

Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste

W lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne policzyliśmy, jak wysoko doleci piłka. Teraz zapytamy, kiedy spadnie na ziemię i jak długo będzie powyżej pięciu metrów. Pierwsze pytanie to równanie, drugie nierówność. Po drodze zbierzemy algebraiczne narzędzia, bez których nie da się policzyć całki z funkcji wymiernej ani rozwiązać obwodu elektrycznego transformatą Laplace'a: układy równań, wzór na pierwiastki, dzielenie wielomianów, symbol sumy i rozkład na ułamki proste.

CZAS

ok. 3 h teorii + 4 h
zadań

ZADANIA

33 zadania w
treści, z
podpowiedziami i
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t.
I, 22-5; K. A.
Stroud,
Engineering
Mathematics
(część
wprowadzająca)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: kiedy piłka spadnie?
- 1 Równania liniowe i układy dwóch równań
- 2 Równanie kwadratowe
- 3 Wielomiany
- 4 Wartość bezwzględna
- 5 Nierówności
- 6 Symbol sumy
- 7 Ułamki proste
- 8 Błędne intuicje
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: kiedy piłka spadnie?

W przykładzie 3.1 lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne piłkę wyrzucono pionowo w górę z wysokości 1,5 m z prędkością 12 m/s. Jej wysokość to

$$h(t) = 1,5 + 12t - 4,905 t^2 \quad (\text{m, s}).$$

Wierzchołek paraboli dał nam najwyższy punkt lotu. Fizyk zada jednak od razu dwa kolejne pytania. **Kiedy piłka uderzy w ziemię?** To pytanie o chwilę, w której $h(t) = 0$, czyli o rozwiązanie równania kwadratowego. **Jak długo piłka jest wyżej niż 5 m?** To pytanie o zbiór chwil, w których $h(t) > 5$, czyli o rozwiązanie nierówności.

Oba pytania prowadzą do jednej idei, która wraca w całym kursie: **rozłożyć wyrażenie na prostsze czynniki albo składniki**. Trójmian zapisany w postaci iloczynowej $a(t - t_1)(t - t_2)$ od razu pokazuje, kiedy jest zerem i kiedy zmienia znak. Ułamek rozłożony na ułamki proste daje się scałkować, a w automatyce przetłumaczyć z powrotem na przebieg w czasie. Tę samą drogę przejdziemy w tej lekcji od równań liniowych do ułamków prostych.

Pytanie na start. Po ilu sekundach piłka spadnie na ziemię? Co oznacza drugie, ujemne rozwiązanie równania? Odpowiedź w przykładzie 2.1.

Równania liniowe i układy dwóch równań

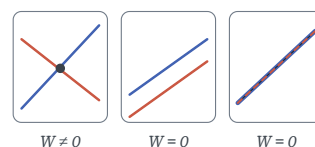
1.1 Jedno równanie liniowe

Równanie $ax + b = 0$ z $a \neq 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, $x = -b/a$. Rozwiązujemy je, wykonując po obu stronach te same działania: dodajemy, odejmujemy, mnożymy lub dzielimy przez liczbę różną od zera. Każde takie działanie zamienia równanie na **równoważne**, czyli mające te same rozwiązania. Mnożenie przez zero albo przez wyrażenie, które może być zerem, tej własności nie ma. To źródło wielu błędów i wróci przy nierównościach.

1.2 Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi

Dwie niewiadome wymagają dwóch niezależnych informacji. Układ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$



rozwiązujemy jedną z dwóch metod. **Podstawianie:** z jednego równania wyznaczamy jedną niewiadomą i wstawiamy do drugiego. **Przeciwnie współczynniki:** mnożymy równania przez takie liczby, żeby po dodaniu jedna niewiadoma znikła. Na przykład w układzie $2x + 3y = 12$, $x - y = 1$ mnożymy drugie równanie przez 3 i dodajemy: $5x = 15$, więc $x = 3$, a potem $y = x - 1 = 2$.

Geometrycznie każde równanie to prosta na płaszczyźnie $(x; y)$, a rozwiązanie to punkt przecięcia. Są trzy możliwości: proste się przecinają (jedno rozwiązanie), są równoległe (brak rozwiązań, układ **sprzeczny**) albo się pokrywają (nieskończenie wiele rozwiązań, układ **nieoznaczony**). Rozstrzyga o tym jedna liczba, **wyznacznik** układu:

WZORY CRAMERA DLA UKŁADU 2×2

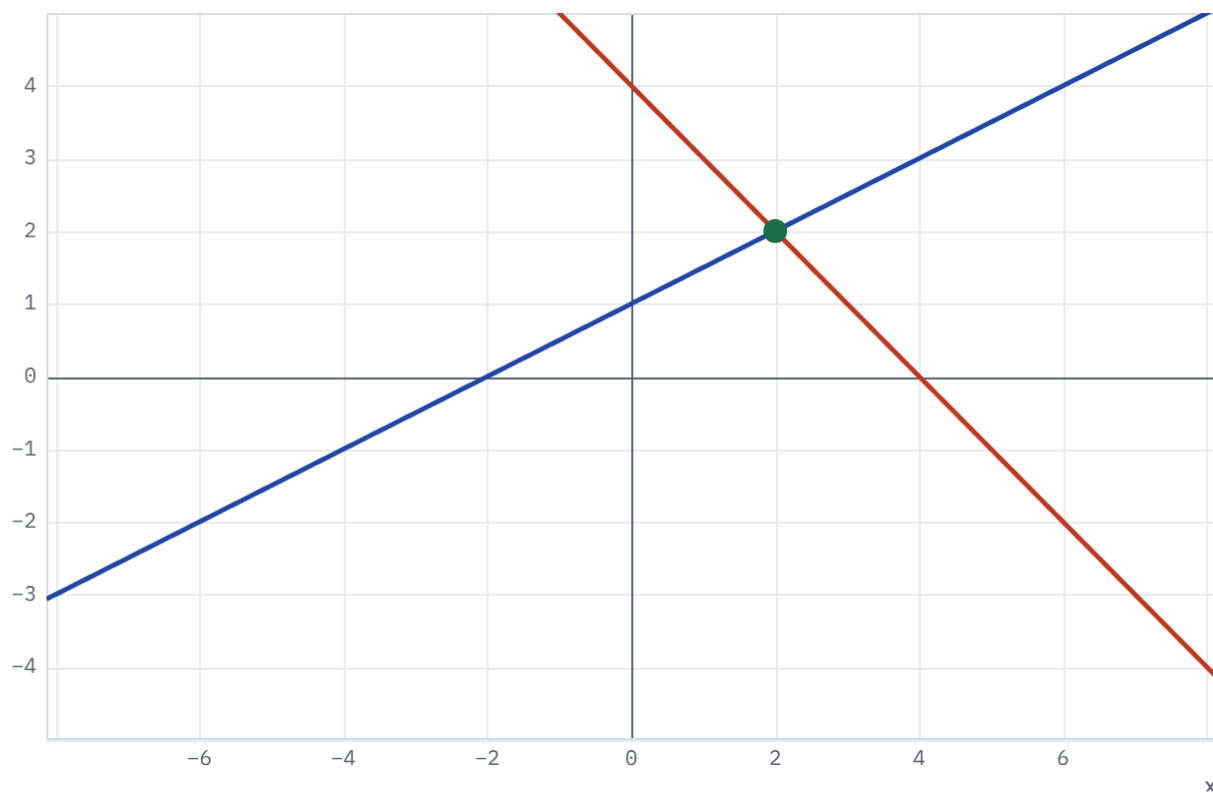
$$W = a_1b_2 - a_2b_1, \quad W_x = c_1b_2 - c_2b_1, \quad W_y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeśli $W \neq 0$, układ ma jedno rozwiązanie $x = W_x/W$, $y = W_y/W$. Jeśli $W = 0$, proste są równoległe: układ jest sprzeczny albo nieoznaczony.

