

Trygonometria i funkcje hiperboliczne

Jak zmierzyć wysokość satelity, którego nie da się dosięgnąć żadną miarką? Albo odległość do gwiazdy? Wystarczą dwa kąty i znana odległość między obserwatorami. Ta lekcja zbiera trygonometrię potrzebną w fizyce: radiany, okrąg jednostkowy, kilka tożsamości, funkcje odwrotne i ich pułapki. Na końcu pokazuje kuzynów sinusa i cosinusa, funkcje hiperboliczne. Opisują wiszący łańcuch i ciało spadające w powietrzu.

CZAS

ok. 3 h teorii + 2,5 h zadań

ZADANIA

26 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, 5-6 (pomiar dużych odległości); K. A. Stroud, *Engineering Mathematics* (część wprowadzająca)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: dwa kąty i jedna odległość
- 1 Kąty i radiany
- 2 Sinus, cosinus, tangens
- 3 Tożsamości trygonometryczne
- 4 Funkcje cyklometryczne
- 5 Funkcje hiperboliczne
- 6 Błędne intuicje
- 7 Sprawdź się
- 8 Karta wzorów i co dalej

Prolog: dwa kąty i jedna odległość

Feynman pisze, że odległości mierzymy zwykle przez odliczanie jednostek: bierzemy miarkę i liczymy, ile razy się mieści. Ale odległości między szczytami gór nie zmierzy się miarką. Używa się wtedy **triangulacji**: z dwóch punktów o znanej odległości mierzy się kąty, pod jakimi widać obiekt, a resztę trójkąta wylicza się. Feynman zwraca uwagę, że to w gruncie rzeczy inna definicja odległości. Ufamy jej, bo tam, gdzie można użyć obu metod, dają ten sam wynik. Tak zmierzono wysokość pierwszego Sputnika, odległość do Księżyca i odległości do najbliższych gwiazd.

FLP I-5-6

W przypadku gwiazd baza triangulacji to średnica orbity Ziemi, a kąty są maleńkie, ułamki sekundy kątowej. Do takich kątów potrzebne są radiany i przybliżenie $\tan \alpha \approx \alpha$. Do satelity wystarczy zwykły tangens. Obie rzeczy zrobimy w tej lekcji.

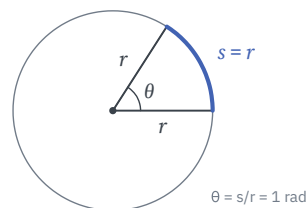
Pytanie na start. Dwie stacje odległe o 200 km widzą przelatującego między nimi satelitę pod kątami 70° i 75° nad horyzontem. Na jakiej wysokości leci? Odpowiedź w przykładzie 2.1.

1

Kąty i radiany

Kąt można mierzyć w stopniach, ale w fizyce i w analizie mierzy się go w **radianach**. Miara łukowa kąta to stosunek długości łuku s do promienia r , na którym ten łuk leży:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ rad}, \quad s = r\theta.$$



Pełny kąt to obwód podzielony przez promień, $2\pi r/r = 2\pi \text{ rad}$, więc $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, a $1 \text{ rad} \approx 57,30^\circ$. Radian jest stosunkiem dwóch długości, więc formalnie nie ma wymiaru. Słowo „rad” zapisujemy tylko dla jasności.

Dlaczego radiany, a nie stopnie? Z trzech powodów, które poznasz po kolei w tym kursie:

- Wzory na ruch po okręgu są proste: droga $s = r\theta$, prędkość $v = r\omega$, gdzie ω to prędkość kątowa w rad/s.
- Dla małych kątów $\sin \theta \approx \theta$ i $\tan \theta \approx \theta$, ale *tylko w radianach*. Dla $\theta = 0,05 \text{ rad}$: $\sin \theta = 0,049979$, błąd bezwzględny ok. $2 \cdot 10^{-5}$ (0,04%). Następny wyraz przybliżenia to $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$; skąd się bierze, zobaczysz przy szeregu Taylora (lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce).
- Pochodna sinusa to cosinus, również tylko w radianach (lekcja 1.3 Pochodne).

Przykład 1.1

Paralaksa: jak daleko jest najbliższa gwiazda

Gdy Ziemia przesuwa się po orbicie, Proxima Centauri przesuwa się na tle dalekich gwiazd. Kąt, pod jakim z gwiazdy widać promień orbity Ziemi ($1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$), to **paralaksa**, $p = 0,768''$. W ciągu pół roku gwiazda przesuwa się na niebie o kąt $2p$, bo baza to średnica orbity; paralaksą nazywamy połowę tego kąta. Oblicz odległość do gwiazdy.

- 1 Sekunda kątowna to $\frac{1}{3600}$ stopnia: $1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \text{ rad} \approx 4,848 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$. Stąd $p \approx 3,723 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.
- 2 Z trójkąta prostokątnego: $\tan p = \frac{1 \text{ AU}}{d}$. Kąt jest malutki, więc $\tan p \approx p$ i $d \approx \frac{1 \text{ AU}}{p}$.
- 3 $d \approx \frac{1,496 \cdot 10^{11}}{3,723 \cdot 10^{-6}} \approx 4,02 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

Wynik: $d \approx 4,0 \cdot 10^{16} \text{ m}$, czyli ok. 4,25 roku świetlnego (lekcja 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne: rok świetlny to $9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$).

