

Geometria analityczna i krzywe stożkowe

Kepler, patrząc na tablice obserwacji Marsa, odkrył, że planety krążą po elipsach. Geometria analityczna zamienia kształty w równania, a równania w kształty. Ta lekcja przechodzi od punktu i prostej przez okrąg do trzech krzywych stożkowych: elipsy, paraboli i hiperboli. Na końcu pokazuje, że wszystkie trzy to jedno równanie we współrzędnych biegunowych: równanie orbity ciała krążącego wokół jednego masywnego ciała, np. Słońca.

CZAS

ok. 3 h teorii + $2\frac{3}{4}$ h zadań

ZADANIA

28 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 7-2, 7-5, 26-4; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwie pinezki i sznurek
- 1 Punkty i odległości
- 2 Prosta
- 3 Okrąg
- 4 Elipsa, parabola, hiperbola
- 5 Współrzędne biegunowe i równanie orbity
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwie pinezki i sznurek

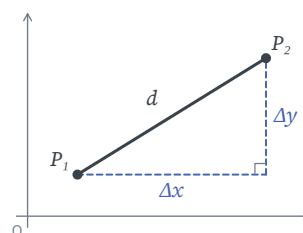
Feynman opisuje pierwsze prawo Keplera tak: każda planeta krąży wokół Słońca po elipsie, a Słońce jest w jednym z jej ognisk. Zaraz dodaje, że elipsa to nie byle owal, ale ściśle określona krzywa. Narysujesz ją dwiema pinezkami, pętlą sznurka i ołówkiem. Matematycznie to zbiór punktów, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów, ognisk, jest stała. Można też powiedzieć, że to okrąg oglądany pod kątem, „skrócony” w jednym kierunku. FLP I-7-2

Trzy opisy, trzy różne pomysły: sznurek, odległości, skrócony okrąg. W tej lekcji zapiszesz każdy z nich równaniem i sprawdzisz, że to ta sama krzywa. To jest właśnie geometria analityczna: kształt staje się równaniem, a pytania o kształt (gdzie się przecinają? jak daleko? pod jakim kątem?) stają się rachunkiem.

Pytanie na start. Ziemia jest najbliżej Słońca w odległości 147,1 mln km, a najdalej 152,1 mln km. Czy jej orbita to wyraźna elipsa, czy prawie okrąg? I gdzie dokładnie jest Słońce? Odpowiedź w przykładzie 4.1.

1 Punkty i odległości

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie każdy punkt to para liczb $P = (x; y)$: o ile przesunąć się wzdłuż osi x i o ile wzdłuż osi y od początku układu $O = (0; 0)$. Osie są prostopadłe i mają tę samą jednostkę. Ten pomysł Kartezjusza pozwala zamienić geometrię na algebrę.



Odległość dwóch punktów to twierdzenie Pitagorasa. Różnice współrzędnych $\Delta x = x_2 - x_1$ i $\Delta y = y_2 - y_1$ są przyprostokątnymi trójkąta, a szukany odcinek jego przeciwprostokątną:

ODLEGŁOŚĆ I ŚRODEK ODCINKA

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Kolejność punktów nie ma znaczenia, bo różnice są podnoszone do kwadratu. Ten sam wzór w trzech wymiarach ma trzeci składnik $(z_2 - z_1)^2$. W lekcji 1.1 Wektory zobaczysz, że to długość wektora $\vec{P_1 P_2}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

- Oblicz odległość punktów $P_1 = (-2; 1)$ i $P_2 = (4; 9)$ oraz środek odcinka $P_1 P_2$.

- 2 Na mapie w skali 1 kratka = 1 km dom stoi w punkcie (2; 3), a szkoła w (7; 15). Jak daleko jest od domu do szkoły w linii prostej?

- 3 Pokaż, że trójkąt o wierzchołkach (0; 0), (4; 0), (2; $2\sqrt{3}$) jest równoboczny.

□□□ podstawowe ▤▤▤ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

2 Prosta

2.1 Dwa zapisy prostej

Wykres funkcji liniowej z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne to prosta. Zapisujemy ją w **postaci kierunkowej** $y = mx + n$. m to **współczynnik kierunkowy**, czyli o ile rośnie y , gdy x rośnie o 1. Prosta przecina oś y w punkcie (0; n). W lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne pisaliśmy $ax + b$; tu litery a i b zostawiamy dla półosi elipsy. Prosta przez punkty $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$ ma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Współczynnik kierunkowy to tangens kąta nachylenia prostej do osi x : $m = \tan \alpha$ (lekcja 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne). Prosta nachylona pod kątem 45° ma $m = 1$.

Postać kierunkowa nie opisuje prostych pionowych, np. $x = 3$, bo dla nich m byłoby nieskończone. Wszystkie proste obejmuje **postać ogólna**:

$$Ax + By + C = 0, \quad A, B \text{ nie oba równe } 0.$$

Dla $B \neq 0$ przechodzi ona w kierunkową: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

2.2 Proste równoległe i prostopadłe

Proste $y = m_1x + n_1$ i $y = m_2x + n_2$ są **równoległe**, gdy $m_1 = m_2$, i **prostopadłe**, gdy $m_1m_2 = -1$. Drugi warunek widać z obrotu: obrót o 90° zamienia kierunek „1 w prawo, m w górę” na „ m w lewo, 1 w górę”, a ten ma współczynnik $\frac{1}{-m}$ (dla $m \neq 0$; prostopadła do prostej poziomej jest pionowa). Wspólny punkt dwóch prostych to rozwiązanie układu ich równań (lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste).