Dla układu z poprzedniego akapitu $W = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -5$, $W_x = 12 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -15$, $W_y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 12 = -10$, więc $x = 3$, $y = 2$, jak wyżej. Wyznaczniki większych układów i ich sens geometryczny (pole, objętość) poznasz w lekcji 2.1 Macierze, wyznaczniki i układy równań. To samo wyrażenie $a_1b_2 - a_2b_1$ pojawi się w lekcji 1.1 Wektory jako pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $[a_1; a_2]$ i $[b_1; b_2]$. Gdy $W = 0$, wektory są równoległe, a równoległobok jest „spłaszczony” do odcinka.

SYMULACJA 1

Dwie proste $y = m_1x + n_1$ i $y = m_2x + n_2$. Punkt przecięcia to rozwiązanie układu. Zbliżaj nachylenia do siebie i patrz, jak wyznacznik maleje do zera, a punkt przecięcia ucieka daleko.



— $y = m_1x + n_1$ — $y = m_2x + n_2$ — rozwiązanie

$W = m_2 - m_1 -1,50$

rozwiązanie $x = 2,00$; $y = 2,00$

Stan na rysunku: $y = 0,50x + 1,0$ i $y = -1,00x + 4,0$; $W = -1,50$; rozwiązanie: $x = 2,00$; $y = 2,00$.

Przykład 1.1

Kiedy drugi rowerzysta dogoni pierwszego?

Rowerzysta A wyjeżdża o 8:00 i jedzie ze stałą prędkością 20 km/h. Rowerzysta B wyjeżdża z tego samego miejsca tą samą drogą o 8:30 i jedzie 30 km/h. Kiedy i w jakiej odległości od startu B dogoni A?

- 1 Czas t liczymy w godzinach od 8:00. Położenia: $x_A = 20t$, $x_B = 30(t - 0,5)$ dla $t \geq 0,5$.
- 2 To układ dwóch równań z niewiadomymi t i x : $x = 20t$ oraz $x = 30t - 15$. Odejmujemy stronami: $0 = -10t + 15$.
- 3 $t = 1,5$ h, czyli o 9:30, a $x = 20 \cdot 1,5 = 30$ km.

Wynik: o 9:30, 30 km od startu.

Sprawdzenie: B jedzie godzinę i przejeżdża $30 \cdot 1 = 30$ km ✓. W chwili startu B rowerzysta A ma 10 km przewagi, a B odrabia 10 km na godzinę, więc potrzebuje godziny ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Rozwiąż układ $3x + 2y = 7$, $x - y = 4$.
■ ■ ■
- 2 Oblicz wyznacznik układu $2x - y = 1$, $4x - 2y = 3$. Ile rozwiązań ma ten układ? A układ $2x - y = 1$, $4x - 2y = 2$?
■ ■ ■
- 3 Stalowy pręt ma długość 1000,24 mm w temperaturze 20 °C i 1000,96 mm w temperaturze 80 °C. Zakładając, że długość zależy od temperatury liniowo, $L(T) = L_0 + sT$, wyznacz L_0 i s . Ile wynosi współczynnik rozszerzalności $\alpha = s/L_0$?
■ ■ ■
- 4 Ile litrów roztworu 10% i ile roztworu 40% trzeba zmieszać, żeby dostać 3 litry roztworu 20%?
■ ■ ■
- 5 Łódź płynie 24 km z prądem rzeki w 2 godziny, a tę samą drogę pod prąd w 3 godziny. Jaka jest prędkość łodzi względem wody i prędkość prądu?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

2.1 Wzór z postaci kanonicznej

W lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne sprowadziliśmy funkcję kwadratową do postaci kanonicznej $a(x - p)^2 + q$. Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ rozwiązujemy tą samą drogą. Po wyciągnięciu a i uzupełnieniu do kwadratu:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \implies \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Lewa strona jest kwadratem, więc nie może być ujemna. Wszystko zależy od znaku **wyróżnika Δ** :

🔑 RÓWNIANIE KWADRATOWE $AX^2 + BX + C = 0$, $A \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\Delta > 0), \quad x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (\Delta = 0), \quad \text{brak pierwiastków rzeczywistych} \quad (\Delta < 0)$$

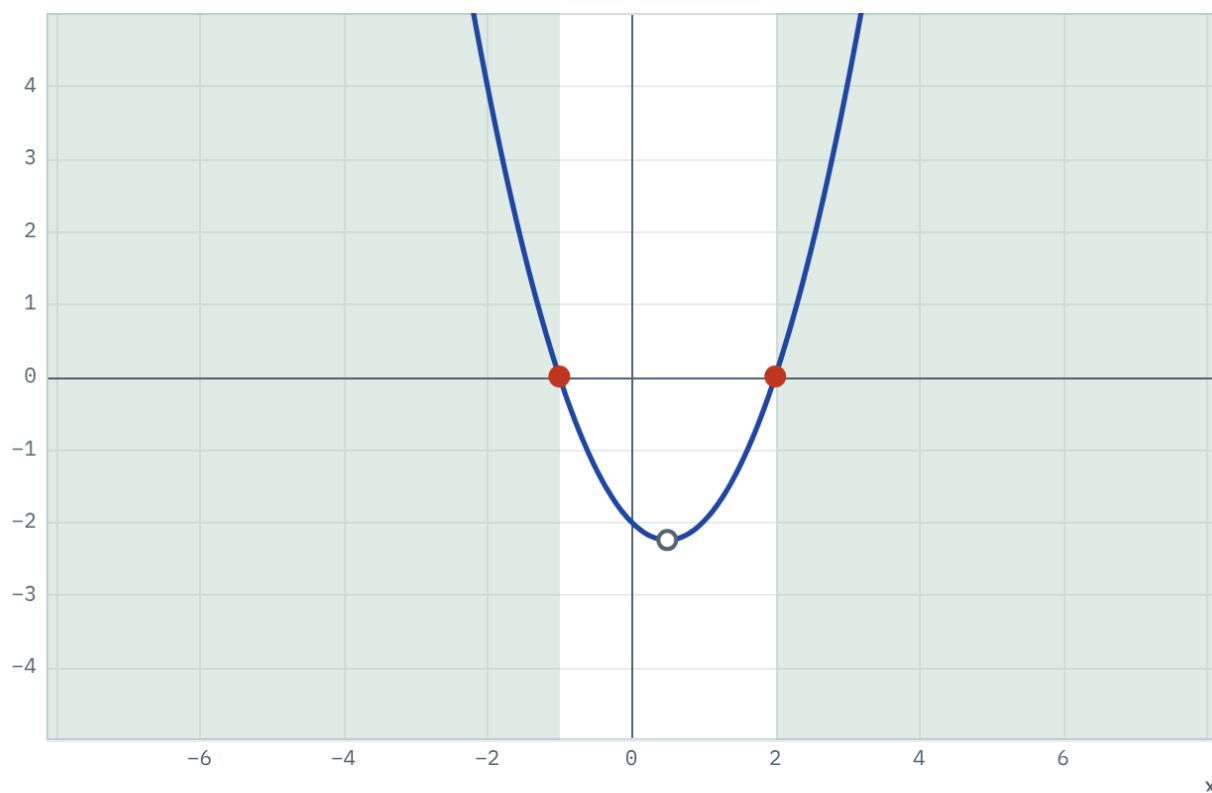
Gdy $\Delta \geq 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (postać iloczynowa) oraz $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,
 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (wzory Viète'a).