Sprawdzenie: przybliżenie $\tan p \approx p$ ma błąd względny ok. $p^2/3 \approx 5 \cdot 10^{-12}$, więc jest dokładniejsze niż sam pomiar ✓. Astronomowie definiują **parsek** jako odległość, z której 1 AU widać pod kątem $1''$: $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ AU} \approx 3,26$ roku świetlnego. Proxima jest więc w odległości $1/0,768 \approx 1,30 \text{ pc}$ ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 20 min

- 1 Zamień na radiany: 30° , 135° , 270° . Zamień na stopnie: 1 rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad.
- 2 Koło roweru o promieniu 0,35 m obróciło się o 3 rad bez poślizgu. Jaką drogę przejechał rower?
- 3 Policz $\sin 0,05$ kalkulatorem w trybie radianów i porównaj z 0,05. Pokaż, że różnica jest bliska $\theta^3/6$. Co wyjdzie, jeśli kalkulator jest w trybie stopni?
- 4 Pokaż, że parsek to ok. 206 265 AU, a potem przelicz go na lata świetlne ($1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, rok świetlny $9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$).

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2.1 Od trójkąta do okręgu jednostkowego

W trójkącie prostokątnym z kątem ostrym α : $\sin \alpha$ to przyprostokątna naprzeciw kąta podzielona przez przeciwprostokątną, $\cos \alpha$ to przyprostokątna przy kącie przez przeciwprostokątną, a $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Ta definicja działa tylko dla kątów od 0 do 90° . Fizyka potrzebuje dowolnych kątów, także ujemnych i większych od pełnego obrotu: koło obraca się wiele razy, wahadło wychyla się w obie strony.

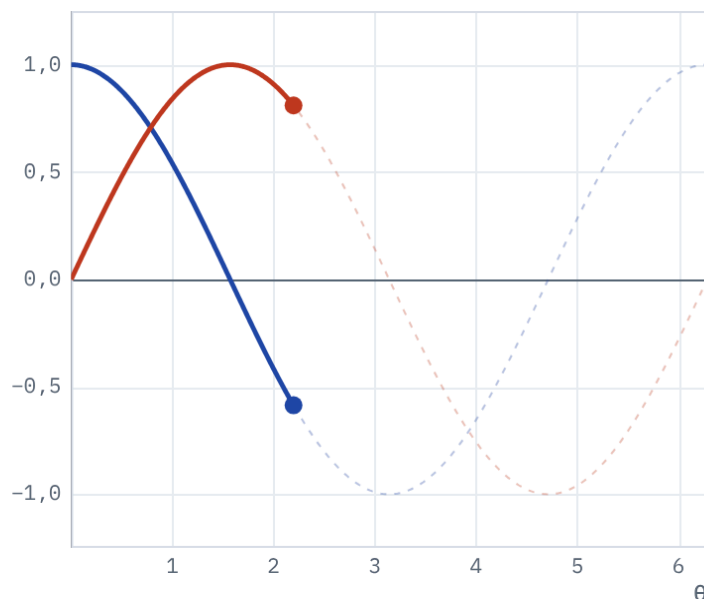
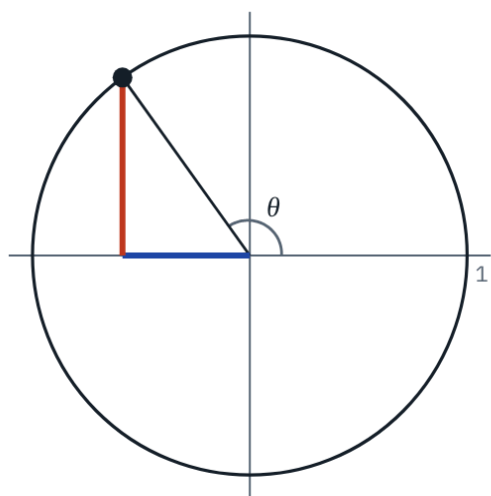
Dlatego definiujemy funkcje trygonometryczne na **okręgu jednostkowym**. Punkt na okręgu o promieniu 1, obrócony o kąt θ od dodatniej półosi x (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), ma współrzędne

$$(\cos \theta; \sin \theta), \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0).$$

Dla kątów ostrych to ta sama definicja co w trójkącie, a dla pozostałych daje znaki zgodne z ćwiartką układu współrzędnych. Od razu widać też okresowość: obrót o 2π wraca do tego samego punktu, więc $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ i tak samo dla cosinusa. Tangens ma okres π : obrót o π zmienia znak obu współrzędnych, a ich iloraz się nie zmienia. Kąt ujemny oznacza obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

W polskich podręcznikach i na maturze spotkasz zapis tg , ctg i arctg . W tym kursie piszemy międzynarodowo: $\tan$, $\cot$, $\arctan$, tak jak w kalkulatorach, w Pythonie i w C++.

SYMULACJA 1 Okrąg jednostkowy. Punkt obrócony o kąt θ ma współrzędne $(\cos \theta; \sin \theta)$. Na drugim wykresie rysują się sinus i cosinus dla kątów od 0 do θ . Obróć punkt o więcej niż pełny kąt i zobacz okresowość.



— $\cos \theta$ — $\sin \theta$

$\cos \theta$ -0,586

$\sin \theta$ 0,810

$\tan \theta$ -1,383

ćwiartka II

kąt sprowadzony do $[0; 2\pi)$ 2,20 rad

Stan na rysunku: $\theta = 2,20$ rad; $\cos \theta = -0,586$, $\sin \theta = 0,810$.

2.2 Wartości, które warto znać

θ	0	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Wartości dla innych ćwiartek odczytuje się z symetrii okręgu, np. $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (odbicie względem osi y) i $\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (symetria względem środka okręgu).