2.3 Odległość punktu od prostej

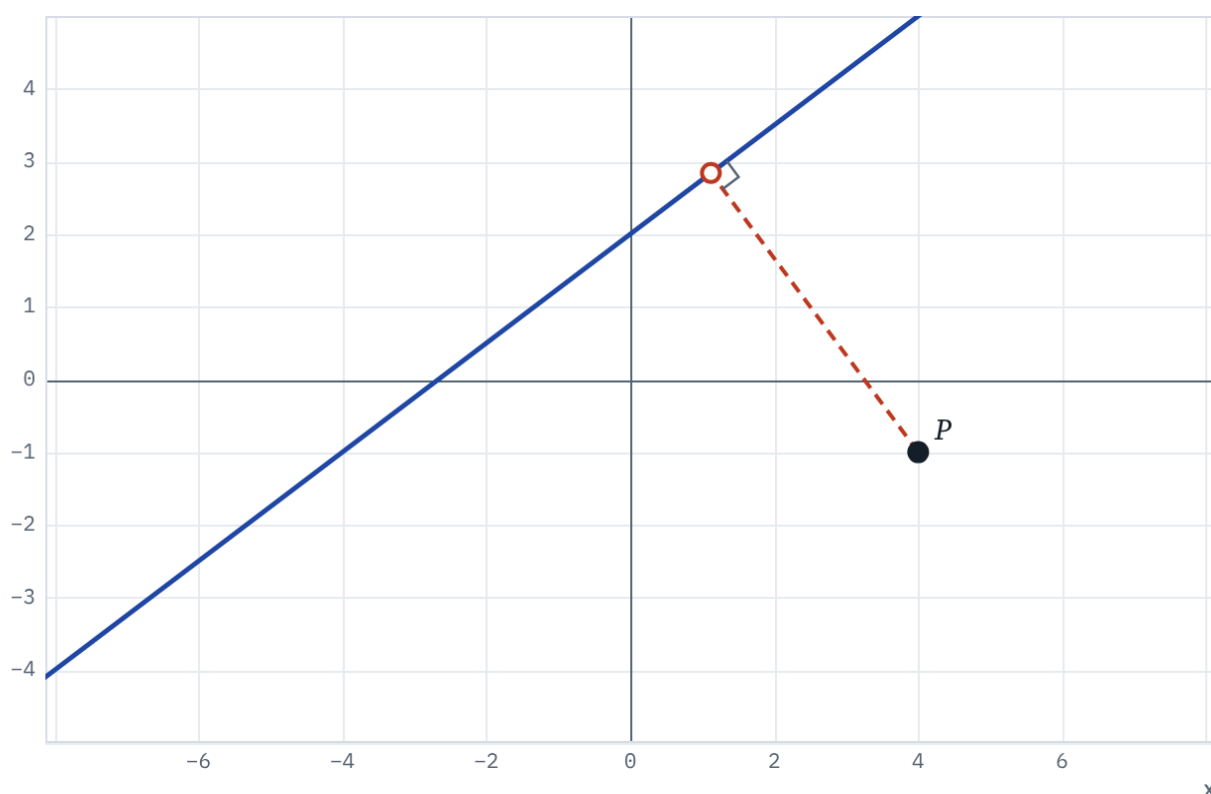
Najkrótsza droga od punktu do prostej biegnie prostopadłe do niej. Dla prostej $Ax + By + C = 0$ i punktu $(x_0; y_0)$ jej długość to

🔧 ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Licznik mówi, jak bardzo punkt „nie spełnia” równania prostej. Mianownik zamienia to na prawdziwą odległość. Wyprowadzenie najkrócej idzie przez iloczyn skalarny: wektor $[A; B]$ jest prostopadły do prostej (lekcja 1.1 Wektory). Na razie przyjmij wzór i sprawdź go na przykładzie.

SYMULACJA 1 Prosta $y = mx + n$ i punkt P . Przerywany odcinek to najkrótsza droga od P do prostej, prostopadła do niej. Porównaj jego długość ze wzorem i zobacz, jak m zmienia kąt nachylenia.



— $y = mx + n$ - - - najkrótsza droga z P

odległość d 4,80

najbliższy punkt prostej (1,12; 2,84)

kąt nachylenia $\alpha = \arctan m$ 36,9°

postać ogólna prostej $0,75x - y + 2,0 = 0$

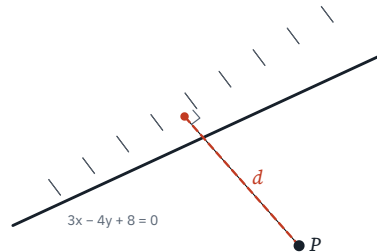
Stan na rysunku: $m = 0,75$, $n = 2,0$, $P = (4,0; -1,0)$; $d = 4,80$.

Przykład 2.1

Jak daleko statek jest od brzegu?

Prosty odcinek brzegu biegnie wzdłuż prostej $y = 0,75x + 2$ (współrzędne w km). Statek jest w punkcie $(8; 1)$. Jak daleko ma do brzegu i w którym punkcie do niego dopłyne, płynąc najkrótszą drogą?

- 1 Postać ogólna: mnożymy przez 4 i przenosimy na jedną stronę: $3x - 4y + 8 = 0$, czyli $A = 3$, $B = -4$, $C = 8$.
- 2 $d = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{28}{5} = 5,6$ km.
- 3 Droga jest prostopadła do brzegu, więc ma współczynnik $-\frac{4}{3}$: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 8)$. Przecięcie z brzegiem: $0,75x + 2 = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3}$, stąd $x = 4,64$, $y = 5,48$.



Statek P i brzeg: najkrótsza droga jest prostopadła do linii brzegu

Wynik: 5,6 km; statek dopłyne do punktu $(4,64; 5,48)$.

Sprawdzenie: odległość statku od punktu $(4,64; 5,48)$ to $\sqrt{3,36^2 + 4,48^2} = 5,6$ ✓.
Punkt leży na brzegu: $0,75 \cdot 4,64 + 2 = 5,48$ ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 35 min

- 1 Napisz równanie prostej przez punkty $(-2; 1)$ i $(4; 9)$. Pod jakim kątem jest nachylona do osi x ?
- 2 Zapisz prostą $2x + 5y - 10 = 0$ w postaci kierunkowej. W jakich punktach przecina osie?
- 3 Które z prostych są równoległe, a które prostopadłe: $y = 2x - 1$, $y = -0,5x + 3$, $4x - 2y + 7 = 0$?
- 4 Wyznacz symetralną odcinka o końcach $(-2; 1)$ i $(4; 9)$, czyli prostą prostopadłą do niego i przechodzącą przez jego środek.
- 5 Oblicz odległość punktu $(0; 0)$ od prostej $x + y = 4$. Sprawdź wynik rysunkiem.

- 6 Wyprowadź wzór na odległość punktu od prostej dla prostej $y = mx$ i punktu $(x_0; y_0)$, idąc tą samą drogą co w przykładzie 2.1: prosta prostopadła przez punkt, punkt przecięcia, odległość.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Okrąg

Okrąg to zbiór punktów odległych o r od środka $(x_s; y_s)$. Wzór na odległość daje od razu jego równanie:

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2.$$

Po wymnożeniu nawiasów okrąg często wygląda inaczej, np. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Środek i promień odczytasz, uzupełniając kwadraty jak przy postaci kanonicznej paraboli (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne): $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ i $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$. Stąd $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$: środek $(3; -2)$, promień 5.