Postać iloczynowa wyjaśnia, dlaczego pierwiastki tak dużo mówią: iloczyn jest zerem dokładnie wtedy, gdy zerem jest któryś czynnik, a znak iloczynu zmienia się tylko w pierwiastkach. Wzory Viète'a pozwalają sprawdzić rozwiązanie bez wstawiania: dla $x^2 - 5x + 6 = 0$ pierwiastki 2 i 3 mają sumę $5 = -b/a$ i iloczyn $6 = c/a$ ✓.

Przy $\Delta < 0$ rozwiązań nie ma wśród liczb rzeczywistych, ale są wśród zespolonych. Feynman nazywa wprowadzenie liczby i z $i^2 = -1$ „ostatnim wynalazkiem”: gdy ją dopiszemy, **każde równanie algebraiczne ma rozwiązanie** i nie trzeba już wymyślać nowych liczb. Wrócimy do tego w lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory. FLP I-22-5

SYMULACJA 2

Parabola $y = ax^2 + bx + c$. Zmieniaj współczynniki i obserwuj wyróżnik, pierwiastki i postać iloczynową. Zielone pasy to przedziały, w których $y > 0$: tak odczytuje się rozwiązanie nierówności kwadratowej (część 5).



— $y = ax^2 + bx + c$ — $y > 0$ — pierwiastki

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad 9,00$$

$$\text{pierwiastki } x_1 = -1,00; \quad x_2 = 2,00$$

$$\text{postać iloczynowa } 1,00 \cdot (x + 1,00)(x - 2,00)$$

$$\text{wierzchołek } (0,50; -2,25)$$

Stan na rysunku: $a = 1,00$, $b = -1,0$, $c = -2,0$; $\Delta = 9,00$; pierwiastki: $x_1 = -1,00$; $x_2 = 2,00$.

Przykład 2.1

Kiedy piłka spadnie?

Rozwiąż $1,5 + 12t - 4,905 t^2 = 0$. Które rozwiązanie ma sens fizyczny i co oznacza drugie?

- 1 Porządkujemy: $4,905 t^2 - 12t - 1,5 = 0$, więc $a = 4,905$, $b = -12$, $c = -1,5$.
- 2 $\Delta = 144 + 4 \cdot 4,905 \cdot 1,5 = 144 + 29,43 = 173,43$, $\sqrt{\Delta} \approx 13,169$.
- 3 $t_{1,2} = \frac{12 \pm 13,169}{9,81}$: $t_1 \approx 2,566$ s, $t_2 \approx -0,119$ s.

Wynik: piłka spada po ok. 2,57 s.

Sprawdzenie: wzory Viète'a: $t_1 + t_2 = 2,447 \approx 12/4,905 \checkmark$, $t_1 t_2 = -0,306 \approx -1,5/4,905 \checkmark$. Ujemne rozwiązanie to chwila, w której piłka byłaby na ziemi, gdyby poruszała się po tej samej paraboli już przed rzutem: wzór nie wie, że rzut zaczął się dopiero w $t = 0$. Wierzchołek z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne ($t^* = 1,22$ s) leży dokładnie w połowie między pierwiastkami $\checkmark$.

⚠ PUŁAPKA NUMERYCZNA

Gdy b^2 jest dużo większe niż $|4ac|$, jeden pierwiastek liczony ze wzoru to różnica dwóch prawie równych liczb. Komputer traci wtedy prawie wszystkie cyfry. Dla $x^2 - 10^8 x + 1 = 0$ wzór w arytmetyce zmiennoprzecinkowej daje mały pierwiastek $7,45 \cdot 10^{-9}$ zamiast $1,00 \cdot 10^{-8}$, czyli błąd 25%. Lekarstwo: policzyć duży pierwiastek ze wzoru, a mały ze wzoru Viète'a, $x_{\text{mały}} = \frac{c}{a x_{\text{duży}}}$. Do takich spraw wrócimy w metodach numerycznych (6.2 Metody numeryczne: Python i C++).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Rozwiąż: $x^2 - 7x + 10 = 0$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $x^2 + 4x + 5 = 0$.

- 2 Nie rozwiązując równania $3x^2 - 12x + 5 = 0$, podaj sumę i iloczyn jego pierwiastków.

- 3 Dla jakich m równanie $x^2 + mx + 9 = 0$ ma jeden (podwójny) pierwiastek? Podaj ten pierwiastek.


4 Prostokąt ma pole 48 cm^2 i obwód 28 cm . Jakie ma boki?

5 Policz kalkulatorem (lub w Pythonie) mniejszy pierwiastek równania $x^2 - 10^8x + 1 = 0$ wprost ze wzoru oraz sposobem z pułapki numerycznej. Który wynik jest poprawny i dlaczego?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Wielomiany

3.1 Stopień, pierwiastki, dzielenie

Wielomian stopnia n to $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ z $a_n \neq 0$. Funkcja liniowa to wielomian stopnia 1, kwadratowa stopnia 2. Dla dużych $|x|$ o zachowaniu wielomianu decyduje najwyższa potęga: $x^3 - 100x^2$ różni się od x^3 o 10% dla $x = 1000$, a dla $x = 10^5$ już tylko o 0,1%.

Wielomiany dzieli się z resztą jak liczby: $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, gdzie stopień reszty R jest mniejszy od stopnia dzielnika D . Najważniejszy przypadek to dzielenie przez dwumian $x - a$:

🔑 TWIERDZENIE BÉZOUTA

Reszta z dzielenia $P(x)$ przez $x - a$ jest równa $P(a)$. W szczególności a jest pierwiastkiem wielomianu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Każdy znaleziony pierwiastek obniża więc stopień o jeden. Gdy wielomian ma współczynniki całkowite, jego pierwiastki wymierne p/q (ułamek skrócony) spełniają warunek: p dzieli wyraz wolny a_0 , a q dzieli współczynnik a_n . Daje to skończoną listę kandydatów do sprawdzenia.

Precyzyjna wersja faktu, o którym mówi Feynman (u niego jej nie ma), to **zasadnicze twierdzenie algebry**: wielomian stopnia $n \geq 1$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych, licząc z krotnościami. Dla wielomianu o współczynnikach rzeczywistych pierwiastki nierzeczywiste występują parami sprzężonymi (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory), więc **każdy taki wielomian rozkłada się na czynniki liniowe i kwadratowe bez pierwiastków rzeczywistych**. Właśnie te dwa rodzaje czynników zobaczymy w ułamkach prostych (część 7).

3.2 Schemat Hornera

Żeby policzyć $P(a)$, nie trzeba liczyć potęg. Wystarczy zapisać wielomian „od środka”: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$. W każdym kroku mnożymy dotychczasowy wynik przez a i dodajemy kolejny współczynnik. Przy stopniu n to tylko n mnożeń. Tak liczą wielomiany

biblioteki numeryczne. Kolejne wyniki pośrednie to przy okazji współczynniki ilorazu $Q(x)$ z dzielenia przez $x - a$, a ostatni wynik to reszta.

Przykład 3.1

Rozkład wielomianu trzeciego stopnia

Rozłóż na czynniki $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ i policz schematem Hornera $P(4)$.

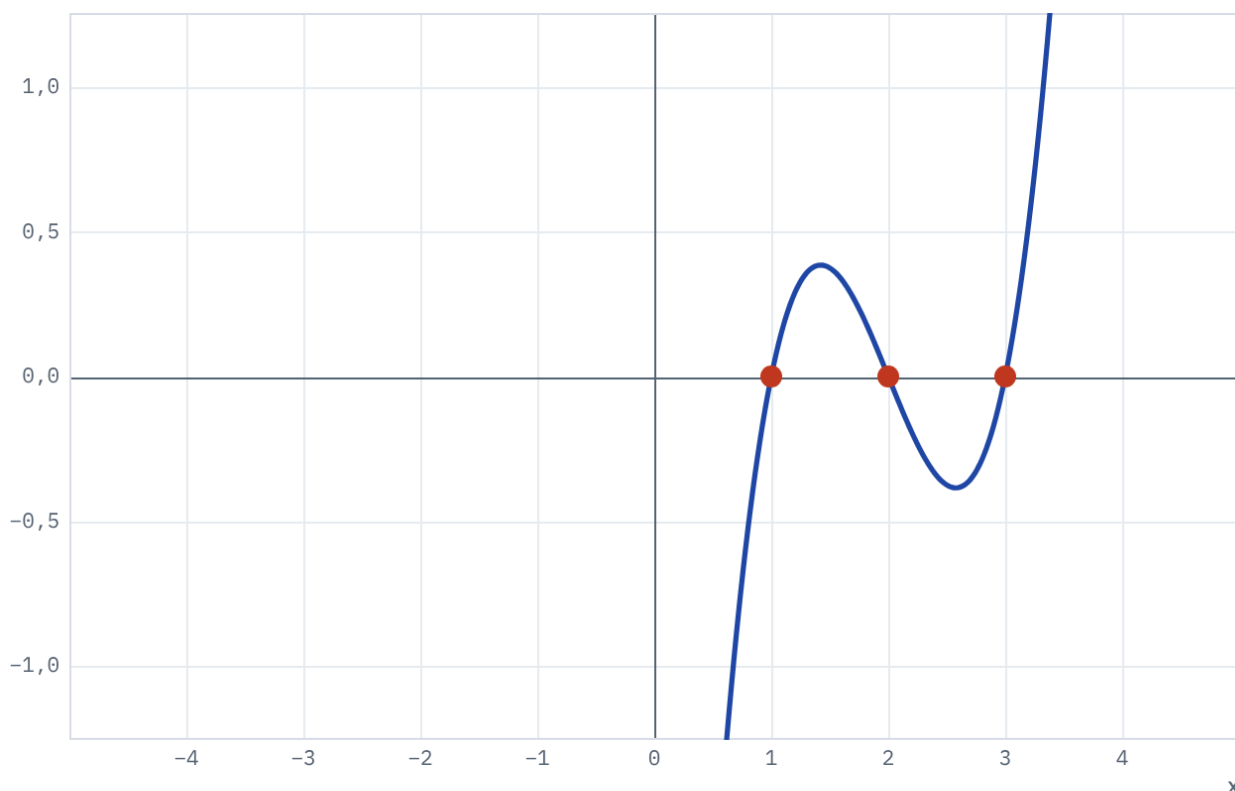
- 1 Kandydaci na pierwiastki całkowite to dzielniki wyrazu wolnego 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Sprawdzamy $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \checkmark$.
- 2 Dzielimy przez $x - 1$ schematem Hornera dla $a = 1$: współczynniki 1, -6, 11, -6 dają kolejno 1; $1 \cdot 1 - 6 = -5$; $-5 \cdot 1 + 11 = 6$; $6 \cdot 1 - 6 = 0$. Iloraz to $x^2 - 5x + 6$, reszta 0.
- 3 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, więc $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
- 4 $P(4)$ schematem Hornera: 1; $1 \cdot 4 - 6 = -2$; $-2 \cdot 4 + 11 = 3$; $3 \cdot 4 - 6 = 6$.

Wynik: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $P(4) = 6$.

Sprawdzenie: z postaci iloczynowej $P(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \checkmark$. Po wymnożeniu $a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ widać wzory Viète'a dla stopnia 3: suma pierwiastków to $-a_2/a_3$, a iloczyn $-a_0/a_3$. Tu suma pierwiastków $1 + 2 + 3 = 6 = -a_2/a_3 \checkmark$, iloczyn $6 = -a_0/a_3 \checkmark$.

SYMULACJA 3

Wielomian $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Przesuwaj pierwiastki i obserwuj współczynniki postaci ogólnej. Gdy dwa pierwiastki się spotkają, wykres dotyka osi zamiast ją przecinać: to pierwiastek podwójny.



— $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ — pierwiastki

postać ogólna $P(x) = 1,00x^3 - 6,00x^2 + 11,00x - 6,00$

suma pierwiastków $= -a_2/a_3$ 6,00

iloczyn pierwiastków $= -a_0/a_3$ 6,00

pierwiastek wielokrotny nie

Stan na rysunku: $x_1 = 1,0$, $x_2 = 2,0$, $x_3 = 3,0$, $a = 1,0$; $P(x) = 1,00x^3 - 6,00x^2 + 11,00x - 6,00$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 40 min

1 Podziel $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ przez $x - 1$ i znajdź wszystkie pierwiastki.



2 Policz schematem Hornera $Q(2)$ dla $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$.



3 Jaka jest reszta z dzielenia x^{100} przez $x - 1$? A przez $x + 1$?



- 4 Z prostokątnej blachy 20×30 cm wycinamy w rogach kwadraty o boku x i zginamy brzeży, robiąc otwarte pudełko. Jego objętość to $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$. Dla jakich x objętość wynosi 1008 cm^3 ?

- 5 Znajdź wielomian trzeciego stopnia o pierwiastkach $1, 2, -1$, dla którego $P(0) = 4$.

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna $|x|$ to odległość liczby x od zera na osi liczbowej: $|x| = x$ dla $x \geq 0$ i $|x| = -x$ dla $x < 0$. Ważniejsze od definicji jest jej uogólnienie: $|x - a|$ to odległość między punktami x i a . Dzięki temu zdania o odległości zapisują się krótko:



$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon).$$

Ten zapis spotkasz w dwóch miejscach. W technice to **tolerancja**: wałek o średnicy $25,00 \pm 0,02$ mm to warunek $|d - 25,00| \leq 0,02$ mm. W analizie warunek $|f(x) - g| < \varepsilon$ jest sercem **definicji granicy** (lekcja 1.2 Ciągi, granice i ciągłość).

Równania i nierówności z wartością bezwzględną rozwiązuje się, rozbijając oś na przedziały, w których wyrażenia pod modułem mają stały znak. Na każdym przedziale moduł zamienia się na zwykłe wyrażenie z plusem albo minusem.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 25 min

- 1 Rozwiąż $|2x + 1| = 5$.

- 2 Zapisz w postaci przedziałów: $|x - 3| < 0,5$ oraz $|x + 1| \geq 2$.

- 3 Wałek ma mieć średnicę $25,00 \pm 0,02$ mm. Zapisz warunek z wartością bezwzględną. Czy wałek o średnicy 24,97 mm spełnia normę?

- 4 Rozwiąż $|x - 1| + |x + 2| = 5$. Zinterpretuj równanie jako sumę odległości.

podstawowe średnie feynmanowskie

Nierówności rozwiązuje się prawie jak równania, z jednym wyjątkiem: **mnożenie lub dzielenie przez liczbę ujemną odwraca znak nierówności**. Z $-2x > 4$ wynika $x < -2$. Stąd zasada: nigdy nie mnożymy nierówności przez wyrażenie, którego znaku nie znamy, np. przez x albo przez mianownik $x + 2$.

5.1 Nierówności kwadratowe

Nierówność $ax^2 + bx + c > 0$ odczytujemy z wykresu paraboli. Znajdujemy pierwiastki, a potem patrzymy, gdzie parabola jest nad osią. Dla $a > 0$ i dwóch pierwiastków $x_1 < x_2$: $ax^2 + bx + c > 0$ poza przedziałem $[x_1; x_2]$, a < 0 wewnątrz. Dla $a < 0$ odwrotnie. Symulacja 2 pokazuje te przedziały na zielono.

5.2 Nierówności wymierne i tabela znaków

Nierówność wymierna to taka, w której niewiadoma stoi w mianowniku (funkcję wymierną zdefiniujemy dokładnie w części 7). W nierówności $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ nie wolno pomnożyć przez $x+2$, bo nie wiemy, czy jest dodatnie. Zamiast tego badamy znak każdego czynnika osobno. Ułamek zmienia znak tylko tam, gdzie licznik albo mianownik jest zerem: w $x = 1$ i $x = -2$. W trzech przedziałach znak jest stały:

	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$x > 1$
$x - 1$	—	—	+
$x + 2$	—	+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	—	+

Rozwiązanie: $x < -2$ lub $x \geq 1$. Punkt $x = 1$ należy do zbioru (ułamek jest tam zerem), punkt $x = -2$ nie (dzielenie przez zero).

Przykład 5.1

Jak długo piłka jest wyżej niż 5 m?

Dla piłki z prologu rozwiąż nierówność $h(t) > 5$.

- 1 $1,5 + 12t - 4,905t^2 > 5 \iff 4,905t^2 - 12t + 3,5 < 0$. Przenieśliśmy wszystko na jedną stronę i pomnożyliśmy przez -1 , więc znak się odwrócił.
- 2 $\Delta = 144 - 4 \cdot 4,905 \cdot 3,5 = 75,33$, $\sqrt{\Delta} \approx 8,679$; pierwiastki $t_{1,2} = \frac{12 \pm 8,679}{9,81}$: $t_1 \approx 0,339$ s, $t_2 \approx 2,108$ s.
- 3 Parabola $4,905t^2 - 12t + 3,5$ ma ramiona w górę, więc jest ujemna między pierwiastkami.

Wynik: piłka jest wyżej niż 5 m dla $t \in (0,339; 2,108)$ s, czyli przez ok. 1,77 s.

Sprawdzenie: środek przedziału $(0,339 + 2,108)/2 = 1,22$ s to chwila najwyższego punktu z lekcji 0.1 Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne ✓. Czas nad dowolną wysokością to $t_2 - t_1 = \sqrt{\Delta}/a$, więc maleje, gdy podnosimy poprzeczkę, i znika na wysokości 8,84 m ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

5 zadań · ok. 30 min

1 Rozwiąż $3 - 2x > 7$.

2 Rozwiąż $x^2 - x - 6 \leq 0$.

3 Jak długo piłka z prologu jest wyżej niż 8 m?

4 Rozwiąż $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$, nie zaglądając do tabeli z części 5.2. Potem rozwiąż $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$.

5 Uczeń rozwiązał $\frac{1}{x} < 1$, mnożąc obie strony przez x : „ $1 < x$ ”. Znajdź błąd i podaj pełne rozwiązanie.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Symbol sumy

Długie sumy zapisujemy symbolem Σ (wielka grecka litera sigma):

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

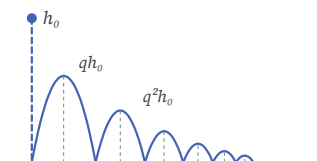
Litera k to **indeks**: przebiega liczby całkowite od dolnej granicy do górnej. Jego nazwa nie ma znaczenia, $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{j=1}^n j^2$. Z definicji wynikają dwie reguły używane bez przerwy: stałą można wyciągnąć przed sumę, $\sum c a_k = c \sum a_k$, a sumę sum rozbić, $\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$. Indeks można też przesunąć: $\sum_{k=1}^n a_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$.

Dwie sumy warto znać na pamięć, bo pojawiają się w fizyce i w algorytmach:

SUMA ARYTMETYCZNA I GEOMETRYCZNA

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Pierwszą dowodzi się, pisząc sumę dwa razy, raz od przodu i raz od tyłu: każda para daje $n+1$, a par jest n , więc $2S = n(n+1)$. Drugą: jeśli $S = 1 + q + \cdots + q^n$, to $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$, a po odjęciu prawie wszystko się skraca: $S - qS = 1 - q^{n+1}$. Ten chwyt, mnożenie i odejmowanie, przyda się wielokrotnie.



Przykład 6.1

Droga odbijającej się piłki

Piłka spada z wysokości 2 m i po każdym odbiciu wznosi się na 60% poprzedniej wysokości. Jaką drogę przebędzie od puszczenia do chwili, gdy po piątym wzlocie znowu uderzy w podłogę?

- 1 Wysokości kolejnych wzlotów: $h_k = 2 \cdot 0,6^k$ m dla $k = 1, \dots, 5$. Każdy wzlot to droga w górę i w dół, czyli $2h_k$.
- 2 Droga: $s = 2 + \sum_{k=1}^5 2 \cdot 2 \cdot 0,6^k = 2 + 4 \cdot 0,6 \sum_{k=0}^4 0,6^k$.
- 3 $\sum_{k=0}^4 0,6^k = \frac{1 - 0,6^5}{1 - 0,6} = \frac{1 - 0,07776}{0,4} = 2,3056$.
- 4 $s = 2 + 2,4 \cdot 2,3056 = 7,533$ m.

Wynik: ok. 7,53 m.

Sprawdzenie: wprost: $2 + 2(1,2 + 0,72 + 0,432 + 0,2592 + 0,15552) = 2 + 2 \cdot 2,76672 = 7,533 \checkmark$. Gdy liczba odbić rośnie, $0,6^n$ znika i droga dąży do $2 + 2,4/0,4 = 8$ m. Takie nieskończone sumy, czyli szeregi, są tematem lekcji 1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe.

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

4 zadania · ok. 25 min

- 1 Zapisz symbolem sumy $1 + 4 + 9 + \dots + 100$ i policz tę sumę.
- 2 Oblicz $\sum_{k=1}^{100} k$ oraz $\sum_{k=1}^{100} (2k - 1)$. Co jest ciekawego w drugim wyniku?
- 3 Na pierwszym polu szachownicy kładziemy 1 ziarno, na każdym następnym dwa razy więcej. Ile ziaren leży razem na 64 polach? Podaj wynik w notacji wykładniczej.
- 4 Udowodnij wzór na sumę geometryczną metodą „pomnóż i odejmij” dla sumy $\sum_{k=1}^n q^k$ (od $k = 1$). Sprawdź go na przykładzie 6.1.

podstawowe średnie feynmanowskie

7.1 Po co rozkładać ułamki

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów, $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Dodawanie ułamków jest łatwe: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} = \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$. Działanie odwrotne, czyli **rozkład na ułamki proste**, jest trudniejsze, ale bardzo potrzebne. Całkę z $\frac{1}{x+1}$ umiemy policzyć (lekcja 1.5 Całki), a całki z $\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ wprost nie. W automatyce transmitancja obwodu to właśnie funkcja wymierna, a każdy ułamek prosty odpowiada jednemu składnikowi odpowiedzi w czasie, np. jednej zanikającej eksponencji (lekcja 4.4 Transformata Laplace'a).

ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE (STOPIEŃ LICZNIKA MNIEJSZY NIŻ MIANOWNIKA)

Mianownik rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe bez pierwiastków rzeczywistych (część 3.1). Każdy czynnik daje swoje ułamki:

$$\begin{aligned} \text{czynnik } (x-a) &\rightarrow \frac{A}{x-a}; & \text{czynnik } (x-a)^2 &\rightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2}; & \text{czynnik } x^2 + \\ px + q \text{ bez pierwiastków} &\rightarrow \frac{Bx+C}{x^2+px+q}. \end{aligned}$$

Jeśli stopień licznika jest równy stopniowi mianownika lub od niego większy, najpierw dzielimy wielomiany z resztą. Dostajemy wielomian plus ułamek „właściwy”, który rozkładamy dalej.

7.2 Metoda zaślania

Dla czynników liniowych występujących raz współczynniki znajduje się błyskawicznie. Żeby znaleźć A przy $\frac{A}{x-a}$, zaślaniemy w mianowniku czynnik $(x-a)$ i w resztę wstawiamy $x=a$. To nie sztuczka: po pomnożeniu równości przez $(x-a)$ wszystkie inne ułamki mają czynnik $(x-a)$, więc znikają w $x=a$.

Przykład 7.1

Rozkład metodą zasłaniania

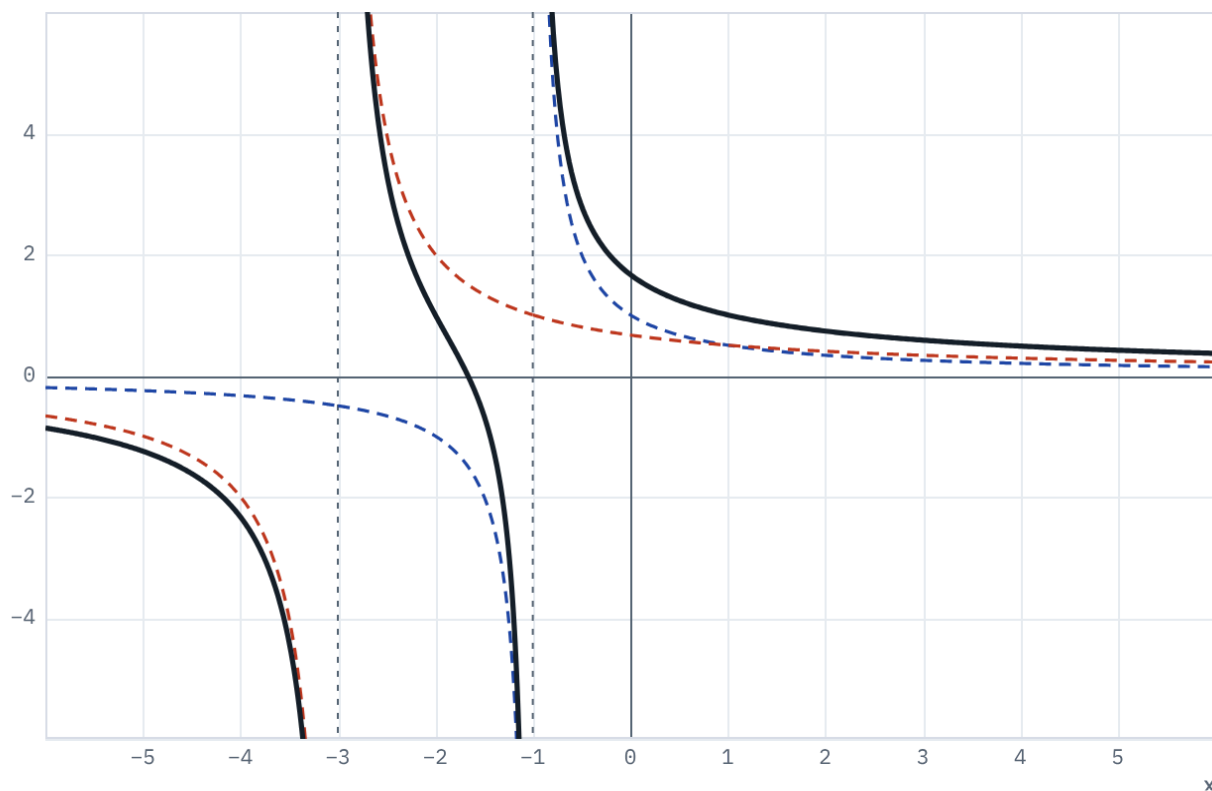
Rozłóż $\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ na ułamki proste.

- 1 Szukamy A i B w $\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$.
- 2 A : zasłaniamy $(x+1)$ i wstawiamy $x = -1$: $A = \frac{3 \cdot (-1) + 5}{-1 + 3} = \frac{2}{2} = 1$.
- 3 B : zasłaniamy $(x+3)$ i wstawiamy $x = -3$: $B = \frac{3 \cdot (-3) + 5}{-3 + 1} = \frac{-4}{-2} = 2$.

Wynik: $\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3}$.

Sprawdzenie: dla $x = 0$: lewa strona $\frac{5}{3}$, prawa $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \checkmark$. Dla dużych x obie strony zachowują się jak $\frac{3}{x}$: lewa $\approx 3x/x^2$, prawa $\approx 1/x + 2/x \checkmark$.

SYMULACJA 4 Funkcja $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ jako suma dwóch ułamków prostych. Każdy ułamek prosty rośnie nieograniczenie w punkcie, w którym zeruje się jego mianownik. Taki punkt nazywamy **biegunem**; wykres ma tam pionową asymptotę (przerwana pionowa linia). Na starcie widać funkcję z przykładu 7.1 ($A = 1, a = -1, B = 2, b = -3$). Zsuń bieguny do siebie i zobacz, co się dzieje z sumą.



— $A/(x-a)$ — $B/(x-b)$ — suma

suma jako jeden ułamek $(3,0x + 5,0) / (x + 1,0)(x + 3,0)$

bieguny $-1,0; -3,0$

Stan na rysunku: $A = 1,0, a = -1,0, B = 2,0, b = -3,0$; suma = $(3,0x + 5,0) / (x + 1,0)(x + 3,0)$.

Przykład 7.2

Licznik wyższego stopnia i czynnik podwójny

Rozłóż $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ oraz $\frac{1}{x^2(x + 1)}$.

- 1 W pierwszym ułamku licznik ma stopień 3, a mianownik 2, więc najpierw dzielimy:
 $x^3 + 1 = x(x^2 - 1) + (x + 1)$. Stąd $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = x + \frac{1}{x - 1}$.
- 2 W drugim czynnik x występuje dwa razy: $\frac{1}{x^2(x + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{C}{x + 1}$.
- 3 Zasłanianie działa dla C (wstaw $x = -1$): $C = \frac{1}{(-1)^2} = 1$, oraz dla A_2 (zasłoń x^2 , wstaw $x = 0$): $A_2 = \frac{1}{0 + 1} = 1$.
- 4 A_1 wyznaczamy z innej wartości, np. $x = 1$: $\frac{1}{2} = A_1 + 1 + \frac{1}{2}$, więc $A_1 = -1$.

Wynik: $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$ oraz $\frac{1}{x^2(x + 1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x + 1}$.

Sprawdzenie: dla $x = 2$: $\frac{9}{3} = 3$ i $2 + 1 = 3$ ✓; $\frac{1}{12}$ i $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 7

5 zadań · ok. 40 min

1 Rozłóż na ułamki proste $\frac{1}{x^2 - 1}$.

2 Rozłóż $\frac{x + 7}{(x - 1)(x + 2)}$.

3 Rozłóż $\frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 1)}$.

4 Rozłóż $\frac{1}{x(x + 2)}$ i sprawdź wynik dla $x = 1$.

5 Rozłóż $\frac{1}{k(k + 1)}$ na ułamki proste i użyj wyniku, żeby policzyć $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k + 1)}$.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Błędne intuicje

× „Można podzielić obie strony przez x .”

Tylko gdy $x \neq 0$. Z $x^2 = 3x$ po podzieleniu przez x zostaje $x = 3$, a ginie rozwiązanie $x = 0$. Bezpiecznie: $x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$.

× „Nierówność mnoży się jak równanie.”

Mnożenie przez liczbę ujemną odwraca znak, a przez wyrażenie o nieznanym znaku jest zabronione (część 5).

× „ $\Delta < 0$, więc równanie nie ma rozwiązań.”

Nie ma rozwiązań *rzeczywistych*. Ma dwa zespolone, a w fizyce drgań to właśnie one opisują oscylacje (lekcje 1.7 Liczby zespolone i fazory i 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne).

× „Ujemne rozwiązanie jest błędne, więc je skreślam.”

Najpierw zastanów się, co znaczy. W przykładzie 2.1 to chwila sprzed rzutu na tej samej paraboli. Czasem ujemny wynik mówi, że model nie pasuje do sytuacji.

× „ $|a + b| = |a| + |b|$.”

Tylko gdy $ab \geq 0$. Ogólnie $|a + b| \leq |a| + |b|$ (nierówność trójkąta). Dla $a = 3, b = -5$: $2 \leq 8$.

× „ $\sum(a_k b_k) = \sum a_k \cdot \sum b_k$.”

Suma iloczynów to nie iloczyn sum. Dla $a = b = (1; 1)$: $2 \neq 4$.

× „Każdy ułamek rozkłada się na ułamki z czynnikami liniowymi.”

Czynnik kwadratowy bez pierwiastków rzeczywistych, np. $x^2 + 1$, daje ułamek $\frac{Bx + C}{x^2 + 1}$ z licznikiem liniowym (zadanie 3 w części 7).

Sprawdź się

- 1 Co oznacza geometrycznie, że wyznacznik układu 2×2 jest zerem?

Proste są równoległe (albo się pokrywają), więc nie mają dokładnie jednego punktu wspólnego.

- 2 Pierwiastki równania kwadratowego to 2 i -5 , a $a = 1$. Jakie to równanie?

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10 = 0.$$

- 3 Jak bez dzielenia sprawdzić, czy $x - 2$ dzieli $x^3 - 8$?

Twierdzenie Bézouta: $2^3 - 8 = 0$, więc dzieli.

- 4 Zapisz bez wartości bezwzględnej: $|t - 10| \leq 2$.

$$8 \leq t \leq 12, \text{ czyli } t \in [8; 12].$$

- 5 Ile wynosi $1 + 2 + 4 + \dots + 1024$?

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = 2^{11} - 1 = 2047.$$

- 6 Jakie ułamki proste da mianownik $(x - 1)^2(x^2 + 4)$?

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

- 7 Dlaczego w nierówności $\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0$ punkt $x = -2$ nie należy do rozwiązania, choć $x = 1$ należy?

W $x = -2$ ułamek nie istnieje (dzielenie przez zero), a w $x = 1$ jest równy zeru, co spełnia nierówność nieostrą.

RÓWNANIA

układ 2×2 : $W = a_1b_2 - a_2b_1$, $x = \frac{W_x}{W}$,

$$y = \frac{W_y}{W}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}; \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Bézout: reszta z $P(x) : (x - a)$ to $P(a)$

pierwiastki wymierne p/q : $p \mid a_0, q \mid a_n$

$$\text{stabilnie: } x_{\text{mały}} = \frac{c}{a x_{\text{duży}}}$$

NIERÓWNOŚCI, SUMY, UŁAMKI

$$|x - a| < \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

mnożenie przez liczbę ujemną odwraca znak; mianownika o nieznanym znaku nie mnożymy

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\frac{P}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad A = \frac{\frac{P(a)}{a-b}}$$

$$(x-a)^2 \rightarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2}; \quad x^2 + px + q \rightarrow \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 22-5 (liczby zespolone jako „ostatni wynalazek”, dzięki któremu każde równanie algebraiczne ma rozwiązanie).

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: część wprowadzająca (równania, nierówności, wielomiany, ułamki proste). Dużo zadań z odpowiedziami.
- Dowolny podręcznik do matematyki w szkole średniej na poziomie rozszerzonym: rozdziały o wielomianach, wartości bezwzględnej i ciągach.

Następna lekcja to trygonometria i funkcje hiperboliczne (0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne). Ułamki proste wrócą przy całkach (1.5 Całki) i w transformacie Laplace'a (4.4 Transformata Laplace'a), sumy geometryczne w szeregach (1.6 Szeregi liczbowe i potęgowe), a wartość bezwzględna w definicji granicy (1.2 Ciągi, granice i ciągłość).



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Z drugiego $x = y + 4$; wstawiamy: $3y + 12 + 2y = 7$, więc $y = -1$, $x = 3$. Sprawdzenie: $9 - 2 = 7 \checkmark$, $3 + 1 = 4 \checkmark$.
2. $W = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 0$ w obu układach. Pierwszy jest sprzeczny: drugie równanie po podzieleniu przez 2 daje $2x - y = 1,5 \neq 1$. Drugi jest nieoznaczony: oba równania opisują tę samą prostą $y = 2x - 1$.
3. Odejmujemy równania: $60s = 0,72$ mm, więc $s = 0,012$ mm/K i $L_0 = 1000,24 - 20 \cdot 0,012 = 1000,00$ mm. $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, typowa wartość dla stali.
4. $x + y = 3$ oraz $0,1x + 0,4y = 0,2 \cdot 3 = 0,6$. Stąd $y = 1$ l roztworu 40% i $x = 2$ l roztworu 10%.
5. $v + u = 12$ km/h, $v - u = 8$ km/h, więc $v = 10$ km/h, $u = 2$ km/h.

Zadania • część 2

1. 2 i 5; $\frac{1}{2}$ i -2 ; brak pierwiastków rzeczywistych ($\Delta = -4$).
2. Suma $12/3 = 4$, iloczyn $5/3$. Pierwiastki istnieją, bo $\Delta = 144 - 60 = 84 > 0$.
3. $\Delta = m^2 - 36 = 0$, więc $m = 6$ (pierwiastek -3) albo $m = -6$ (pierwiastek 3).
4. 6 cm i 8 cm.
5. Wprost: $\frac{10^8 - \sqrt{10^{16} - 4}}{2} \approx 7,45 \cdot 10^{-9}$ (w arytmetyce podwójnej precyzji). Ze wzoru Viète'a: $x_{\text{mały}} = 1/x_{\text{duży}} = 1/10^8 = 1,00 \cdot 10^{-8}$. Poprawny jest drugi: $\sqrt{10^{16} - 4}$ różni się od 10^8 dopiero na 17. cyfrze, a komputer przechowuje ok. 16 cyfr, więc różnica w liczniku to głównie błąd zaokrąglenia.

Zadania • część 3

1. Iloraz $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, reszta 0. Pierwiastki: 1, 3, -2 .
2. $2; 2 \cdot 2 - 3 = 1; 1 \cdot 2 + 1 = 3; 3 \cdot 2 - 5 = 1$. $Q(2) = 1$.
3. Z twierdzenia Bézouta: $1^{100} = 1$ oraz $(-1)^{100} = 1$. Bez wykonywania dzielenia.
4. $V(3) = 3 \cdot 14 \cdot 24 = 1008 \checkmark$. $V(x) - 1008 = 4(x - 3)(x^2 - 22x + 84)$, więc pozostałe pierwiastki to $11 \pm \sqrt{37}$: $x \approx 4,92$ cm i $x \approx 17,08$ cm. Drugi odpada, bo $x < 10$ cm. Odpowiedź: $x = 3$ cm lub $x \approx 4,92$ cm.
5. $P(x) = a(x - 1)(x - 2)(x + 1)$, $P(0) = a \cdot (-1)(-2) \cdot 1 = 2a = 4$, więc $a = 2$: $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.

Zadania • część 4

1. $2x + 1 = 5$ albo $2x + 1 = -5$, czyli $x = 2$ lub $x = -3$.
2. (2,5; 3,5). Druga: odległość x od -1 co najmniej 2, czyli $x \leq -3$ lub $x \geq 1$: $(-\infty; -3] \cup [1; \infty)$.
3. $|d - 25,00| \leq 0,02$ mm. Dla 24,97 mm: $|-0,03| = 0,03 > 0,02$, więc nie spełnia.

4. Szukamy punktów, których suma odległości od 1 i od -2 wynosi 5. Między -2 a 1 suma wynosi zawsze 3. Dla $x \geq 1$: $2x + 1 = 5$, $x = 2$. Dla $x \leq -2$: $-2x - 1 = 5$, $x = -3$. Rozwiązania: 2 i -3 .

Zadania • część 5

- $-2x > 4$, więc $x < -2$ (dzielenie przez -2 odwraca znak).
- Pierwiastki -2 i 3 , ramiona w górę: $x \in [-2; 3]$.
- $4,905t^2 - 12t + 6,5 < 0$; $\Delta = 16,47$, pierwiastki $0,810$ s i $1,637$ s. Piłka jest wyżej niż 8 m przez ok. $0,83$ s.
- Pierwsza: $(-\infty; -2) \cup [1; \infty)$. Druga: $(-2; 1]$. Zero w mianowniku nigdy nie należy do rozwiązania.
- Dla $x < 0$ mnożenie przez x odwraca znak. Poprawnie: $\frac{1}{x} - 1 < 0 \iff \frac{1-x}{x} < 0$, a tabela znaków daje $x < 0$ lub $x > 1$. Np. $x = -5$: $-0,2 < 1 \checkmark$, a uczeń ten przypadek zgubił.

Zadania • część 6

- $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$. Wzór: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, dla $n = 10$: $\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$.
- 5050 oraz $2 \cdot 5050 - 100 = 10\,000 = 100^2$. Suma kolejnych liczb nieparzystych to zawsze kwadrat: $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.
- $\sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$.
- $S = q + \dots + q^n$, $qS = q^2 + \dots + q^{n+1}$, $S - qS = q - q^{n+1}$, więc $S = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$. Dla $q = 0,6$, $n = 5$: $\frac{0,6 \cdot 0,92224}{0,4} = 1,38336$, a $2 + 4 \cdot 1,38336 = 7,533$ m $\checkmark$.

Zadania • część 7

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; zaślania: $\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$.
- $A = \frac{1+7}{1+2} = \frac{8}{3}$, $B = \frac{-2+7}{-2-1} = -\frac{5}{3}$; $\frac{8/3}{x-1} - \frac{5/3}{x+2}$.
- $A = \frac{3}{0+1} = 3$. Wtedy $2x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) + (Bx + C)x$, czyli $2x^2 + 3 = (3+B)x^2 + Cx + 3$, więc $B = -1$, $C = 0$: $\frac{3}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$.
- $\frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}$. Dla $x = 1$: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \checkmark$.
- $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. W sumie skraca się prawie wszystko („suma teleskopowa”): $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100}) = 1 - \frac{1}{100} = 0,99$.

Matematyka • Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), 22-5; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo. Cytaty w tłumaczeniu własnym.