2.3 Drgania: $A \cos(\omega t + \varphi)$

Ruch, w którym położenie zmienia się jak cosinus czasu, to **drżanie harmoniczne**: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. To wykres cosinusa przekształcony tak, jak w lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i

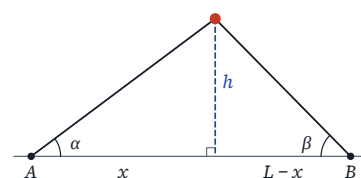
funkcje elementarne przekształcaliśmy wykresy funkcji (rozciągnięcia i przesunięcia). A to **amplituda** (rozciągnięcie w pionie), ω to **częstość kołowa** w rad/s (ściśnięcie w poziomie), a φ to **faza początkowa** (przesunięcie). Okres to $T = 2\pi/\omega$, bo po takim czasie argument cosinusa rośnie o 2π . Tak drga ciężarek na sprężynie, wahadło przy małych wychyleniach i napięcie w gniazdku. Feynman poświęca drganiom kilka rozdziałów, a my wrócimy do nich w fizyce (Dział 6: Drgania, rezonans i układy liniowe).

Przykład 2.1

Wysokość satelity z dwóch kątów

Dwie stacje A i B są odległe o $L = 200$ km. Satelita jest między nimi; z A widać go pod kątem $\alpha = 70^\circ$ nad horyzontem, z B pod kątem $\beta = 75^\circ$. Na jakiej wysokości leci? Krzywiznę Ziemi pomijamy.

- Niech punkt pod satelitą leży w odległości x od A. Z dwóch trójkątów prostokątnych: $\tan \alpha = \frac{h}{x}$ i $\tan \beta = \frac{h}{L-x}$.
- Stąd $x = h \cot \alpha$ i $L - x = h \cot \beta$, gdzie $\cot = 1/\tan$. Dodajemy: $L = h(\cot \alpha + \cot \beta)$.
- $h = \frac{L}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{200}{0,3640 + 0,2679} \approx 316,5$ km.



Triangulacja: wysokość h z bazy L i dwóch kątów

Wynik: ok. 316 km nad Ziemią.

Sprawdzenie: $x = h \cot \alpha \approx 115,2$ km i $L - x \approx 84,8$ km, więc punkt pod satelitą jest bliżej B, z której widać go wyżej nad horyzontem ($75^\circ > 70^\circ$) ✓. Czy wolno pominąć krzywiznę Ziemi? Niezupełnie: poziomy (horyzonty) w A i B są nachylone względem siebie o kąt $L/R_Z \approx 200/6371 \approx 0,031$ rad $\approx 1,8^\circ$, a to zmienia mierzone kąty. Rachunek na kuli daje $h \approx 334$ km, o ok. 5% więcej. Model płaski to dobre pierwsze przybliżenie, ale przy bazie rzędu setek kilometrów trzeba uwzględnić kulistość Ziemi.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 35 min

- Bez kalkulatora: $\sin 210^\circ$, $\cos(-\frac{\pi}{3})$, $\tan 135^\circ$, $\cos \pi$.

- Rozwiąż $\sin x = \frac{1}{2}$ dla $x \in [0; 2\pi]$.

3 Rampa ma długość 4 m i jest nachylona pod kątem 12° do poziomu. Na jaką wysokość prowadzi i ile miejsca zajmuje w poziomie?

4 Położenie ciężarka to $x(t) = 3 \cos(4t + \frac{\pi}{3})$ (cm, s). Podaj amplitudę, częstość kołową, okres i położenie w chwili $t = 0$.

5 Powtórz przykład 2.1 dla bazy 100 km i kątów 50° oraz 60° .

6 Wyjaśnij, dlaczego w przykładzie 2.1 mała niepewność kątów daje dużą niepewność wysokości, gdy oba kąty są bliskie 90° . Co to mówi o wyborze bazy pomiarowej?

■□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

3 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamość to równość prawdziwa dla wszystkich argumentów, dla których obie strony mają sens. Z setek wzorów w tablicach warto pamiętać kilka, z których resztę się wyprowadza:

🔑 NAJWAŻNIEJSZE TOŻSAMOŚCI

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$\text{Stąd m.in. } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ i } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta.$$

Pierwsza to twierdzenie Pitagorasa dla punktu na okręgu jednostkowym. Wzory na sinus i cosinus sumy opisują obroty: obrót o α , a potem o β to obrót o $\alpha + \beta$, a wzory mówią, jak zmieniają się współrzędne punktu $(\cos \beta; \sin \beta)$ przy obrocie o α . Udowodnimy je elegancko macierzami obrotu (lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza) i jeszcze prościej liczbami zespolonymi (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory).

Dla dowolnego trójkąta o bokach a, b, c i kącie γ naprzeciw boku c obowiązuje **twierdzenie cosinusów**, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Dla $\gamma = 90^\circ$ to twierdzenie Pitagorasa. W lekcji 1.1 Wektory wyprowadzimy je jednym ruchem z iloczynu skalarnego wektorów.

