0$ m

najbliżej człowiek

rzędów wielkości od człowieka 0,0

rzędów wielkości od tego obiektu 0,0

Stan na rysunku: długość $1,6 \cdot 10^0$ m; najbliżej: człowiek.

Fizycy cenią umiejętność szybkiego **szacowania**, czyli liczenia z dokładnością do rzędu wielkości. Enrico Fermi słynął z zadań typu „ilu stroicieli fortepianów pracuje w Chicago?”. Przepis jest prosty: rozbij pytanie na czynniki, które umiesz oszacować; każdy zaokrąglaj śmiało; pomnóż. Błędy poszczególnych czynników częściowo się znoszą, bo część oszacowań jest za duża, a część za mała.

Przykład 3.1

Jaką masę ma powietrze w sali?

Sala lekcyjna ma 10 m długości, 8 m szerokości i 3 m wysokości. Gęstość powietrza to ok. $1,2 \text{ kg/m}^3$. Jaką masę ma powietrze w sali?

- 1 Objętość: $10 \cdot 8 \cdot 3 = 240 \text{ m}^3$.
- 2 Masa: $240 \cdot 1,2 \approx 290 \text{ kg}$.

Wynik: ok. 300 kg, czyli tyle co kilkoro uczniów. Wiele osób zgaduje kilka kilogramów.

Sprawdzenie: metr sześcienny wody waży tonę, a powietrze jest ok. 800 razy rzadsze: $240 \text{ t} / 800 = 0,3 \text{ t} \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Podaj rząd wielkości: liczby sekund w roku; masy Ziemi w kg ($5,97 \cdot 10^{24}$); średnicy włosa (ok. 0,07 mm) w metrach.
■ ■ ■
- 2 Ile razy uderzy serce w ciągu 80 lat życia? Podaj wynik z dokładnością do rzędu wielkości.
■ ■ ■
- 3 Ile kropeł wody mieści się w wannie? Oszacuj objętość wanny i jednej kropli.
■ ■ ■
- 4 Ile mniej więcej trwałoby przejście pieszo dookoła Ziemi wzdłuż równika (obwód 40 000 km), gdyby iść 8 godzin dziennie z prędkością 5 km/h?
■ ■ ■
- 5 Oszacuj, ilu stroicieli fortepianów pracuje w Warszawie (ok. 1,8 mln mieszkańców). Zapisz każde założenie. Który czynnik jest najmniej pewny?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

4 Cyfry znaczące i zaokrąglanie

Cyfry znaczące to cyfry liczby od pierwszej niezerowej z lewej. Liczba 0,004 07 ma trzy cyfry znaczące (4, 0, 7), a 2,50 też trzy: zero na końcu mówi, że zmierzono setne części. Zapis 1500 jest

niejednoznaczny, bo nie wiadomo, czy zera są zmierzone. Notacja wykładnicza to rozstrzyga: $1,5 \cdot 10^3$ ma dwie cyfry znaczące, a $1,500 \cdot 10^3$ cztery.

Kalkulator zwraca dziesięć cyfr, ale wynik nie może być dokładniejszy niż dane. Gdy nie liczymy niepewności wprost, stosujemy dwie zasady orientacyjne:

- Przy **mnożeniu i dzieleniu** wynik ma tyle cyfr znaczących, ile najmniej dokładna dana: $3,14 \cdot 2,1 = 6,594 \approx 6,6$.
- Przy **dodawaniu i odejmowaniu** wynik ma tyle miejsc po przecinku, ile dana z najmniejszą ich liczbą: $12,52 + 1,3 = 13,82 \approx 13,8$.

Zaokrąglamy dopiero wynik końcowy. Wyniki pośrednie trzymamy z jedną lub dwiema cyframi zapasu, żeby błędy zaokrągleń się nie kumulowały. To tylko zasady orientacyjne. Uczciwym sposobem jest policzenie niepewności, jak w części 5.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 15 min

1 Ile cyfr znaczących mają liczby: 0,0520; $3,00 \cdot 10^8$; 105; 0,5?

2 Podaj wynik z właściwą liczbą cyfr: $4,52 \cdot 0,31$; $9,81 - 0,5$; $\frac{100,0}{3,0}$.

3 Kolega podaje: „bok kwadratu ma 3,2 cm, więc pole wynosi 10,24 cm²”. Co jest nie tak? Jak zapisać wynik?

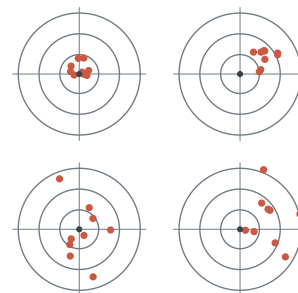
 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Niepewność pomiaru