3.1 Prosta i okrąg: przecięcie, styczna

Wspólne punkty prostej i okręgu znajdziesz, wstawiając $y = mx + n$ do równania okręgu. Wychodzi równanie kwadratowe, a jego wyróżnik z lekcji 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste mówi wszystko: $\Delta > 0$ to dwa punkty przecięcia, $\Delta = 0$ to jeden punkt (prosta jest **styczna**), $\Delta < 0$ to brak punktów wspólnych. Prościej sprawdzić to geometrycznie: prosta jest styczna, gdy jej odległość od środka okręgu równa się promieniowi.

Przykład 3.1

Gdzie jest telefon? Położenie z dwóch odległości

Dwie wieże stoją w punktach $(0; 0)$ i $(10; 0)$ (km). Z czasów przelotu sygnału wiadomo, że telefon jest 6 km od pierwszej i 8 km od drugiej. Gdzie jest telefon?

- 1 Telefon leży na dwóch okręgach: $x^2 + y^2 = 36$ i $(x - 10)^2 + y^2 = 64$.
- 2 Odejmujemy równania stronami. Kwadraty x^2 i y^2 znikają: $x^2 - (x - 10)^2 = -28$, czyli $20x - 100 = -28$, $x = 3,6$.
- 3 Z pierwszego okręgu: $y^2 = 36 - 12,96 = 23,04$, $y = \pm 4,8$.

Wynik: $(3,6; 4,8)$ albo $(3,6; -4,8)$. Dwie wieże dają dwa możliwe położenia; trzecia wieża rozstrzyga, które jest prawdziwe.

Sprawdzenie: $\sqrt{6,4^2 + 4,8^2} = 8 \checkmark$. Boki 6, 8, 10 tworzą trójkąt prostokątny, więc telefon „widzi” odcinek między wieżami pod kątem prostym $\checkmark$. Tak samo, tylko w trzech wymiarach i z poprawką na zegar odbiornika, liczy położenie odbiornik GPS.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Napisz równanie okręgu o środku $(-1; 4)$ przechodzącego przez punkt $(2; 0)$.

- 2 Znajdź środek i promień okręgu $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$.

- 3 Czy prosta $y = x + 1$ przecina okrąg $x^2 + y^2 = 4$? Jeśli tak, w ilu punktach?

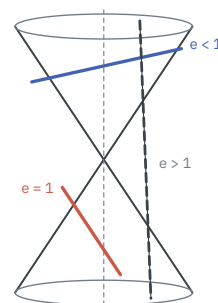
- 4 Dla jakich m prosta $y = mx + 5$ jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 9$?

- 5 W przykładzie 3.1 odejmowanie równań dało prostą $x = 3,6$. Pokaż, że dla dowolnych dwóch różnych okręgów przecinających się w dwóch punktach odjęcie ich równań daje prostą przechodzącą przez oba punkty przecięcia. Dlaczego to musi być prosta?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Elipsa, parabola, hiperbola

Weź stożek podwójny (dwa stożki połączone wierzchołkami) o pionowej osi i przetnij go płaszczyzną, która nie przechodzi przez wierzchołek. Gdy płaszczyzna jest nachylona mniej stromo niż tworząca stożka, przekrój to zamknięta elipsa (okrąg, gdy jest pozioma). Gdy jest równoległa do tworzącej, przekrój to parabola. Gdy jest bardziej stroma niż tworząca, przecina obie połowki stożka i daje dwie gałęzie hiperboli. Stąd nazwa: **krzywe stożkowe**, badane już przez Apoloniusza w III w. p.n.e. W fizyce ważniejsze od stożka są jednak ich definicje przez odległości. Każda z nich odpowiada jakiejś własności fizycznej.



4.1 Elipsa

Elipsa to zbiór punktów, dla których suma odległości od dwóch **ognisk** F_1 i F_2 jest stała i równa $2a$. Ustawmy ogniska w punktach $(\pm c; 0)$. Wtedy:

ELIPSA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2, \quad e = \frac{c}{a} \in [0; 1).$$

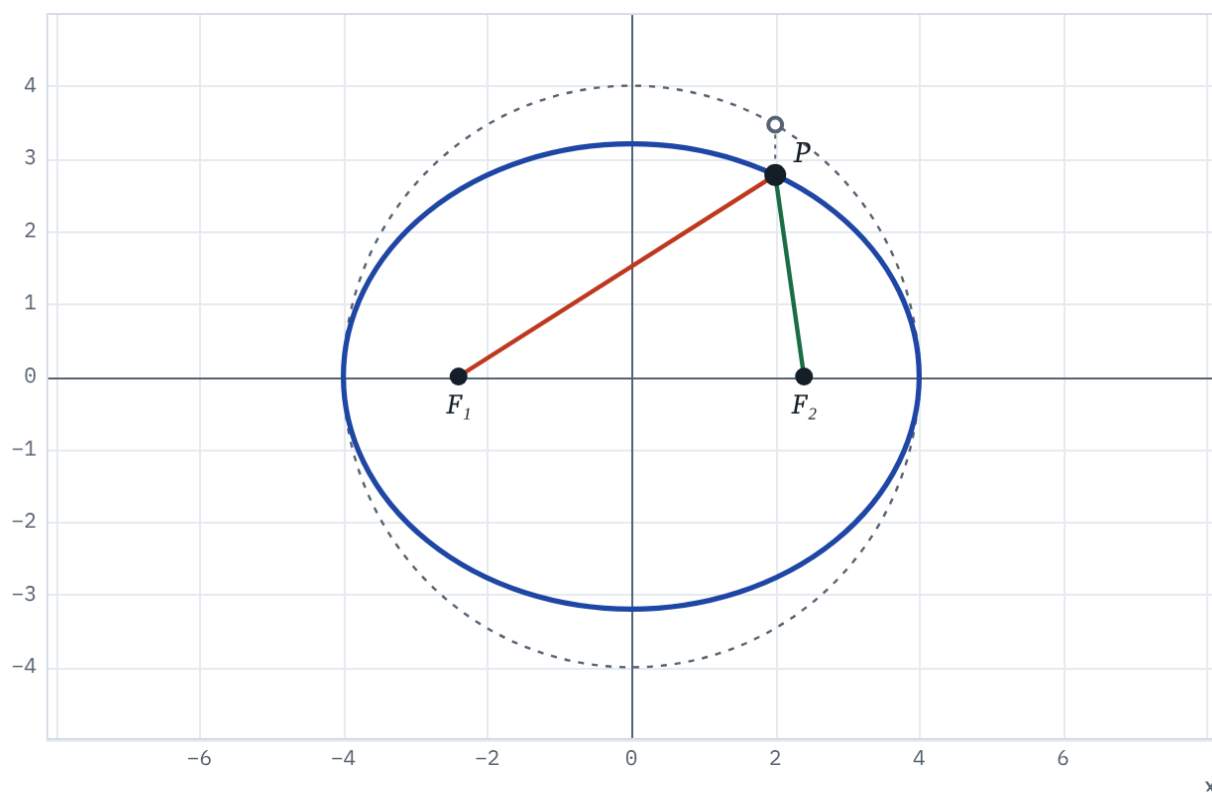
a to **półoś wielka**, b to **półoś mała**, e to **mimośród** (nie mylić z liczbą e z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne).