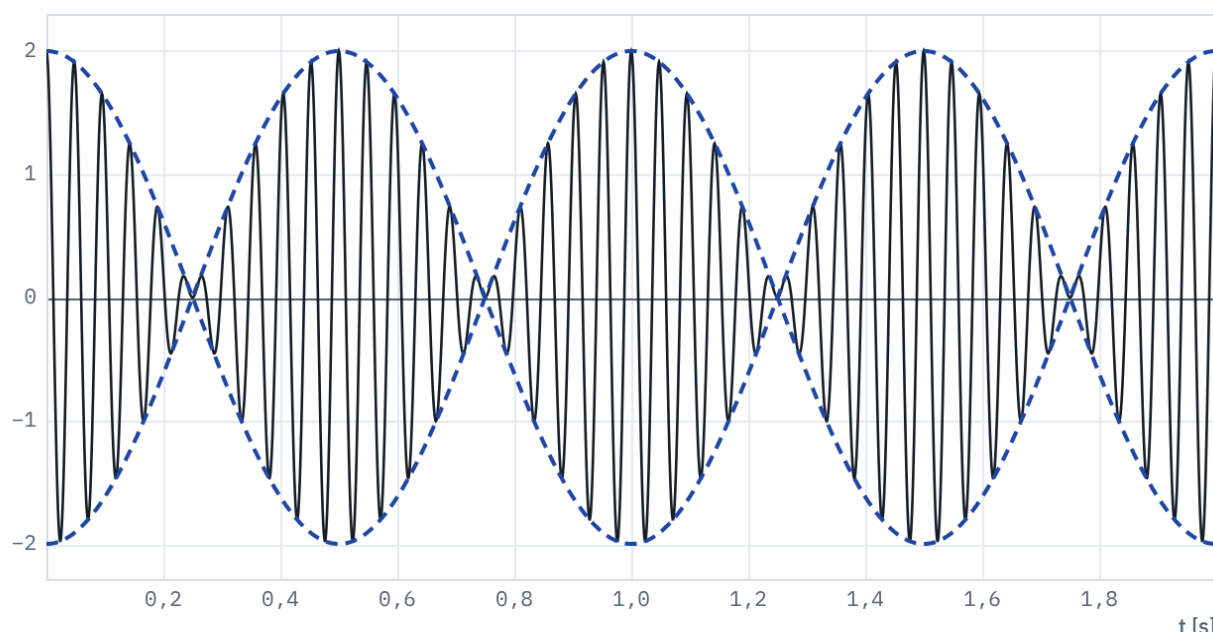
3.1 Dudnienia: suma dwóch drgań

Z wzorów na cosinus sumy i różnicy wynika **wzór na sumę cosinusów**:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Dwa kamertony o częstościach 440 Hz i 444 Hz grają razem. Podstawiamy $a = 2\pi f_1 t$ i $b = 2\pi f_2 t$. Suma to drganie o średniej częstości $\frac{f_1+f_2}{2} = 442$ Hz pomnożone przez wolno zmienny czynnik $2 \cos(\pi(f_1 - f_2)t)$, czyli cosinus o częstości 2 Hz. Głośność zależy od wartości bezwzględnej tego czynnika, a ta ma dwa maksima w każdym jego okresie. Głośność rośnie więc i maleje $f_1 - f_2 = 4$ razy na sekundę: to **dudnienia**. Tak stroi się instrumenty: gdy dudnienia znikną, częstości są równe.

SYMULACJA 2 Suma dwóch cosinusów o jednakowych amplitudach 1 i częstościach f_1 i f_2 (ciągła linia) i obwiednia $\pm 2 \cos(\pi(f_1 - f_2)t)$ (przerywana). Zbliżaj częstości do siebie: dudnienia stają się coraz wolniejsze i znikają przy $f_1 = f_2$.



— $\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$ - - - obwiednia

średnia częstość 21,00 Hz

dudnienia na sekundę $|f_1 - f_2|$ 2,0

odstęp między maksimami głośności 0,50 s

Stan na rysunku: $f_1 = 20,0$ Hz, $f_2 = 22,0$ Hz; dudnienia 2,0 na sekundę.

Przykład 3.1

Pod jakim kątem rzucić najdalej?

Kamień rzucono z prędkością v_0 pod kątem θ do poziomu, z ziemi na ziemię, bez oporu powietrza.

Zasięg rzutu to $R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ (zob. Dział 1: Ruch i jego przyczyny). Dla jakiego kąta zasięg jest największy? Policz go dla $v_0 = 20$ m/s.

- 1 Ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, więc $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$.
- 2 Sinus jest największy (równy 1) dla $2\theta = 90^\circ$, czyli $\theta = 45^\circ$.
- 3 $R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400}{9,81} \approx 40,8$ m.

Wynik: $\theta = 45^\circ$, $R_{\max} \approx 40,8$ m.

Sprawdzenie: $\sin 2\theta$ ma tę samą wartość dla θ i $90^\circ - \theta$, więc rzuty pod kątem 30° i 60° mają ten sam zasięg, $400 \sin 60^\circ / 9,81 \approx 35,3$ m ✓. Jednostki: $(\text{m/s})^2 / (\text{m/s}^2) = \text{m}$ ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Wiedząc, że $\sin \theta = \frac{3}{5}$ i θ jest kątem ostrym, podaj $\cos \theta$ i $\tan \theta$.
■ ■ ■
- 2 Pokaż, że $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$.
■ ■ ■
- 3 Oblicz dokładnie $\cos 75^\circ$ ze wzoru na cosinus sumy ($75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$).
■ ■ ■
- 4 Trójkąt ma boki 5 i 7, a kąt między nimi 60° . Oblicz trzeci bok.
■ ■ ■
- 5 Struna gitary i kamerton 440 Hz dają 3 dudnienia na sekundę. Jaka może być częstota struny? Jak sprawdzić, która możliwość jest prawdziwa?
■ ■ ■
- 6 Wyprowadź wzór na sumę cosinusów z części 3.1. Wskazówka: zapisz $a = u + v$, $b = u - v$.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Funkcje cyklometryczne