5.1 Skąd się bierze niepewność

Każdy pomiar ma **niepewność**: liczbę mówiącą, o ile wynik może typowo odbiegać od prawdziwej wartości. Rozróżniamy niepewność graniczną Δx (granice, której błąd na pewno nie przekracza) i niepewność standardową u (typowe odchylenie: prawdziwa wartość leży w przedziale $\bar{x} \pm u$ w ok. 2/3 przypadków, a w $\bar{x} \pm 2u$ prawie zawsze). Źródła niepewności są dwa:

- **Rozdzielczość przyrządu.** Linijka z podziałką milimetrową nie powie nic o dziesiątych częściach milimetra. Najmniejsza działka to **niepewność graniczna Δx** .



- **Rozrzut przypadkowy.** Powtarzając pomiar, dostajesz różne wyniki: czas reakcji, drgania ręki, zmienne warunki. Pojedynczy wynik jest wtedy mniej pewny niż średnia z wielu.

Osobną sprawą są **błędy systematyczne**: źle skalibrowana waga, linijka przyłożona krzywo, stoper włączany zawsze za późno. Przesuwają wszystkie wyniki w jedną stronę, więc powtarzanie pomiaru ich nie zmniejsza. Wykrywa się je tylko innym przyrządem albo inną metodą.

Wynik zapisujemy jako $x = (\bar{x} \pm u)$ jednostka, gdzie u to niepewność standardowa (gdy podajemy graniczną, piszemy $\pm \Delta x$). **Niepewność względna** to $u/\bar{x}$, zwykle w procentach. Mówi, jak dobry jest pomiar, niezależnie od jednostek: 1 mm na 1 m to 0,1%, a 1 mm na 1 cm to 10%.

5.2 Pomiar wielokrotny: średnia i jej niepewność

Zmierzono tę samą wielkość N razy: $x_1, x_2, \dots, x_N$. Najlepsze oszacowanie to **średnia**. Miarą rozrzutu pojedynczych wyników jest **odchylenie standardowe** s . Średnia jest dokładniejsza niż pojedynczy pomiar, a jej niepewność to $s/\sqrt{N}$:

✚ ŚREDNIA, ODCHYLENIE STANDARDOWE, NIEPEWNOŚĆ ŚREDNIEJ

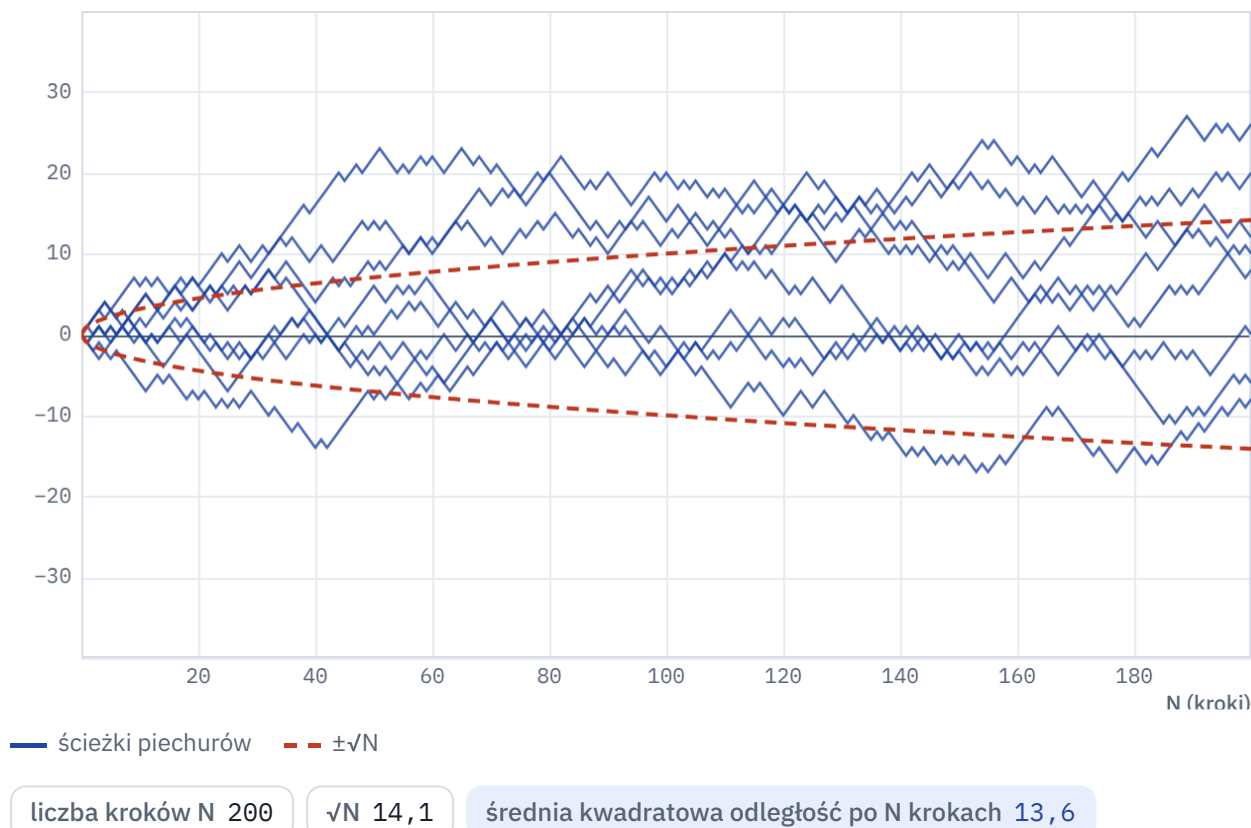
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

We wzorze na s dzielimy przez $N - 1$, a nie przez N . Średnią policzyliśmy z tych samych danych, więc odchylenia od niej są nieco mniejsze niż od prawdziwej wartości, a $N - 1$ to poprawia. Przy kilkunastu pomiarach różnica jest niewielka. Uwaga: s to tu odchylenie standardowe, a nie droga.

Skąd $\sqrt{N}$? Feynman wyjaśnia to na **błądzeniu losowym**: piechur w każdym kroku idzie losowo o krok w przód albo w tył. Średnio stoi w miejscu, ale typowa (średniokwadratowa) odległość od startu po N krokach to $\sqrt{N}$ kroków. Feynman zaznacza, że ten problem wiąże się z ruchami cząstek w gazie (ruchy Browna) i ze sposobem, w jaki składają się błędy pomiarów. FLP I-6-3
Suma N przypadkowych błędów rośnie więc jak $\sqrt{N}$, a nie jak N , bo błędy częściowo się znoszą. Średnia to suma podzielona przez N , więc jej rozrzut maleje jak $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$.

SYMULACJA 3

Błądzenie losowe. Kilku piechurów rzuca monetą przed każdym krokiem. Przerywane krzywe to $\pm\sqrt{N}$. Zwiększ liczbę piechurów: w każdej chwili ok. 2/3 ścieżek leży między tymi krzywymi, choć każda błądzi inaczej.

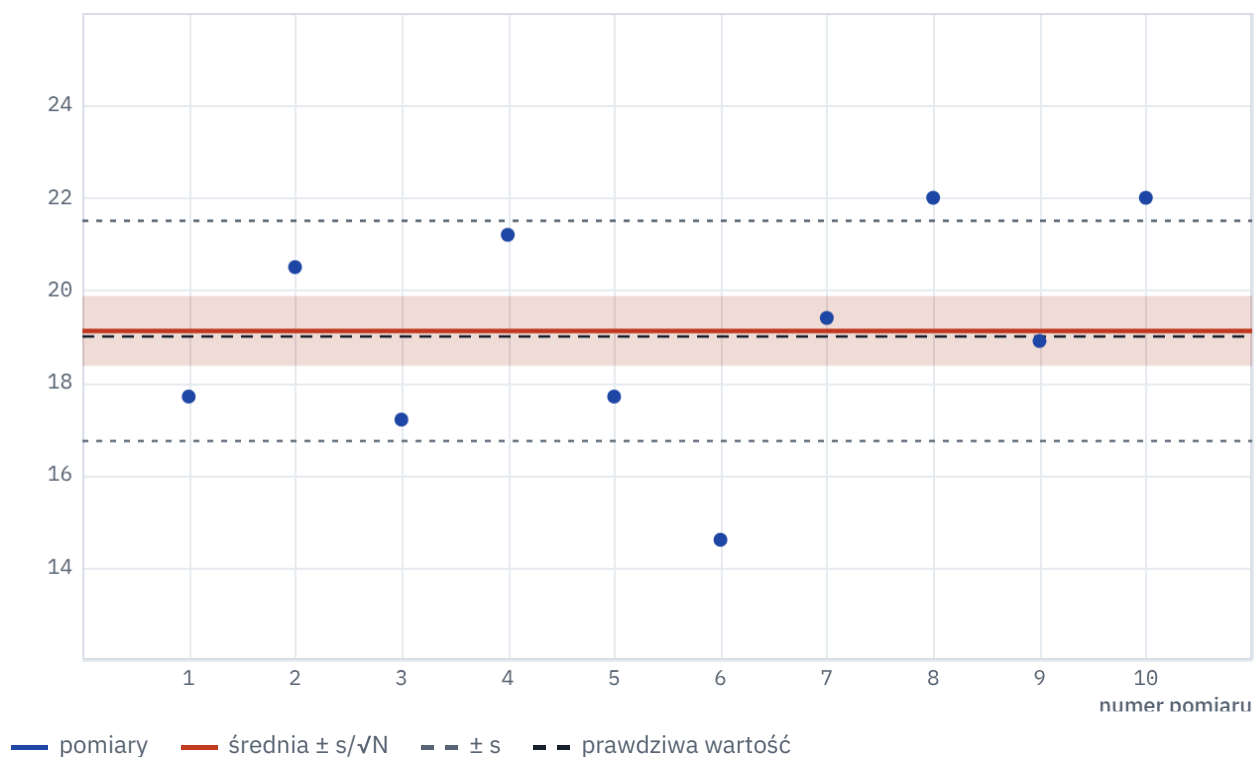


Stan na rysunku: 8 piechurów, $N = 200$; średnia kwadratowa odległość 13,6 ($\sqrt{N} = 14,1$).

Feynman sprawdził to doświadczalnie: rozegrał 100 gier po 30 rzutów monetą i zapisał liczby orłów. Po trzech pierwszych grach zamiast rzucać, potrząsał 30 monetami w pudełku. FLP I-6-2
 Spodziewana liczba to 15, a typowe odchylenie $\frac{1}{2}\sqrt{30} \approx 2,7$. Z jego tabeli wychodzi średnia 14,93 i odchylenie standardowe 2,8. Feynman dodaje praktyczną regułę: jeśli wynik odbiega od oczekiwanego o mniej niż 2–3 typowe odchylenia, nie ma powodu podejrzewać monety.

SYMULACJA 4

Pomiar wielokrotny. Każdy punkt to jeden pomiar z losowym rozrzutem wokół prawdziwej wartości (przerywana linia). Zwiększaj liczbę pomiarów N : odchylenie standardowe s prawie się nie zmienia, ale przedział $\bar{x} \pm s/\sqrt{N}$ się zwęża.



średnia 19,12 cm

odchylenie standardowe s 2,38 cm

niepewność średniej $s/\sqrt{N}$ 0,75 cm

średnia od prawdziwej wartości 0,2 u

Stan na rysunku: $N = 10$; średnia 19,12 cm, $s = 2,38$ cm, $s/\sqrt{N} = 0,75$ cm (prawdziwa wartość 19 cm, rozrzut 2 cm).

Przykład 5.1

Czas reakcji z linijki

Kolega trzyma linijkę pionowo, ty trzymasz palce przy jej dolnym końcu. Gdy ją puści, łapiesz ją i odczytujesz, o ile spadła. Dziesięć prób dało (w cm): 18, 21, 17, 20, 19, 22, 18, 20, 19, 16. Linijka spada swobodnie, więc czas reakcji to $t = \sqrt{2d/g}$. Podaj czas reakcji z niepewnością.

- 1 Średnia: $\bar{d} = 190/10 = 19,0$ cm.
- 2 Odchylenia od średniej: $-1, 2, -2, 1, 0, 3, -1, 1, 0, -3$. Suma kwadratów: 30. $s = \sqrt{30/9} \approx 1,8$ cm.
- 3 Niepewność średniej: $u(\bar{d}) = 1,8/\sqrt{10} \approx 0,6$ cm, czyli 3%.
- 4 $t = \sqrt{2 \cdot 0,190/9,81} \approx 0,197$ s. Pierwiastek połowi niepewność względną (część 5.3; dla jednej zmiennej ta reguła działa tak samo dla Δ i dla u), więc $u(t) \approx 1,5\% \cdot 0,197 \approx 0,003$ s.

Wynik: $\bar{d} = (19,0 \pm 0,6)$ cm, czas reakcji $t = (0,197 \pm 0,003)$ s.

Sprawdzenie: skrajne próby, 16 i 22 cm, dają 0,181 i 0,212 s. Średnia leży między nimi, a jej niepewność jest dużo mniejsza od rozrzutu prób, zgodnie z $1/\sqrt{10} \checkmark$. Typowy czas reakcji na bodziec wzrokowy to ok. 0,2 s $\checkmark$.

5.3 Przenoszenie niepewności: reguły na start

Gdy wynik liczy się z kilku zmierzonych wielkości, ich niepewności przenoszą się na wynik. Pełną teorię, z pochodnymi, poznasz w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce. Na razie wystarczą trzy reguły, które dają oszacowanie z góry, czyli dla najgorszego przypadku, gdy wszystkie błędy działają w tę samą stronę:

PROSTE REGUŁY (OSZACOWANIE MAKSYMALNE)

Suma i różnica: dodają się niepewności bezwzględne: $\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y$.

Iloczyn i iloraz: dodają się niepewności względne: $\frac{\Delta(xy)}{|xy|} = \frac{\Delta(x/y)}{|x/y|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$.

Potęga: niepewność względna mnoży się przez wykładnik: $\frac{\Delta(x^n)}{|x^n|} = |n| \frac{\Delta x}{|x|}$.

Pierwiastek to $n = \frac{1}{2}$.

Dla niezależnych błędów przypadkowych oszacowanie maksymalne jest zbyt pesymistyczne, bo błędy częściowo się znoszą, jak w błędzeniu losowym. W lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w

praktyce zamiast sumy weźmiemy pierwiastek z sumy kwadratów.

5.4 Zapis wyniku i zgodność z teorią

Niepewność podajemy z jedną albo dwiema cyframi znaczącymi, a wynik zaokrąglamy do tego samego miejsca: $(9,72 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$, a nie $9,7243 \pm 0,0517$. Wynik porównujemy z wartością teoretyczną (albo tablicową o pomijalnej niepewności) w jednostkach jego niepewności standardowej u . Różnica mniejsza niż ok. $2u$: wyniki **zgodne**. Większa niż $3u$: sygnał, że coś jest nie tak, np. błąd systematyczny, zła teoria albo źle oszacowana niepewność. Między $2u$ a $3u$: wynik wątpliwy, warto powtórzyć pomiar. Gdy porównujemy dwa niezależne wyniki, dzielimy różnicę przez niepewność różnicy $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ (skąd ten wzór, zobaczysz w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce). Reguła dotyczy niepewności standardowej. Niepewność graniczna Δx to granica, a nie typowe odchylenie; w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce zamienisz ją na $u = \Delta x / \sqrt{3}$. Podobną, luźniejszą regułę podaje Feynman dla monety: odchylenie w granicach 2–3 typowych odchyżeń nie daje powodu do podejrzeń, a dużo większe budzi podejrzenia, choć niczego nie dowodzi.

Przykład 5.2

Czy uczeń zmierzył

g

dobrze?

Wynik ucznia: $g = (9,72 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$, gdzie 0,05 to niepewność standardowa średniej. Wartość tablicowa: $9,81 \text{ m/s}^2$. Czy wyniki są zgodne?

- 1 Różnica: $9,81 - 9,72 = 0,09 \text{ m/s}^2$.
- 2 W jednostkach niepewności: $0,09/0,05 = 1,8$.

Wynik: różnica to 1,8 niepewności, mniej niż 2. Wynik ucznia jest zgodny z wartością tablicową, choć leży na granicy.

Sprawdzenie: gdyby uczeń podał wynik z nierealnie małą niepewnością $\pm 0,01$, ta sama różnica wynosiłaby 9 niepewności, czyli wyraźną niezgodność. Zbyt optymistyczna niepewność jest tak samo złym wynikiem jak zła wartość ✓.

- 1 Stół zmierzono taśmą z podziałką milimetrową: 1,825 m. Jaka jest niepewność graniczna i niepewność względna? Jak zapisać wynik?
- 2 Popraw zapis: $v = (12,3456 \pm 0,2381) \text{ m/s}$; $m = (250 \pm 0,5) \text{ g}$; $T = 2,1 \pm 0,03 \text{ s}$.
- 3 Zmierzono okres wahań pięć razy: 2,05; 2,11; 1,98; 2,04; 2,07 s. Oblicz średnią, odchylenie standardowe i niepewność średniej.
- 4 Ile razy trzeba zwiększyć liczbę pomiarów, żeby niepewność średniej zmałała 10 razy? Co z tego wynika dla planowania doświadczenia?
- 5 Prostopadłościan ma masę $(540 \pm 1) \text{ g}$ i wymiary $(5,0 \pm 0,1) \text{ cm}$, $(4,0 \pm 0,1) \text{ cm}$, $(10,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. Oblicz gęstość z niepewnością maksymalną. Z czego może być wykonany?
- 6 Kula ma średnicę zmierzoną z niepewnością względną 2%. Z jaką niepewnością względną znamy jej objętość?
- 7 Dwie grupy zmierzyły prędkość dźwięku: $(338 \pm 4) \text{ m/s}$ i $(349 \pm 3) \text{ m/s}$. Czy wyniki są zgodne ze sobą?
- 8 W przykładzie 5.1 każdy pojedynczy pomiar odczytano z linijki z dokładnością do 1 cm. Czy niepewność średniej 0,6 cm, mniejsza od działki, ma sens? Kiedy przestałaby go mieć?
- 9 Feynman w 3000 rzutach otrzymał 1493 orły. Czy to powód, żeby podejrzewać monetę? Użyj tego, że typowe odchylenie liczby orłów od $N/2$ to $\frac{1}{2}\sqrt{N}$.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

× „Im więcej cyfr, tym dokładniej.”

Cyfry poza tymi, na które pozwala niepewność, są fikcją. Wynik $9,7243 \pm 0,05$ udaje dokładność, której nie ma.

× „ $1 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$.”

Przedrostek podnosi się do potęgi razem z jednostką: $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

× „Wzór, który przechodzi test wymiarowy, jest poprawny.”

Test wyłapuje tylko błędy w wymiarach. Czynniki $\frac{1}{2}$, 2π albo pomyłka sinusa z cosinusem przejdą niezauważone.

× „Przy dużej liczbie pomiarów niepewność spada do zera.”

Maleje tylko część przypadkowa, i to powoli, jak $1/\sqrt{N}$. Błąd systematyczny i rozdzielczość przyrządu zostają.

× „Odchylenie standardowe maleje, gdy mierzę więcej razy.”

Odchylenie standardowe s opisuje rozrzut pojedynczych pomiarów i dąży do stałej wartości. Maleje niepewność średniej, $s/\sqrt{N}$ (symulacja 4).

× „Wynik różny od tablicowego to błędny wynik.”

Liczy się różnica w porównaniu z niepewnością. 0,09 przy niepewności 0,05 to zgodność, a 0,09 przy niepewności 0,01 to niezgodność (przykład 5.2).

7

Sprawdź się

1 Ile metrów na sekundę to 36 km/h?

10 m/s.

2 Jaki wymiar musi mieć k w wyrażeniu $\sin(kx)$, gdy x jest w metrach?

1/m.

3 Opór powietrza rośnie jak v^2 . Ile razy wzrośnie, gdy prędkość się podwoi?

4 razy.

4 Ile cyfr znaczących ma 0,0300?

3.

- 5 Niepewność średniej z 25 pomiarów, gdy $s = 0,5 \text{ cm}$?

$0,5/5 = 0,1 \text{ cm}$.

- 6 Bok kwadratu zmierzono z niepewnością względną 1%. Jaka jest niepewność względna pola?

2%.

- 7 Wynik $(5,2 \pm 0,1)$ i teoria 5,6. Zgodne?

Nie: różnica to 4 niepewności.

JEDNOSTKI, WYMIARY, SZACOWANIE

$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, $J = N \cdot \text{m}$, $W = J/s$, $\text{Pa} = \text{N/m}^2$

$k 10^3$, $M 10^6$, $G 10^9$; $m 10^{-3}$, $\mu 10^{-6}$, $n 10^{-9}$

$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$; $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$; rok $\approx \pi \cdot 10^7 \text{ s}$

przeliczanie: mnożenie przez ułamki równe 1

wymiar: obie strony równe; dodaje się tylko to samo; argumenty exp, ln, sin bezwymiarowe

zgadywanie wzoru: $C \cdot x^a y^b z^c$, porównaj potęgi kg, m, s

cyfry znaczące: iloczyn – najmniej cyfr; suma – najmniej miejsc po przecinku

NIEPEWNOŚĆ

zapis: $(\bar{x} \pm u)$ jednostka; niepewność 1-2 cyfry; wynik do tego samego miejsca

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2},$$

$$u(\bar{x}) = s/\sqrt{N}$$

błądzenie losowe: typowa odległość $\sqrt{N}$ kroków

suma, różnica: $\Delta x + \Delta y$; iloczyn, iloraz: $\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$; potęga: $|n| \frac{\Delta x}{|x|}$

zgodność: różnica $< 2u$ zgodne; $2u-3u$ wątpliwe; $> 3u$ niezgodne; dla dwóch wyników $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

błąd systematyczny nie maleje przy powtarzaniu

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 6-2 i 6-3 (fluktuacje i błędzenie losowe, skąd się bierze $\sqrt{N}$).
- **Dla chętnych:** 5-2...5-7 (jak mierzy się czasy i odległości w skali od jąder do Wszechświata; wzorce jednostek).

Do przeczytania w podręcznikach

- K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*: część wprowadzająca (jednostki, notacja wykładnicza, przybliżenia).
- J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*: klasyczny i przystępny podręcznik, jeśli chcesz pójść dalej w niepewnościach.

Ta lekcja zamyka część 0. Niepewności rozwinie lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce (przenoszenie niepewności przez pochodne i sumę kwadratów), a statystykę pomiarów lekcja 5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania. Analizy wymiarowej użyjesz od pierwszej lekcji fizyki (Dział 1: Ruch i jego przyczyny) do ostatniej. Część I kursu zaczyna się od wektorów (1.1 Wektory) oraz ciągów, granic i ciągłości (1.2 Ciągi, granice i ciągłość).



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. 15 m/s; 90 km/h; $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; 7900 kg/m^3 .
2. 10^{-6} m^2 i 10^{-6} m^3 .
3. $2000 \cdot 180 = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J} = 0,1 \text{ kWh}$.
4. $J = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, $W = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$. $[\frac{1}{2}mv^2] = \text{kg} \cdot (\text{m/s})^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \checkmark$.
5. $S = 0,0624 \text{ m}^2$, $F = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 0,0624 \approx 6,3 \text{ kN}$, czyli tyle, ile waży ciało o masie ok. 640 kg. Powietrze jest też pod kartką, a ciśnienie działa we wszystkich kierunkach, więc siły się równoważą.

Zadania · część 2

1. Pierwszy ($\frac{1}{2}at$ ma wymiar m/s) i trzeci (v_0 ma wymiar m/s). Drugi przechodzi test wymiarowy.
2. Oba 1/s, bo kt i ωt muszą być bezwymiarowe. A ma wymiar metrów.
3. $v = C\sqrt{F/\mu}$; $\sqrt{80/0,005} \approx 126 \text{ m/s}$. Pełna teoria daje $C = 1$.
4. Kilogramy są tylko w ρ , więc jego wykładnik to 0. Z $[g^a \lambda^b] = \text{m/s}$: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $v = C\sqrt{g\lambda}$. Dziesięć razy dłuższa fala jest $\sqrt{10} \approx 3,2$ razy szybsza. (Pełna teoria: $C = 1/\sqrt{2\pi}$.)
5. Kilogramy są w M (do potęgi +1) i w G (do potęgi -1), więc znoszą się tylko w iloczynie GM . Z $[r^a(GM)^b] = \text{s}$: $-2b = 1$, $a + 3b = 0$, czyli $b = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$: $T = C\sqrt{r^3/(GM)}$, więc $T^2 \propto r^3$. Pełna teoria daje $C = 2\pi$; dla Księżyca ($r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$, $GM = 3,99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$) wychodzi 27,4 doby.
6. Z m i k : $T = C\sqrt{m/k}$, bo $[m/k] = \text{s}^2$. Amplituda A to jedyna wielkość z metrami, bo $[k] = \text{kg/s}^2$. Metrów nie ma z czym skrócić, więc A nie może wystąpić we wzorze: okres nie zależy od amplitudy. W wahadle $T = f(\theta_0)\sqrt{l/g}$: amplituda kątowa jest bezwymiarowa, więc analiza wymiarowa jej nie wyklucza (więcej w fizyce, Dział 1: Ruch i jego przyczyny). (Pełna teoria: $C = 2\pi$.)

Zadania · część 3

1. 10^7 (dokładnie $3,156 \cdot 10^7$, tuż poniżej granicy $\sqrt{10} \cdot 10^7 \approx 3,162 \cdot 10^7$); 10^{25} , bo $5,97 > \sqrt{10} \approx 3,16$; 10^{-4} ($7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $7 > 3,16$).
2. $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 80 \approx 3 \cdot 10^9$, rząd 10^9 .
3. Wanna ok. 150 l, kropla ok. 0,05 ml: $150/(5 \cdot 10^{-5}) = 3 \cdot 10^6$, rząd 10^6 – 10^7 .
4. 40 km dziennie, $40\,000/40 = 1000$ dni, czyli ok. 3 lata.
5. Przykładowo: 2 osoby na mieszkanie, więc ok. 900 tys. mieszkań; fortepian lub pianino w co 30. mieszkaniu, plus szkoły i sale, razem ok. 35 tys. instrumentów; strojenie raz na rok; stroiciel stroi 3 instrumenty dziennie przez 200 dni, czyli 600 na rok. Wynik: $35\,000/600 \approx 60$, rząd kilkudziesięciu. Najmniej pewny jest odsetek mieszkań z instrumentem i częstość strojenia. Ważne, że zapisane założenia można sprawdzić i poprawić.

Zadania · część 4

1. 3; 3; 3; 1.

2. 1,4; 9,3; 33.

3. Bok ma dwie cyfry znaczące, więc pole też: $1,0 \cdot 10^1 \text{ cm}^2$. Jeśli bok to $3,2 \pm 0,05 \text{ cm}$, pole jest gdzieś między $3,15^2 \approx 9,9$ a $3,25^2 \approx 10,6 \text{ cm}^2$. Cztery cyfry udają dokładność, której nie ma.

Zadania · część 5

1. $\Delta = 1 \text{ mm}$, względna $0,001/1,825 \approx 0,05\%$. $(1,825 \pm 0,001) \text{ m}$.

2. $(12,3 \pm 0,2) \text{ m/s}$ lub $(12,35 \pm 0,24) \text{ m/s}$; $(250,0 \pm 0,5) \text{ g}$; $(2,10 \pm 0,03) \text{ s}$. Dopisane zero ma sens tylko wtedy, gdy pomiar rzeczywiście dał tę cyfrę.

3. $\bar{T} = 2,05 \text{ s}$; $s \approx 0,047 \text{ s}$; $u = 0,047/\sqrt{5} \approx 0,02 \text{ s}$. Wynik: $(2,05 \pm 0,02) \text{ s}$.

4. 100 razy, bo $u \propto 1/\sqrt{N}$. Powtarzanie szybko przestaje się opłacać. Często lepiej zmienić metodę albo przyrząd. Powtarzanie nie usuwa też błędów systematycznych.

5. $\rho = 540/200 = 2,70 \text{ g/cm}^3$. Względna: $0,2\% + 2\% + 2,5\% + 1\% \approx 5,7\%$, czyli $\pm 0,15$. $\rho = (2,70 \pm 0,15) \text{ g/cm}^3$: pasuje do aluminium (2,70).

6. $V \propto d^3$, więc $3 \cdot 2\% = 6\%$.

7. Różnica 11 m/s, niepewność różnicy $\sqrt{16 + 9} = 5 \text{ m/s}$. To 2,2 niepewności: na granicy zgodności. Warto szukać błędu systematycznego, np. różnicy temperatur powietrza. Oszacowanie maksymalne dałoby $4 + 3 = 7 \text{ m/s}$ i tylko 1,6 niepewności.

8. Ma sens, bo rozrzut prób (ok. 1,8 cm) jest większy od działki, więc zaokrąglenia odczytu zachowują się jak dodatkowe losowe błędy i też się uśredniają. Przestałaby, gdyby rozrzut prób był porównywalny z działką lub mniejszy (np. wszystkie odczyty takie same albo różniące się o jedną działkę). Wtedy błędy zaokrągleń nie są przypadkowe i niepewności nie da się zbić poniżej ok. $\Delta x/\sqrt{3}$ (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce).

9. $\frac{1}{2}\sqrt{3000} \approx 27$. Odchylenie $1500 - 1493 = 7$ to tylko 0,26 typowego odchylenia. Moneta jest w porządku, a wynik jest wręcz bardzo blisko połowy.

Matematyka · Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 5-5, 6-2 i 6-3; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Dane z rzutów monety: tabela 6-1 w FLP. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.