Skąd $b^2 = a^2 - c^2$? Punkt elipsy leżący na osi y , czyli $(0; b)$, jest jednakowo odległy od obu ognisk, więc każda odległość to a . Z trójkąta prostokątnego o bokach c , b i a mamy $a^2 = b^2 + c^2$. Pełne wyprowadzenie równania z definicji to dwa razy podnoszenie do kwadratu (zadanie 4.6).

Równanie pokazuje też trzeci opis Feynmana. Weź okrąg $x^2 + y^2 = a^2$ i ściśnij go w pionie: każde y pomnóż przez $\frac{b}{a}$. Wyjdzie dokładnie elipsa. Tak wygląda okrąg oglądany z daleka, gdy linia wzroku tworzy kąt β z prostą prostopadłą do płaszczyzny okręgu: $\frac{b}{a} = \cos \beta$.

Mimośród mówi, jak bardzo elipsa jest spłaszczona. Dla $e = 0$ ogniska się pokrywają i elipsa jest okręgiem. Dla e bliskiego 1 jest długa i wąska.

SYMULACJA 2 Elipsa „ze sznurka”. Przesuwaj punkt P po elipsie: suma odległości $r_1 + r_2$ od ognisk się nie zmienia. Zmieniaj mimośród i zobacz, jak elipsa przechodzi od okręgu do wąskiego owalu.



— elipsa — r_1 — r_2 - - - okrąg $x^2 + y^2 = a^2$

r_1 5,20

r_2 2,80

$r_1 + r_2 = 2a$ 8,00

$c = ae$ 2,40

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 3,20

b/a 0,800

Stan na rysunku: $a = 4$, $e = 0,60$, $b = 3,20$; $r_1 = 5,20$, $r_2 = 2,80$, $r_1 + r_2 = 8,00$.

Przykład 4.1

Orbita Ziemi: elipsa czy okrąg?

Najmniejsza odległość Ziemi od Słońca (peryhelium) to $q = 147,10$ mln km, największa (aphelium) $Q = 152,10$ mln km. Słońce jest w ognisku elipsy. Oblicz a , c , e i b .

- 1 Peryhelium i aphelium to końce osi wielkiej, więc $q + Q = 2a$: $a = 149,60$ mln km.
- 2 Słońce jest o c od środka elipsy: $q = a - c$, stąd $c = 2,50$ mln km i $e = \frac{c}{a} \approx 0,0167$.
- 3 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} \approx 0,99986 a$, czyli b jest o ok. 21 tys. km krótsze od a .

Wynik: $e \approx 0,017$. Kształt orbity jest prawie idealnym okręgiem: półosie różnią się o 0,014%. Za to Słońce jest wyraźnie przesunięte od środka, o 2,5 mln km (1,7% promienia).

Sprawdzenie: NASA podaje dla Ziemi $a = 149,598$ mln km i $e = 0,0167 \checkmark$. Wniosek wart zapamiętania: przy małym mimośrodku względna różnica półosi to $1 - \frac{b}{a} \approx \frac{e^2}{2}$, a względne przesunięcie ogniska $\frac{c}{a} = e$. Dlatego na rysunku orbita Ziemi wygląda jak okrąg z niecentralnie położonym Słońcem.

4.2 Parabola

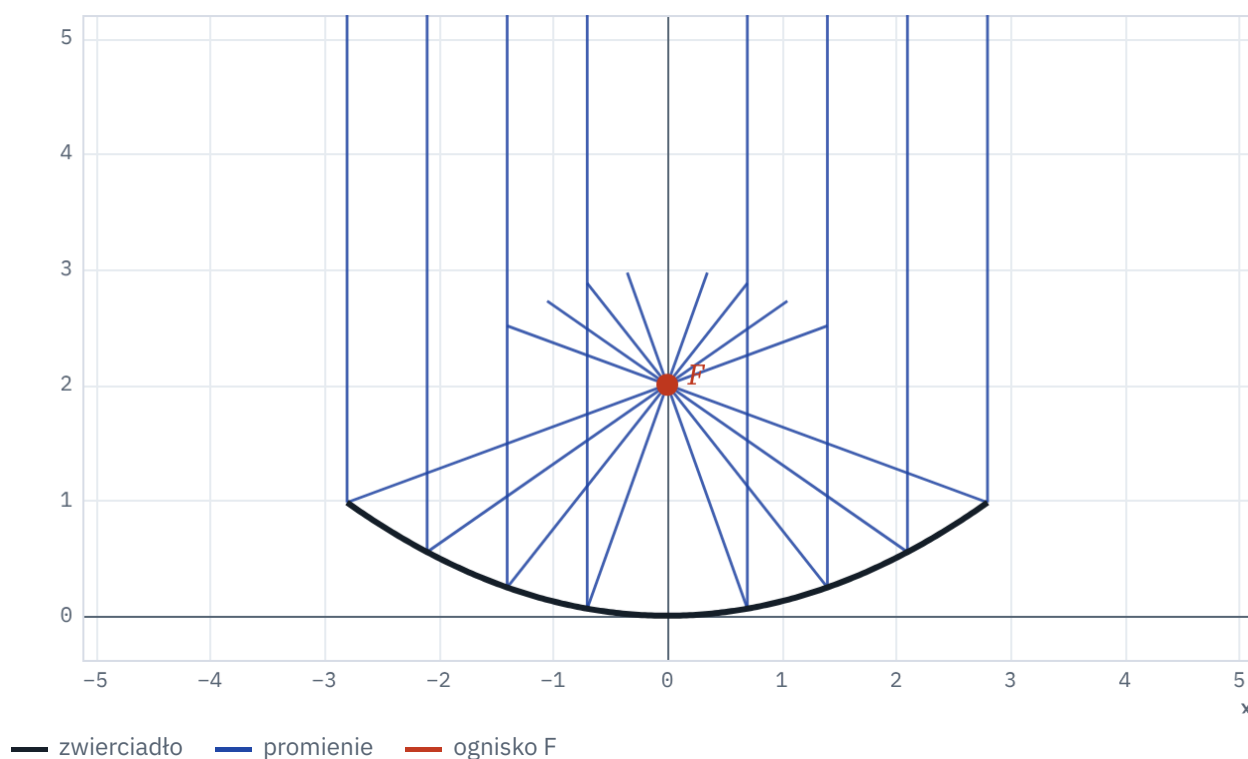
Parabola to zbiór punktów jednakowo odległych od punktu F (ogniska) i od prostej (**kierownicy**). Dla ogniska $(0; f)$ i kierownicy $y = -f$ warunek $\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = y + f$ po podniesieniu do kwadratu daje

$$y = \frac{x^2}{4f}.$$

To ta sama parabola co wykres funkcji kwadratowej z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne i tor rzuconej piłki (bez oporu powietrza). Liczba f to **ogniskowa**: odległość wierzchołka od ogniska.

Feynman pokazuje na przykładzie teleskopu z Mount Palomar, dlaczego zwierciadło skupiające światło gwiazdy ma kształt paraboli (dokładniej paraboloidy, czyli paraboli obróconej wokół osi). Światło z dalekiej gwiazdy przychodzi równoległymi promieniami. Żeby wszystkie zebrały się w jednym punkcie, ich czasy, a więc i drogi, liczone od płaszczyzny prostopadłej do promieni do tego punktu muszą być równe (zasada Fermata). Prowadzi to dokładnie do warunku „jednakowa odległość od punktu i od prostej”. FLP I-26-4 Każdy promień równoległy do osi paraboli odbija się do ogniska. Działa to też w drugą stronę: żarówka w ognisku reflektora daje równoległą wiązkę.

SYMULACJA 3 Promienie równoległe do osi padają z góry i odbijają się od zwierciadła. Dla paraboli wszystkie trafiają w ognisko. Przełącz na zwierciadło kuliste o tej samej ogniskowej: promienie dalekie od osi przecinają oś bliżej zwierciadła i obraz się rozmywa.



ogniskowa f 2,00

promienie przecinają oś na wysokości od 2,000 do 2,000

rozmycie ogniska 0,000

Stan na rysunku: zwierciadło paraboliczne, $f = 2$, połowa otworu 2,80; rozmycie 0,000.

4.3 Hiperbola

Hiperbola to zbiór punktów, dla których *różnica* odległości od dwóch ognisk ma stałą wartość bezwzględną $2a$. Dla ognisk $(\pm c; 0)$:

HIPERBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2, \quad e = \frac{c}{a} > 1, \quad \text{asymptoty } y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Ma dwie gałęzie, a daleko od środka zbliża się do dwóch prostych, **asymptot**. Dla $a = b = 1$ to hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne, na której prawej gałęzi leżą punkty $(\cosh u; \sinh u)$.

Definicja przez różnicę odległości ma zastosowanie w nawigacji. Dwie stacje nadają sygnały w znanych chwilach (dla prostoty przyjmijmy, że jednocześnie). Odbiornik nie zna odległości do żadnej z nich, ale mierzy, o ile później dotarł jeden sygnał niż drugi. Różnica czasów razy prędkość światła to różnica odległości, a punkty o stałej różnicy odległości leżą na hiperboli. Druga para stacji daje drugą hiperbolę, a ich przecięcie wyznacza położenie. Tak działały radionawigacyjne systemy hiperboliczne, np. LORAN.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

7 zadań · ok. 45 min

- 1 Dla elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$ podaj a , b , c , mimośród i położenie ognisk.

- 2 Antena satelitarna ma kształt paraboloidy o średnicy 60 cm i głębokości 6 cm. W jakiej odległości od dna (wierzchołka) czaszy trzeba umieścić odbiornik?

- 3 Kometa Halleya zbliża się do Słońca na 0,575 AU (jednostka astronomiczna, $\text{AU} \approx 149,6$ mln km, średnia odległość Ziemi od Słońca) i oddala na 35,3 AU. Oblicz półos wielką i mimośród. Z trzeciego prawa Keplera okres w latach to $a^{3/2}$, gdy a jest w AU. Ile wynosi?

- 4 Orbita kołowa gwiazdy podwójnej jest nachylona tak, że widzimy ją pod kątem 60° do kierunku prostopadłego do płaszczyzny orbity. Jaką elipsę widzimy na niebie (stosunek $\frac{b}{a}$ i mimośród)? Czy druga gwiazda jest w jej ognisku?

- 5 Dwie stacje nawigacyjne są odległe o 200 km. Sygnał z jednej dociera do statku o $100 \mu\text{s}$ później niż z drugiej. Na jakiej hiperboli leży statek (podaj a , b , c)? Prędkość światła to $3 \cdot 10^5$ km/s.

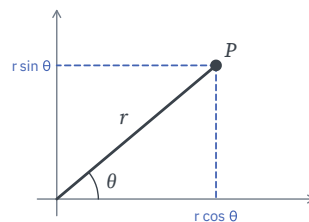
- 6 Wyprowadź równanie elipsy z definicji $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

- 7 W litotrypsji fala uderzeniowa wysłana z jednego ogniska reflektora w kształcie połówki elipsoidy obrotowej skupia się w drugim, gdzie znajduje się kamień nerkowy. Użyj definicji elipsy, żeby wyjaśnić, dlaczego wszystkie części fali docierają do drugiego ogniska w tej samej chwili.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Współrzędne biegunowe i równanie orbity

Punkt na płaszczyźnie można też opisać inaczej: jak daleko jest od początku układu (r) i w jakim kierunku (θ , kąt od dodatniej półosi x). To **współrzędne biegunowe**. Przejścia między układami dają definicje sinusa i cosinusa z lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne:



WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{atan2}(y, x).$$

Kąt liczymy funkcją atan2 , a nie $\arctan(y/x)$, z powodów omówionych w lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne. Współrzędne biegunowe są naturalne wszędzie, gdzie jest wyróżniony środek: przy ruchu po okręgu, przy radarze, przy orbitach wokół Słońca. Okrąg o środku w początku układu to po prostu $r = R$.

5.1 Jedno równanie dla trzech krzywych

Elipsa, parabola i hiperbola mają wspólną definicję. Weź ognisko F i kierownicę. Krzywa to zbiór punktów, dla których stosunek odległości od ogniska do odległości od kierownicy jest stały i równy e . Dla $0 < e < 1$ wychodzi elipsa, dla $e = 1$ parabola, dla $e > 1$ hiperbola. Okrąg ($e = 0$) to przypadek graniczny, z kierownicą odsuniętą do nieskończoności. Ten e to ten sam mimośród $\frac{c}{a}$ co w definicjach przez dwa ogniska (sprawdzisz to dla elipsy w zadaniu 5.7).

We współrzędnych biegunowych o początku w ognisku ten warunek ma bardzo prostą postać. Kąt θ mierzymy od kierunku do najbliższego punktu krzywej (peryhelium), a kierownica to prosta $x = d$ po tej samej stronie. Odległość punktu $(r; \theta)$ od kierownicy to $d - r \cos \theta$, więc $r = e(d - r \cos \theta)$, czyli $r(1 + e \cos \theta) = ed$. Oznaczamy $p = ed$:

RÓWNANIE STOŻKOWEJ OD OGNISKA

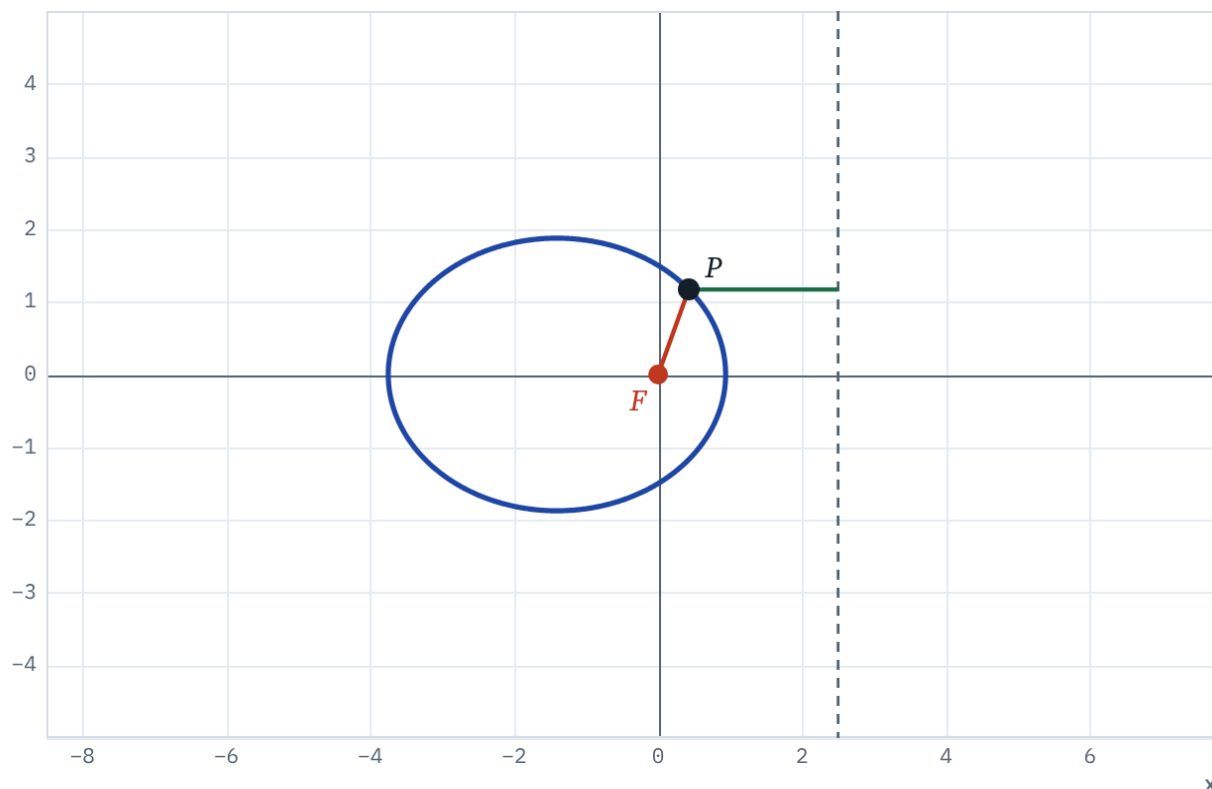
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad p = a(1 - e^2) \text{ dla elipsy.}$$

p to **parametr** krzywej: odległość od ogniska do krzywej w kierunku prostopadłym do osi, $r(90^\circ) = p$.

To jest **równanie orbity**. Newton pokazał, że ciało przyciągane tylko przez Słońce (pomijamy planety) porusza się dokładnie po takiej krzywej. Ciało związane ze Słońcem, np. planeta lub kometa okresowa, ma $e < 1$. Ciało, które przyleciało z daleka i odleci na zawsze, ma $e \geq 1$. Obiekty spoza Układu Słonecznego mają $e > 1$, jak międzygwiazdny 'Oumuamua w 2017 r. ($e \approx 1,2$).

). Wyprowadzimy to w fizyce (Dział 5: Grawitacja i orbity) i w astronautyce (1 Zagadnienie dwóch ciał i równanie orbity).

SYMULACJA 4 Krzywa $r = p/(1 + e \cos \theta)$ z ogniskiem w początku układu i kierownicą (przerwana pionowa linia). Zmieniaj mimośród: elipsa staje się parabolą przy $e = 1$ i hiperbolą dla $e > 1$. Dla punktu P odczytaj, że $|PF|$ to zawsze e razy odległość od kierownicy.



— $r = p/(1 + e \cos \theta)$ — $|PF|$ — odległość od kierownicy - - - kierownica

krzywa **elipsa**

θ 70°

$r = |PF|$ 1,24

odległość od kierownicy 2,07

$|PF|$: odległość 0,60

Stan na rysunku: $p = 1,5$, $e = 0,60$ (elipsa); $\theta = 70^\circ$, $r = 1,24$.

Przykład 5.1

Odległość Ziemi od Słońca w dowolnym punkcie orbity

Użyj wartości z przykładu 4.1. Jak daleko od Słońca jest Ziemia, gdy od peryhelium obróciła się o $\theta = 90^\circ$ i o $\theta = 180^\circ$ (wokół Słońca)?

- 1 $p = a(1 - e^2) = 149,60 \cdot (1 - 0,0167^2) \approx 149,56$ mln km.
- 2 $\theta = 90^\circ$: $\cos \theta = 0$, więc $r = p \approx 149,56$ mln km.
- 3 $\theta = 180^\circ$: $r = \frac{p}{1 - e} \approx \frac{149,56}{0,9833} \approx 152,10$ mln km, czyli aphelium ✓.

Wynik: 149,56 mln km przy $\theta = 90^\circ$ i 152,10 mln km w aphelium.

Sprawdzenie: $\theta = 0$: $r = \frac{p}{1+e} \approx 147,10$ mln km, czyli peryhelium ✓. Uwaga: $\theta = 90^\circ$ to nie „ćwierć roku po peryhelium”. Ziemia jest szybsza blisko Słońca (drugie prawo Keplera), więc kąt nie rośnie równomiernie w czasie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

7 zadań · ok. 40 min

- 1 Zamień na biegunowe punkt $(-1; \sqrt{3})$, a na kartezjańskie punkt $r = 4, \theta = -150^\circ$.
■ ■ ■
- 2 Jaką krzywą opisują równania biegunowe $r = 3$ i $\theta = 45^\circ$ (dla $r \geq 0$)?
■ ■ ■
- 3 Zapisz okrąg $x^2 + y^2 = 2x$ we współrzędnych biegunowych. Jaki ma środek i promień?
■ ■ ■
- 4 Jaką krzywą opisuje $r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$? Gdzie jest jej wierzchołek, a gdzie ognisko?
■ ■ ■
- 5 Kometę porusza się po orbicie $r = \frac{1,2}{1 + 0,6 \cos \theta}$ (AU). Oblicz odległości peryhelium i aphelium oraz półosć wielką.
■ ■ ■
- 6 Dla hiperboli $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ z $e = 2$: dla jakich kątów r jest dodatnie? Co dzieje się, gdy $\cos \theta$ zbliża się do $-\frac{1}{e}$, i co to mówi o torze ciała?
■ ■ ■

- 7 Pokaż, że $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ z $e = 0$ to okrąg, a dla $0 < e < 1$ suma odległości dla $\theta = 0$ i $\theta = 180^\circ$ jest równa $2a$ z $a = \frac{p}{1 - e^2}$. Pokaż też, że ognisko jest odległe od środka elipsy o $c = ae$, czyli że ten e to mimośród $\frac{c}{a}$.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

6 Błędne intuicje

- × „Każdą prostą da się zapisać jako $y = mx + n$.”

Prostej pionowej nie, bo nie jest wykresem funkcji. Postać ogólna $Ax + By + C = 0$ obejmuje wszystkie proste.

- × „Proste prostopadłe mają przeciwne współczynniki kierunkowe.”

Mają współczynniki o iloczynie -1 : m i $-\frac{1}{m}$. Proste $y = 2x$ i $y = -2x$ przecinają się pod kątem ok. 53° , a nie 90° .

- × „Elipsa to po prostu spłaszczony okrąg, więc jej ognisko jest w środku.”

Ogniska leżą na osi wielkiej, w odległości $c = ae$ od środka. Słońce nie jest w środku orbity Ziemi, tylko 2,5 mln km od niego.

- × „Parabola to połowa elipsy” albo „to hiperbola”.

To trzy różne krzywe. Parabola nie ma asymptot i ma jedno ognisko w skończonej odległości. Gałąź hiperboli dąży do prostych, a parabola rośnie coraz bardziej stromo i do żadnej prostej się nie zbliża.

- × „Kulista miska skupia światło tak samo jak paraboliczna.”

Tylko promienie blisko osi. Dalsze od osi przecinają oś bliżej zwierciadła (aberracja sferyczna, symulacja 3). Przy małym otworze różnica jest niewielka, bo blisko wierzchołka okrąg i parabola prawie się pokrywają.

- × „We współrzędnych biegunowych $\theta = \arctan(y/x)$.”

Tylko dla $x > 0$. W II i III ćwiartce wynik jest o 180° za mały lub za duży. Używaj atan2 .

Sprawdź się

- 1 Jaką długość ma odcinek od $(1; 1)$ do $(4; 5)$?

5.

- 2 Jaki współczynnik kierunkowy ma prosta prostopadła do $y = 3x - 2$?

$-\frac{1}{3}$.

- 3 Jaki jest środek i promień okręgu $(x + 2)^2 + y^2 = 16$?

Środek $(-2; 0)$, promień 4.

- 4 Co jest stałe dla punktów elipsy, a co dla punktów hiperboli?

Dla elipsy suma odległości od ognisk, dla hiperboli wartość bezwzględna ich różnicy.

- 5 Gdzie trzeba umieścić żarówkę w reflektorze o kształcie paraboli, żeby dał równoległą wiązkę?

W ognisku.

- 6 Jaki mimośród ma okrąg, a jaki parabola?

0 i 1.

- 7 Jak w biegunowych wygląda równanie okręgu o promieniu 2 i środku w początku układu?

$r = 2$.

PUNKTY, PROSTE, OKRĘGI

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; S = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$y = mx + n, m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; Ax + By + C = 0$$

$$\text{równoległe: } m_1 = m_2; \text{ prostopadłe: } m_1 m_2 = -1$$

odległość punktu od prostej:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{okrąg: } (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$$

prosta styczna do okręgu: odległość od środka = r

STOŻKOWE I BIEGUNOWE

$$\text{elipsa: } r_1 + r_2 = 2a, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{hiperbola: } |r_1 - r_2| = 2a, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b^2 = c^2 - a^2, \text{ asymptoty } y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$\text{parabola: } |PF| = \text{odległość od kierownicy, } y = \frac{x^2}{4f}$$

$$\text{mimośród } e = \frac{c}{a}: \text{okrąg } 0, \text{ elipsa } < 1, \text{ parabola } 1, \text{ hiperbola } > 1$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta; r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \text{atan2}(y, x)$$

$$\text{orbita: } r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, p = a(1 - e^2); q = a(1 - e), Q = a(1 + e)$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 7-1 i 7-2 (ruch planet i prawa Keplera, elipsa jako orbita).
- **Dla chętnych:** 26-4 (zwierciadła eliptyczne i paraboliczne z zasady najkrótszego czasu); 7-5 (orbita Syriusza B i nachylona elipsa).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*:** geometria analityczna (proste, okrąg, stożkowe, współrzędne biegunowe). Dużo zadań z odpowiedziami.
- Dowolny podręcznik do matematyki w szkole średniej na poziomie rozszerzonym: rozdział o geometrii analitycznej.

Następna lekcja to jednostki, analiza wymiarowa i niepewność pomiaru (0.5 Jednostki, analiza wymiarowa, szacowanie i niepewność pomiaru). Geometrię analityczną rozwiną wektory (1.1 Wektory): prosta i płaszczyzna w trzech wymiarach, odległość jako długość wektora. Współrzędne biegunowe wrócą jako postać liczby zespolonej (1.7 Liczby zespolone i fazy), a równanie orbity w fizyce (Dział 5: Grawitacja i orbity).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $S = (1; 5)$.
2. $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ km.
3. Wszystkie boki mają długość 4: 4, $\sqrt{4 + 12}$, $\sqrt{4 + 12}$.

Zadania • część 2

1. $m = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$; $\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53,13^\circ$.
2. $y = -0,4x + 2$; osie w punktach $(0; 2)$ i $(5; 0)$.
3. Trzecia to $y = 2x + 3,5$: równoległa do pierwszej. Druga jest prostopadła do obu, bo $2 \cdot (-0,5) = -1$.
4. Środek $(1; 5)$, $m = -\frac{3}{4}$; $y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$.
5. $\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$. Najbliższy punkt prostej to $(2; 2)$, a jego odległość od początku to $\sqrt{8} \checkmark$.
6. Przecięcie: $x^* = \frac{x_0 + my_0}{1 + m^2}$, $y^* = mx^*$. Kwadrat odległości upraszcza się do $\frac{(y_0 - mx_0)^2}{1 + m^2}$, czyli $d = \frac{|mx_0 - y_0|}{\sqrt{1 + m^2}}$. To wzór ogólny dla $A = m$, $B = -1$, $C = 0 \checkmark$.

Zadania • część 3

1. $r = \sqrt{9 + 16} = 5$: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
2. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$: środek $(-4; 1)$, $r = 3$.
3. Odległość od środka: $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71 < 2$, więc w dwóch punktach. Rachunkiem: $2x^2 + 2x - 3 = 0$, $\Delta = 28 > 0$.
4. $\frac{5}{\sqrt{1 + m^2}} = 3$, czyli $1 + m^2 = \frac{25}{9}$, $m = \pm \frac{4}{3}$.
5. W obu równaniach wyrazy $x^2 + y^2$ mają współczynnik 1, więc po odjęciu znikają i zostaje równanie liniowe, czyli prosta. Oba punkty przecięcia spełniają obydwa równania, więc spełniają też ich różnicę: leżą na tej prostej.

Zadania • część 4

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $e = 0,8$, ogniska $(\pm 4; 0)$.
2. $6 = \frac{900}{4f}$, $f = 37,5$ cm. Odbiornik jest poza czasem, bo jest płytka.
3. $a = 17,94$ AU, $e = \frac{35,3 - 0,575}{35,3 + 0,575} \approx 0,968$, $T \approx 17,94^{1,5} \approx 76$ lat. Ostatnie przejście przez peryhelium było w 1986 r.
4. $\frac{b}{a} = \cos 60^\circ = 0,5$, $e = \sqrt{1 - 0,25} \approx 0,87$. Druga gwiazda jest w środku okręgu, więc na niebie w środku elipsy, a nie w ognisku. Feynman opisuje podobny efekt dla Syriusza: widoczna orbita Syriusza B

wokół Syriusza A to elipsa, ale Syriusz A nie leży w jej ognisku, bo płaszczyzna orbity jest nachylona do nieba. Tam prawdziwa orbita też jest elipsą, nie okręgiem. (FLP I-7-5)

5. Różnica odległości $3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 30 \text{ km} = 2a$, więc $a = 15 \text{ km}$, $c = 100 \text{ km}$, $b = \sqrt{10\,000 - 225} \approx 98,9 \text{ km}$. Statek leży na gałęzi bliższej tej stacji, której sygnał przyszedł wcześniej.

6. Po pierwszym kwadracie: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Po drugim: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Dzielimy przez a^2b^2 z $b^2 = a^2 - c^2$ i dostajemy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Każda droga z F_1 przez punkt zwierciadła do F_2 ma długość $r_1 + r_2 = 2a$, taką samą dla każdego punktu elipsy. Przy stałej prędkości fali czasy są więc równe i fala zbiera się w F_2 naraz. To ten sam argument, którego Feynman używa dla zwierciadła eliptycznego w optyce. (FLP I-26-4)

Zadania · część 5

1. $r = 2$, $\theta = 120^\circ$. $(4 \cos(-150^\circ); 4 \sin(-150^\circ)) = (-2\sqrt{3}; -2) \approx (-3,46; -2)$.

2. Okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu; półprosta z początku układu pod kątem 45° .

3. $r^2 = 2r \cos \theta$, czyli $r = 2 \cos \theta$. W kartezjańskich $(x-1)^2 + y^2 = 1$: środek $(1; 0)$, promień 1.

4. $e = 1$, więc parabola. Ognisko w początku układu, wierzchołek przy $\theta = 0$, $r = 2$, czyli w punkcie $(2; 0)$. Parabola jest otwarta w stronę ujemnych x .

5. $q = \frac{1,2}{1,6} = 0,75 \text{ AU}$, $Q = \frac{1,2}{0,4} = 3 \text{ AU}$, $a = 1,875 \text{ AU}$. Sprawdzenie: $a(1 - e^2) = 1,875 \cdot 0,64 = 1,2 \checkmark$.

6. Potrzeba $1 + 2 \cos \theta > 0$, czyli $\cos \theta > -\frac{1}{2}$: $\theta \in (-120^\circ; 120^\circ)$. Gdy $\theta \rightarrow \pm 120^\circ$, mianownik dąży do zera i $r \rightarrow \infty$. Przy ruchu w stronę rosnących θ ciało nadlatuje z daleka od strony $\theta = -120^\circ$, czyli porusza się w kierunku $-120^\circ + 180^\circ = 60^\circ$, a odlatuje w kierunku $+120^\circ$. Te kierunki są równoległe do asymptot. Tor odchylił się o $120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ (ogólnie o $2\theta_\infty - 180^\circ$, gdzie $\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}$).

7. $e = 0$: $r = p$ dla każdego kąta, okrąg. Dla $0 < e < 1$: $\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = 2a \checkmark$. Środek elipsy leży w połowie między peryhelium i aphelium, więc ognisko jest od niego odległe o $c = a - q = a - \frac{p}{1+e} = a - a(1-e) = ae \checkmark$.

Matematyka · Geometria analityczna i krzywe stożkowe. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 7-2, 7-5 i 26-4; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Dane orbitalne: NASA Earth Fact Sheet, JPL Small-Body Database (1P/Halley). Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.