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych odpowiadają na pytanie: „jaki to kąt?”. Nazywamy je **funkcjami cyklometrycznymi**. Sinus nie jest różnowartościowy, bo wiele kątów ma ten sam sinus, więc jak przy x^2 w lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne ograniczamy dziedzinę do przedziału, na którym funkcja jest monotoniczna i przyjmuje wszystkie swoje wartości:

FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE (WARTOŚCI GŁÓWNE)

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos x \in [0; \pi]$ dla $x \in [-1; 1]$, $\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$

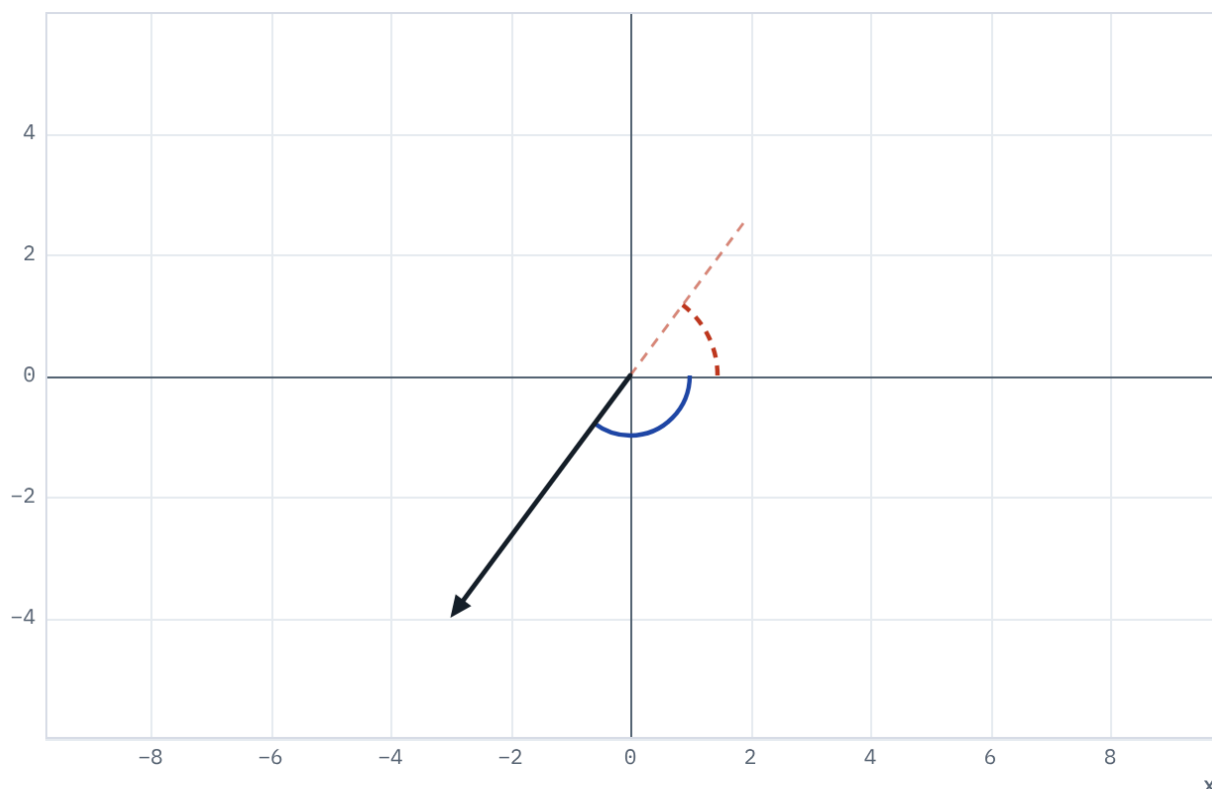
$\sin(\arcsin x) = x$ zawsze, ale $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ tylko dla $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Kalkulator i komputer zwracają zawsze wartość główną. Drugie rozwiązanie trzeba dopisać samemu z symetrii okręgu: jeśli $\sin \theta = s$, to również $\sin(\pi - \theta) = s$ (odbicie względem osi y). Jeśli $\cos \theta = c$, to również $\cos(-\theta) = c$ (odbicie względem osi x), więc w przedziale $[0; 2\pi]$ drugim rozwiązaniem jest $2\pi - \theta$.

4.1 Kąt wektora i funkcja atan2

Kierunek wektora $[x; y]$ to kąt θ , dla którego $\tan \theta = y/x$. Ale $\arctan(y/x)$ nie odróżnia wektora $[3; 4]$ od $[-3; -4]$, bo oba mają ten sam iloraz y/x , a wskazują przeciwne kierunki. Dlatego języki programowania mają funkcję dwóch argumentów $\text{atan2}(y, x)$ (w Pythonie `math.atan2`, w C++ `std::atan2`). Patrzy ona na znaki obu współrzędnych i zwraca kąt z przedziału $(-\pi; \pi]$ we właściwej ćwiartce. Kolejność argumentów to najpierw y , potem x .

SYMULACJA 3 Kąt wektora $[x; y]$ z $\arctan(y/x)$ i z $\operatorname{atan2}(y, x)$. W I i IV ćwiartce oba wyniki są równe, w II i III $\arctan$ myli się o 180° .



— $\operatorname{atan2}(y, x)$ - - $\arctan(y/x)$

$\arctan(y/x)$ $53,13^\circ$

$\operatorname{atan2}(y, x)$ $-126,87^\circ$

ćwiartka III

$\arctan$ się zgadza? nie, różnica 180°

Stan na rysunku: $x = -3,0$, $y = -4,0$; $\arctan(y/x) = 53,13^\circ$, $\operatorname{atan2}(y, x) = -126,87^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 25 min

- Bez kalkulatora: $\arcsin \frac{1}{2}$, $\arccos(-\frac{1}{2})$, $\arctan \sqrt{3}$, $\arctan(-1)$.
- Znak drogowy „8%” oznacza, że droga wznosi się o 8 m na 100 m w poziomie. Jaki to kąt?
- Ile wynosi $\arcsin(\sin 3)$ (kąt w radianach)? Dlaczego nie 3?
- Podaj kąt wektora $[-3; -4]$: najpierw z $\arctan(y/x)$, potem poprawnie.
- Rozwiąż $\cos x = 0,3$ dla $x \in [0; 2\pi]$. Ile jest rozwiązań w przedziale $[0; 10\pi]$?

5 Funkcje hiperboliczne

5.1 Definicja i nazwa

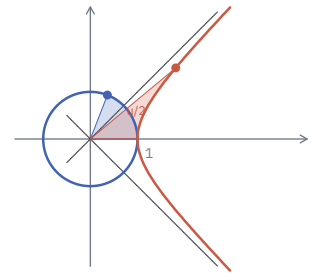
Z funkcji wykładniczej buduje się trzy funkcje, które zachowują się jak „krewni” sinusa i cosinusa:

🔑 FUNKCJE HIPERBOLICZNE

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Tożsamość wynika wprost z definicji: $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$. Porównaj ją z $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Punkty $(\cos t; \sin t)$ leżą na okręgu $x^2 + y^2 = 1$, a punkty $(\cosh u; \sinh u)$ na gałęzi hiperboli $x^2 - y^2 = 1$. Stąd nazwa. Analogia sięga dalej: na okręgu parametr t to podwojone pole wycinka koła od osi x do punktu, a na hiperboli parametr u to podwojone pole „wycinka hiperbolicznego”. Pokazuje to symulacja 4.



Własności czyta się z definicji. $\cosh$ jest parzysty, ma minimum 1 w zerze i dla dużych $|x|$ rośnie jak $\frac{1}{2}e^{|x|}$. $\sinh$ jest nieparzysty. $\tanh$ rośnie od -1 do 1 i nigdy tych wartości nie osiąga. Funkcje odwrotne zapisujemy arsinh , arcosh , artanh ; da się je wyrazić logarytmem, np. $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ dla $|x| < 1$.

SYMULACJA 4 Okrąg i hiperbola. Punkt $(\cos t; \sin t)$ i punkt $(\cosh u; \sinh u)$, gdzie parametr jest w obu przypadkach podwojonym polem zaciętego wycinka. Zwiększaj parametr: punkt na okręgu porusza się równomiernie, a punkt na hiperboli ucieka coraz szybciej, bo $\cosh$ i $\sinh$ rosną wykładniczo.



Stan na rysunku: $u = 1,00$; $\cosh u = 1,543$, $\sinh u = 1,175$, $\tanh u = 0,762$.

5.2 Gdzie spotkasz funkcje hiperboliczne

- **Krzywa łańcuchowa.** Łańcuch lub lina wisząca swobodnie między dwoma punktami ma kształt $y = a \cosh(x/a)$, a nie paraboli. Liny wysokiego napięcia i łuki o kształcie odwróconej krzywej łańcuchowej (pracują tylko na ściskanie) to klasyczne zastosowania. Wyprowadzimy to w rachunku wariacyjnym (lekcja 6.1 Rachunek wariacyjny).
- **Spadek z oporem powietrza.** Ciało spadające z oporem proporcjonalnym do kwadratu prędkości ma, jeśli startuje z prędkości zerowej, $v(t) = v_\infty \tanh(gt/v_\infty)$. Tu $v_\infty = \sqrt{mg/k}$ to prędkość graniczna, a kv^2 to siła oporu. To rozwiązanie równania różniczkowego z lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne.
- **Teoria względności.** Transformacja Lorentza to „obrót hiperboliczny”, w którym rolę kąta gra tzw. pospieszność (ang. *rapidity*) (lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza).

Przykład 5.1

Skoczek spadochronowy przed otwarciem spadochronu

Prędkość graniczna skoczka w swobodnym spadku to $v_\infty = 50$ m/s. Skoczek zaczyna spadać z pionową prędkością zerową; jego prędkość to $v(t) = v_\infty \tanh(gt/v_\infty)$ z $g = 9,81$ m/s². Jaka jest prędkość po 3 s? Po jakim czasie skoczek osiągnie 90% prędkości granicznej?

- 1 $v(3) = 50 \tanh\left(\frac{9,81 \cdot 3}{50}\right) = 50 \tanh 0,5886 \approx 50 \cdot 0,5289 \approx 26,4$ m/s.
- 2 Warunek $\tanh(gt/v_\infty) = 0,9$ odwracamy funkcją artanh : $\frac{gt}{v_\infty} = \operatorname{artanh} 0,9 = \frac{1}{2} \ln 19 \approx 1,472$.
- 3 $t = 1,472 \cdot \frac{50}{9,81} \approx 7,5$ s.

Wynik: po 3 s ok. 26 m/s; 90% prędkości granicznej po ok. 7,5 s.

Sprawdzenie: bez oporu po 3 s byłoby $gt = 29,4$ m/s; opór zmniejsza prędkość, więc 26,4 m/s jest rozsądne ✓. Dla małych t mamy $\tanh z \approx z$ (bo $e^{\pm z} \approx 1 \pm z$ dla małych z), więc $v \approx gt$: na początku skoczek spada prawie swobodnie ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Oblicz $\cosh 0$, $\sinh 0$, $\tanh 0$ oraz $\sinh(\ln 2)$ i $\cosh(\ln 2)$. Sprawdź tożsamość $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ dla $x = \ln 2$.
■ ■ ■
- 2 Do czego dąży $\tanh x$ dla $x \rightarrow \infty$ i dla $x \rightarrow -\infty$? Uzasadnij z definicji.
■ ■ ■
- 3 Pokaż, że $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$. Porównaj z wzorem na $\sin 2x$.
■ ■ ■
- 4 Lina wisi między dwoma słupami odległymi o 20 m i ma kształt $y = a \cosh(x/a)$ z $x \in [-10; 10]$ m. Ile wynosi zwis (różnica wysokości między końcem a najniższym punktem) dla $a = 10$ m i dla $a = 20$ m?
■ ■ ■
- 5 Dla skoczka z przykładu 5.1 oblicz, po jakim czasie osiągnie 99% prędkości granicznej. Porównaj z czasem dla 90% i wyjaśnij, dlaczego „ostatnie procenty” trwają tak długo.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Błędne intuicje

- × „ $\sin \theta \approx \theta$ dla małych kątów” (w stopniach).

Tylko w radianach. $\sin 5^\circ = 0,0872$, a nie 5. W radianach $5^\circ = 0,0873$ i przybliżenie działa.

- × „ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$.”

Sinus nie jest liniowy. Dla $\alpha = \beta = 90^\circ$: $\sin 180^\circ = 0$, a $1 + 1 = 2$.

- × „ $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$.”

Na kalkulatorach $\sin^{-1}$ oznacza arcsin, funkcję odwrotną. Odwrotność $1/\sin x$ ma nazwę cosecans. Dlatego piszemy arcsin, a nie $\sin^{-1}$.

- × „Kalkulator podał arcsin, więc to jedyne rozwiązanie.”

To wartość główna. Równanie $\sin x = s$ ma na każdym pełnym obrocie dwa rozwiązania: θ i $\pi - \theta$ (część 4).

- × „Kąt wektora to $\arctan(y/x)$.”

Tylko dla $x > 0$. W II i III ćwiartce wynik jest o 180° za mały lub za duży. Używaj $\text{atan2}(y, x)$ (część 4.1).

- × „Wisząca lina ma kształt paraboli.”

Ma kształt krzywej łańcuchowej $a \cosh(x/a)$. Parabola to dobre przybliżenie tylko przy małym zwisie, bo dla małych z mamy $\cosh z \approx 1 + z^2/2$. Parabola jest za to lina mostu wiszącego, gdy obciążenie jest rozłożone równomiernie wzdłuż poziomu.

Sprawdź się

- 1 Ile radianów ma kąt prosty? A pełny obrót?

$\frac{\pi}{2}$ i 2π .

- 2 Jaki znak ma cosinus kąta 200° ?

Ujemny: 200° leży w III ćwiartce, gdzie obie współrzędne punktu na okręgu są ujemne.

- 3 Jaki jest okres drgania $x = 2 \sin(5t)$ (t w sekundach)?

$$T = 2\pi/5 \approx 1,26 \text{ s.}$$

- 4 Dwa dźwięki 300 Hz i 302 Hz. Ile dudnień na sekundę?

2.

- 5 Dlaczego $\arccos$ ma wartości w $[0; \pi]$, a $\arcsin$ w $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$?

Bo na tych przedziałach odpowiednio cosinus i sinus są monotoniczne i przyjmują wszystkie wartości z $[-1; 1]$ dokładnie raz.

- 6 Na jakiej krzywej leżą punkty $(\cosh u; \sinh u)$?

Na prawej gałęzi hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

- 7 Czemu jest równe $\cosh x + \sinh x$?

$$e^x.$$

TRYGONOMETRIA

$$\theta = s/r; 180^\circ = \pi \text{ rad}; 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$$

$$\text{małe kąty (rad): } \sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; x = A \cos(\omega t + \varphi), T = 2\pi/\omega$$

FUNKCJE ODWROTNE I HIPERBOLICZNE

$$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \arccos \in [0; \pi], \arctan \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$\sin x = s: x = \arcsin s \text{ lub } \pi - \arcsin s (+ \text{wielokrotności } 2\pi)$$

$$\cos x = c: x = \pm \arccos c (+ \text{wielokrotności } 2\pi)$$

$$\text{kąt wektora: } \text{atan2}(y, x)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\text{artanh } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{łańcuch: } y = a \cosh(x/a); \text{ spadek z}$$

$$\text{oporem: } v = v_\infty \tanh(gt/v_\infty)$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 5-6 (jak mierzy się duże odległości: triangulacja, paralaksa, coraz dalsze „szczeble” pomiaru).
- **Dla chętnych:** 22-6 (skąd biorą się sinus i cosinus, gdy podnosi się liczbę do potęgi urojonej). Wróćmy do tego w lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory.

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*:** część wprowadzająca (trygonometria, funkcje hiperboliczne). Dużo zadań z odpowiedziami.
- Dowolny podręcznik do matematyki w szkole średniej na poziomie rozszerzonym: rozdział o trygonometrii.

Następna lekcja to geometria analityczna i krzywe stożkowe (0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe): okrąg, elipsa i hiperbola z równania, a także współrzędne biegunowe, w których kąt z tej lekcji staje się jedną ze współrzędnych. Sinus i cosinus wrócą jako pochodne jeden drugiego (1.3 Pochodne), jako potęgi liczby e o wykładniku urojonym (1.7 Liczby zespolone i fazory) i w każdym drganiu w fizyce.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$; $\frac{3\pi}{4} \approx 2,356$; $\frac{3\pi}{2}$. $1 \text{ rad} \approx 57,30^\circ$; 150° .
2. $s = r\theta = 0,35 \cdot 3 = 1,05 \text{ m}$.
3. $\sin 0,05 = 0,049\,979\,2$, różnica $2,083 \cdot 10^{-5}$, a $0,05^3/6 = 2,083 \cdot 10^{-5} \checkmark$. W trybie stopni kalkulator policzy $\sin 0,05^\circ \approx 8,7 \cdot 10^{-4}$: to sinus innego kąta, 57 razy mniejszego. Wzory z przybliżeniem $\sin \theta \approx \theta$ wymagają radianów.
4. $1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{1'' \text{ w radianach}} = \frac{180 \cdot 3600}{\pi} \text{ AU} \approx 206\,265 \text{ AU} \approx 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} \approx 3,26 \text{ roku świetlnego}$.

Zadania • część 2

1. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ (cosinus jest parzysty); -1 ; -1 .
2. $x = \frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{5\pi}{6}$. Na okręgu dwa punkty mają rzędną $\frac{1}{2}$.
3. $h = 4 \sin 12^\circ \approx 0,83 \text{ m}$, w poziomie $4 \cos 12^\circ \approx 3,91 \text{ m}$.
4. $A = 3 \text{ cm}$, $\omega = 4 \text{ rad/s}$, $T = 2\pi/4 \approx 1,57 \text{ s}$, $x(0) = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 1,5 \text{ cm}$.
5. $h = \frac{100}{\cot 50^\circ + \cot 60^\circ} = \frac{100}{0,8391 + 0,5774} \approx 70,6 \text{ km}$.
6. Dla kątów bliskich 90° cotangensy są bliskie zera, a $h = L/(\cot \alpha + \cot \beta)$ dzieli przez ich małą sumę: niewielki błąd kąta zmienia sumę o dużą część jej wartości. Baza powinna być porównywalna z mierzoną odległością, żeby kąty były wyraźnie mniejsze od 90° . Dlatego do gwiazd bierze się największą dostępną bazę, czyli średnicę orbity Ziemi. Ilościowo zbadamy to w lekcji 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce (przenoszenie niepewności).

Zadania • część 3

1. $\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$. To trójkąt 3-4-5.
2. Podziel $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ przez $\cos^2 \theta$.
3. $\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588$.
4. $c^2 = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 39$, $c = \sqrt{39} \approx 6,24$.
5. 437 Hz albo 443 Hz. Trzeba lekko napiąć strunę (podnieść częstotliwość): jeśli dudnienia zwolnią, struna miała 437 Hz; jeśli przyspieszą, 443 Hz.
6. $\cos(u+v) + \cos(u-v) = (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + (\cos u \cos v + \sin u \sin v) = 2 \cos u \cos v$.
Podstawiamy $u = \frac{a+b}{2}$, $v = \frac{a-b}{2}$.

Zadania • część 4

1. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$.

2. $\arctan 0,08 \approx 4,57^\circ$. Przy tak małych kątach $\tan$ i $\sin$ są prawie równe, więc „8 m na 100 m drogi” dałoby prawie ten sam kąt ($4,59^\circ$).
3. $3 > \frac{\pi}{2}$, więc 3 nie jest wartością główną. Ten sam sinus ma kąt $\pi - 3 \approx 0,1416$, który leży w $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
Wynik: $\pi - 3$.
4. $\arctan \frac{4}{3} \approx 53,13^\circ$, ale to kierunek wektora $[3; 4]$. Wektor $[-3; -4]$ leży w III ćwiartce:
 $\arctan 2(-4, -3) \approx -126,87^\circ$, czyli $233,13^\circ$.
5. $x_1 = \arccos 0,3 \approx 1,266$, $x_2 = 2\pi - x_1 \approx 5,017$. W $[0; 10\pi]$ mieści się 5 okresów, więc 10 rozwiązań.

Zadania · część 5

1. 1, 0, 0. $\sinh(\ln 2) = \frac{2-1/2}{2} = 0,75$, $\cosh(\ln 2) = \frac{2+1/2}{2} = 1,25$. $1,5625 - 0,5625 = 1 \checkmark$.
2. $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow 1$ dla $x \rightarrow \infty$, a z nieparzystości $\rightarrow -1$ dla $x \rightarrow -\infty$.
3. $2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$. Ten sam kształt co $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
4. $Zwis = a \cosh(10/a) - a$. Dla $a = 10$: $10(\cosh 1 - 1) \approx 5,43$ m. Dla $a = 20$: $20(\cosh 0,5 - 1) \approx 2,55$ m.
Większe a to mocniej napięta lina.
5. $\operatorname{artanh} 0,99 = \frac{1}{2} \ln 199 \approx 2,647$, $t \approx 2,647 \cdot 50/9,81 \approx 13,5$ s, wobec 7,5 s dla 90%. Dla dużych argumentów $1 - \tanh z \approx 2e^{-2z}$, więc brakująca część prędkości maleje wykładniczo: każdy kolejny „rząd” dokładności (z 10% braku do 1%) kosztuje ten sam dodatkowy czas, ok. 6 s.

Matematyka · Trygonometria i funkcje hiperboliczne. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 5-6 i 22-6; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo.