

Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne

Około 1620 roku Henry Briggs policzył logarytmy dziesiętne na czternaście miejsc po przecinku. Miał do dyspozycji tylko pióro, papier i cierpliwość do wyciągania pierwiastków kwadratowych. Pod koniec tej lekcji zrobisz to samo, z dokładnością do sześciu cyfr, w kilka minut i zrozumiesz, skąd bierze się liczba e . Po drodze uporządkujemy narzędzia, z których korzysta cały kurs: potęgi, notację wykładniczą, funkcje i ich wykresy.

CZAS

ok. 3 h teorii + 3 h zadań

ZADANIA

36 zadań w treści, z podpowiedziami i odpowiedziami

ŹRÓDŁA

Feynmana
wykłady z fizyki, t. I, rozdz. 22 (22-1... 22-4); K. A. Stroud, *Engineering Mathematics* (część wprowadzająca)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: tablice pana Briggsa
- 1 Liczby: od liczenia do osi liczbowej
- 2 Potęgi, pierwiastki i notacja wykładnicza
- 3 Funkcja, prosta i parabola
- 4 Funkcja wykładnicza i liczba e
- 5 Logarytm
- 6 Złożenie i funkcja odwrotna
- 7 Przekształcenia wykresu
- 8 Błędne intuicje
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: tablice pana Briggsa

Do połowy XX wieku inżynier, który chciał pomnożyć dwie liczby siedmiocyfrowe, nie mnożył ich. Sprawdzał w tablicach ich logarytmy, dodawał je i odczytywał wynik z tablic z powrotem. Dodawanie jest dużo łatwiejsze niż mnożenie, a logarytm zamienia jedno w drugie: $\log(ab) = \log a + \log b$. Na tej samej zasadzie działał suwak logarytmiczny, z którym liczono mosty, silniki i trajektorie pierwszych rakiet.

Skąd jednak wzięły się liczby w tablicach? Feynman poświęca temu fragment rozdziału o algebrze. Henry Briggs wyciągał pierwiastek kwadratowy z 10, potem pierwiastek z wyniku, potem znowu, i tak wiele razy. Dostawał liczby $10^{1/2}$, $10^{1/4}$, $10^{1/8}$... i każdą inną liczbę składał z ich iloczynu. Feynman pisze, że przez trzysta lat wszystkie tablice logarytmów przepisywano z tablic Briggsa, tylko z mniejszą liczbą cyfr. FLP I-22-4

Ta historia będzie nam towarzyszyć przez całą lekcję. Żeby ją zrozumieć, potrzebujemy potęg o wykładnikach ułamkowych (część 2), funkcji wykładniczej (część 4) i logarytmu (część 5). Na końcu zobaczysz, że ten sam rachunek prowadzi do liczby $e \approx 2,718$, podstawy, która sama pojawia się w prawach przyrody.

Pytanie na start. Ile wynosi $\log_{10} 2$, czyli do jakiej potęgi trzeba podnieść 10, żeby dostać 2? Bez kalkulatora. Odpowiedź (i metoda Briggsa) w części 5.

1

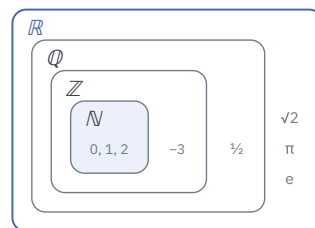
Liczby: od liczenia do osi liczbowej

1.1 Każde działanie odwrotne wymaga nowych liczb

Feynman opowiada historię liczb jako ciąg rozszerzeń. Zaczynamy od **liczb naturalnych** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, którymi liczymy. Dodawanie i mnożenie zawsze dają liczbę naturalną. Działania odwrotne już nie: $3 - 5$ nie ma wyniku wśród liczb naturalnych. Zamiast się poddać, dopisujemy nowe liczby tak, żeby stare reguły rachunku dalej obowiązywały. Feynman nazywa to „abstrakcją i uogólnieniem”.

FLP I-22-2, I-22-3

- Odejmowanie wymusza **liczby całkowite** $\mathbb{Z}$: dochodzą $-1, -2, \dots$
- Dzielenie wymusza **liczby wymierne** $\mathbb{Q}$, czyli ułamki p/q z całkowitymi p, q i $q \neq 0$.
- Pierwiastkowanie wymusza **liczby niewymierne**: $\sqrt{2}$ nie jest żadnym ułamkiem. Niewymierne są też liczby, które nie są pierwiastkami, np. π i e . Razem z wymiernymi tworzą **liczby rzeczywiste** $\mathbb{R}$.
- Pierwiastek z liczby ujemnej wymusza liczby zespolone. Wrócimy do nich w lekcji 1.7. Liczby zespolone i fazory.



Za każdym razem nowe liczby muszą spełniać te same reguły: przemienność, łączność, rozdzielność mnożenia względem dodawania. To właśnie reguły, a nie obrazek „dodawania jabłek”, mówią nam, co znaczy $(-2) \cdot (-3)$ albo 2^{-3} . Tę samą myśl wykorzystamy przy potęgach.

1.2 Dlaczego $\sqrt{2}$ nie jest ułamkiem

Przypuśćmy, że $\sqrt{2} = p/q$, gdzie ułamek jest skrócony, czyli p i q nie mają wspólnego dzielnika. Wtedy $p^2 = 2q^2$, więc p^2 jest parzyste, a zatem p też (kwadrat liczby nieparzystej jest nieparzysty). Piszemy $p = 2m$ i dostajemy $4m^2 = 2q^2$, czyli $q^2 = 2m^2$. Teraz q też jest parzyste. Ułamek dał się więc skrócić przez 2, wbrew założeniu. Sprzeczność oznacza, że $\sqrt{2}$ nie jest ilorazem liczb całkowitych.

W praktyce liczby niewymierne poznajemy przez przybliżenia: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142... Każde przybliżenie jest ułamkiem, a kolejne są coraz bliżej $\sqrt{2}$. Feynman podkreśla, że ściśle zdefiniowanie takiej „granicy przybliżeń” to najtrudniejszy krok w całym ciągu rozszerzeń. Nam wystarczy obraz: **liczby rzeczywiste wypełniają oś liczbową bez dziur.** FLP I-22-3

1.3 Przedziały

Zbiory liczb rzeczywistych zapisujemy jako przedziały. Nawias kwadratowy oznacza, że koniec należy do przedziału, okrągły, że nie należy:

$$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}, \quad (a; b) = \{x : a < x < b\}.$$

Przedział może być nieograniczony: $[a; \infty)$ to wszystkie $x \geq a$. Symbol ∞ nie jest liczbą, więc przy nim zawsze stoi nawias okrągły. W polskim zapisie końce oddziela średnik, bo przecinek jest separatorem dziesiętnym: $[0,5; 2]$. W tekstach angielskich pisze się $[0.5, 2]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

1 Które z liczb są wymierne: 0,125; $\sqrt{9}$; $\sqrt{8}$; 0,333...; π ; $\frac{1}{7}$?

2 Zamień na ułamki zwykłe: 0,1666... oraz 0,272727...

3 Pokaż, że $1 + \sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2

Potęgi, pierwiastki i notacja wykładnicza

2.1 Reguły potęgowania

Dla naturalnego n potęga to mnożenie powtórzone n razy: $a^n = a \cdot a \cdots a$. Z tej definicji wynikają trzy reguły, z których korzystamy bez przerwy: FLP I-22-1 (wzory 22.1)

REGUŁY POTĘG

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

Pierwsza mówi: mnożenie potęg o tej samej podstawie to dodawanie wykładników. To z niej wyrośnie logarytm.

2.2 Wykładnik zero, ujemny i ułamkowy

Co znaczy 2^0 albo 2^{-3} ? Nie da się pomnożyć dwójki przez siebie „minus trzy razy”. Postępujemy tak jak Feynman przy liczbach ujemnych: żądamy, żeby reguła $a^m a^n = a^{m+n}$ obowiązywała dalej, i sprawdzamy, co z tego wynika. FLP I-22-3

- $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$, więc $a^0 = 1$ (dla $a \neq 0$).
- $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$, więc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- $a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^1$, więc $a^{1/2}$ to liczba, która pomnożona przez siebie daje a . Takie liczby są dwie, $\pm\sqrt{a}$; wybieramy dodatnią, żeby potęga dodatniej podstawy była dodatnia. Ogólnie $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ oraz $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Nic tu nie jest umową wymyśloną dla wygody. Poza wyborem znaku pierwiastka każda z tych równości jest jedyną możliwością, jeśli reguły mają dalej działać. Dla wykładników niewymiernych, np. $10^{\sqrt{2}}$, bierzemy coraz lepsze przybliżenia wykładnika: $10^{1,4}$, $10^{1,41}$, $10^{1,414}$... i wyniki zbliżają się do jednej liczby. FLP I-22-4

PUŁAPKA

Potęga sumy to nie suma potęg: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$. Tak samo $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; np. $\sqrt{9+16} = 5$, a $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Reguły potęg dotyczą *iloczynów*. Druga pułapka: $\sqrt{a^2} = |a|$, a nie a . Dla $a = -3$ mamy $\sqrt{9} = 3$.

W całym kursie potęgi o wykładnikach niecałkowitych bierzemy tylko z **dodatniej podstawy**. Dla $a < 0$ wyrażenie $a^{1/2}$ nie jest liczbą rzeczywistą, a $a^{1/3}$ bywa definiowane różnie w różnych programach, więc pierwiastek z liczby ujemnej piszemy wprost, np. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Przykład 2.1

Rachunek na wykładnikach

Oblicz bez kalkulatora $8^{2/3}$ oraz $\frac{(a^3b^{-2})^2}{a^4b^{-1}}$ dla $a, b > 0$.

- 1 $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$. Kolejność jest dowolna: $(8^2)^{1/3} = 64^{1/3} = 4$, ale pierwiastek najpierw daje mniejsze liczby.
- 2 Licznik: $(a^3b^{-2})^2 = a^6b^{-4}$.
- 3 Dzielenie to odejmowanie wykładników ($a^m/a^n = a^{m-n}$, bo $1/a^n = a^{-n}$):
 $a^{6-4}b^{-4-(-1)} = a^2b^{-3}$.

Wynik: $8^{2/3} = 4$, a wyrażenie jest równe $\frac{a^2}{b^3}$.

Sprawdzenie: dla $a = b = 2$ wyrażenie wyjściowe to $\frac{(8/4)^2}{16/2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, a wynik daje $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \checkmark$. Sprawdzenie z $b = 1$ nie wykryłoby błędu w wykładniku b .

2.3 Notacja wykładnicza

Fizyka sięga od rozmiaru jądra atomu (10^{-15} m) po rozmiar obserwowalnego Wszechświata (10^{26} m). Takie liczby zapisujemy jako $m \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq m < 10$ (to tzw. mantysa) i k jest całkowite:

$$299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad 0,000\,000\,52 \text{ m} = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Mnożenie liczb w tej postaci to mnożenie mantys i dodawanie wykładników, dokładnie według reguły $10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$. Dlatego **rząd wielkości** wyniku, czyli wykładnik k , zwykle widać od razu. Przedrostki jednostek to skróty potęg dziesięciu:

przedrostek	znak	mnożnik	przedrostek	znak	mnożnik
kilo	k	10^3	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	piko	p	10^{-12}

Przykład 2.2

Ile sekund ma rok?

Policz liczbę sekund w roku (365,25 doby) i porównaj z łatwą do zapamiętania liczbą $\pi \cdot 10^7$. Ile metrów ma rok świetlny?

- 1 $365,25 \cdot 24 \cdot 3600 = 365,25 \cdot 86\,400 = 31\,557\,600 \text{ s} \approx 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$.
- 2 $\pi \cdot 10^7 \approx 3,142 \cdot 10^7$. Różnica wynosi ok. 0,45%.
- 3 Rok świetlny to droga światła w ciągu roku: $3,00 \cdot 10^8 \cdot 3,156 \cdot 10^7 = 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m}$.
Mantysy mnożymy ($3,00 \cdot 3,156 = 9,47$), wykładniki dodajemy ($8 + 7 = 15$).

Wynik: rok $\approx 3,16 \cdot 10^7 \text{ s} \approx \pi \cdot 10^7 \text{ s}$; rok świetlny $\approx 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m}$.

Sprawdzenie: z dokładną prędkością światła $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ wychodzi $9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$, zgodnie z wartością w tablicach ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

6 zadań · ok. 35 min

- 1 Oblicz bez kalkulatora: $16^{3/4}$, $27^{-2/3}$, $2^{-3} \cdot 4^{1/2}$, $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$.
- 2 Uprość dla $x, y > 0$: $\frac{x^{1/2} y^3}{(x y^2)^{3/2}}$.
- 3 Korzystając tylko z reguły $a^m a^n = a^{m+n}$, uzasadnij, że $a^{3/2} = a\sqrt{a}$ dla $a > 0$.
- 4 Masa Ziemi to $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a jej średni promień $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$. Oblicz objętość Ziemi (jak kuli, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) i jej średnią gęstość. Porównaj z gęstością skał na powierzchni, ok. $2,7 \text{ g/cm}^3$. Co z tego wynika?
- 5 Dysk opisany jako „1 TB” ma 10^{12} bajtów. System operacyjny często liczy w potęgach dwójki: 1 TiB = 2^{40} bajtów. O ile procent 2^{40} jest większe od 10^{12} ? Użyj $2^{10} = 1024$.
- 6 Oszacuj, ile razy uderzy serce w ciągu 80-letniego życia przy średnim tętnie 70 na minutę. Podaj wynik w notacji wykładniczej z jedną cyfrą znaczącą.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

3.1 Co to jest funkcja

Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x z pewnego zbioru, zwanego **dziedzina**, dokładnie jedną wartość $f(x)$. Zbiór wszystkich wartości to **zbiór wartości** funkcji. W fizyce argumentem jest najczęściej czas: położenie $x(t)$, temperatura $T(t)$, napięcie $U(t)$. Ważne jest słowo „dokładnie jedną”: w danej chwili ciało jest w jednym miejscu.

Wykres funkcji to zbiór punktów $(x; f(x))$ na płaszczyźnie. Prosta pionowa przecina wykres funkcji najwyżej raz. Okrąg $x^2 + y^2 = 1$ nie jest więc wykresem funkcji $y(x)$, ale jego górna połówka $y = \sqrt{1 - x^2}$ już tak.

Jeśli wzór funkcji nie mówi inaczej, za dziedzinę bierzemy wszystkie x , dla których wzór ma sens. Szukamy trzech przeszkód: dzielenia przez zero, pierwiastka parzystego stopnia z liczby ujemnej i logarytmu z liczby niedodatniej (część 5).

3.2 Funkcja liniowa: stałe tempo zmian

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma wykres w postaci prostej. Współczynnik $b = f(0)$ to wartość początkowa, a a to **nachylenie**: o tyle rośnie f , gdy x rośnie o 1. Z dwóch punktów prostej:

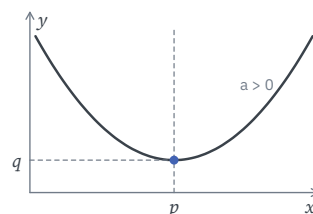
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

W fizyce funkcja liniowa oznacza **stałe tempo zmian**. Prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym, $v(t) = v_0 + at$, rośnie o a w każdej sekundzie. Przeliczanie skal temperatury, $t_F = 1,8 t_C + 32$, to też funkcja liniowa. Nachylenie 1,8 mówi, że stopień Celsjusza jest 1,8 razy „większy” od stopnia Fahrenheita. Obie skale pokazują to samo przy $t_C = -40$, bo $1,8 \cdot (-40) + 32 = -40$. W lekcji 1.3 Pochodne nachylenie stanie się pochodną: tempem zmian funkcji, która nie jest prostą.

3.3 Funkcja kwadratowa i postać kanoniczna

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ z $a \neq 0$ ma wykres w postaci paraboli: ramiona w górę dla $a > 0$, w dół dla $a < 0$. Najwięcej mówi o niej **postać kanoniczna**, którą dostajemy przez uzupełnienie do pełnego kwadratu:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - p)^2 + q, \quad p = -\frac{b}{2a},$$



Wierzchołek paraboli leży w punkcie $(p; q)$. Kwadrat $(x - p)^2$ nigdy nie jest ujemny, więc dla $a > 0$ najmniejsza wartość funkcji to q , a dla $a < 0$ największa. Miejsca zerowe paraboli, czyli

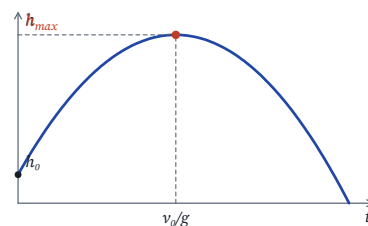
rozwiązania równania kwadratowego, omawia lekcja 0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste.

Przykład 3.1

Jak wysoko doleci piłka?

Piłkę wyrzucono pionowo w górę z wysokości 1,5 m z prędkością 12 m/s. Jej wysokość to $h(t) = 1,5 + 12t - \frac{g}{2}t^2$, gdzie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Kiedy piłka jest najwyżej i na jakiej wysokości?

- 1 Symbolicznie: $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$. Wyciągamy $-\frac{g}{2}$ przed wyrazy z t : $h = h_0 - \frac{g}{2} \left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t \right)$.
- 2 Uzupełniamy do kwadratu: $t^2 - \frac{2v_0}{g}t = \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 - \frac{v_0^2}{g^2}$.
- 3 Stąd $h(t) = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2$. Ostatni wyraz nie jest dodatni i znika dla $t = v_0/g$.
- 4 Liczby: $t^* = 12/9,81 \approx 1,22 \text{ s}$, $h_{\max} = 1,5 + \frac{144}{19,62} \approx 1,5 + 7,34 = 8,84 \text{ m}$.



Wysokość piłki w funkcji czasu:
parabola z wierzchołkiem w chwili v_0/g

Wynik: piłka jest najwyżej po $t^* = v_0/g \approx 1,22 \text{ s}$, na wysokości $h_0 + v_0^2/(2g) \approx 8,84 \text{ m}$.

Sprawdzenie: jednostki v_0^2/g : $(\text{m/s})^2/(\text{m/s}^2) = \text{m}$ ✓. Ten sam wynik daje zasada zachowania energii: $mg(h_{\max} - h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ (zob. Dział 2: Energia). Większe g oznacza niższy lot ✓.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

6 zadań · ok. 40 min

- 1 Wyznacz dziedziny: $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$.
- 2 Prosta przechodzi przez punkty (2; 5) i (6; 13). Podaj jej równanie.
- 3 Sprężyna bez obciążenia ma 12 cm długości, a z ciężarkiem 0,5 kg ma 15,5 cm. Zakładając, że długość zależy od masy liniowo, podaj wzór $L(m)$ i oblicz długość z ciężarkiem 1,2 kg. Co oznacza nachylenie?

- 4 Sprowadź do postaci kanonicznej $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$. Podaj wierzchołek i najmniejszą wartość.
- 5 Droga zatrzymania samochodu to droga przejechana w czasie reakcji kierowcy (1 s) plus droga hamowania z opóźnieniem 7 m/s^2 : $s(v) = v \cdot 1 \text{ s} + \frac{v^2}{2 \cdot 7 \text{ m/s}^2}$. Oblicz s dla 50 km/h i 100 km/h. Ile razy wzrosła droga?
- 6 Masz 40 m siatki na ogrodzenie prostokątnej działki. Jaki prostokąt ma największe pole? Wyraż pole przez długość jednego boku x i użyj postaci kanonicznej.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

4 Funkcja wykładnicza i liczba e

4.1 Wzrost o stały czynnik

Funkcja liniowa w równych odstępach czasu *dodaje* tę samą wielkość. Funkcja wykładnicza *mnoży* przez ten sam czynnik:

$$f(t) = f_0 \cdot b^t, \quad b > 0.$$

Dla $b > 1$ to wzrost wykładniczy, dla $0 < b < 1$ zanik wykładniczy. Bakterie dzielące się co 20 minut po 4 godzinach (12 podziałów) są $2^{12} = 4096$ razy liczniejsze. Izotop o czasie połowicznego rozpadu T po czasie t ma $(\frac{1}{2})^{t/T}$ początkowej liczby jąder. Kondensator rozładowujący się przez opornik ma napięcie, które w każdej milisekundzie spada o ten sam *procent*.

Wzrost wykładniczy zawsze w końcu wyprzedza każdą potęgę t^n , nawet przy wolnym starcie. To dlatego epidemie, reakcje łańcuchowe i procent składany zaskakują ludzi myślących liniowo.

4.2 Procent składany i liczba e

Lokata z oprocentowaniem 100% rocznie zamienia 1 zł w 2 zł. A gdyby odsetki dopisywać co pół roku, po 50%? Po roku mamy $1,5^2 = 2,25$ zł. Co miesiąc: $(1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2,613$. Codziennie: $(1 + \frac{1}{365})^{365} \approx 2,7146$. Wynik rośnie, ale coraz wolniej i zbliża się do granicy:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,8\dots$$

To jedna z dwóch dróg do liczby e . Drugą pokazuje Feynman i jest dla fizyka ważniejsza.

4.3 Podstawa, przy której $b^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$

Podnieśmy dowolną podstawę b do bardzo małej potęgi ε . Wynik jest bliski 1, bo $b^0 = 1$. Ile dokładnie? Dla $b = 10$ Feynman odczytał to ze swojej tabeli pierwiastków (część 5). Dostał współczynnik 2,3025 i dodał, że dokładna wartość to 2,3026: FLP I-22-4

$$10^\varepsilon \approx 1 + 2,3026 \varepsilon \quad \text{dla małych } \varepsilon.$$

Na wykresie współczynnik przy ε to nachylenie **stycznej** w punkcie $x = 0$, czyli prostej, która w tym punkcie najlepiej przylega do wykresu (dokładnie zdefiniujemy ją w lekcji 1.3 Pochodne). Dla podstawy 2 współczynnik wynosi ok. 0,693, dla podstawy 3 ok. 1,099. Rośnie razem z podstawą, więc jest taka podstawa, dla której współczynnik jest równy dokładnie 1. To właśnie e :

LICZBA E

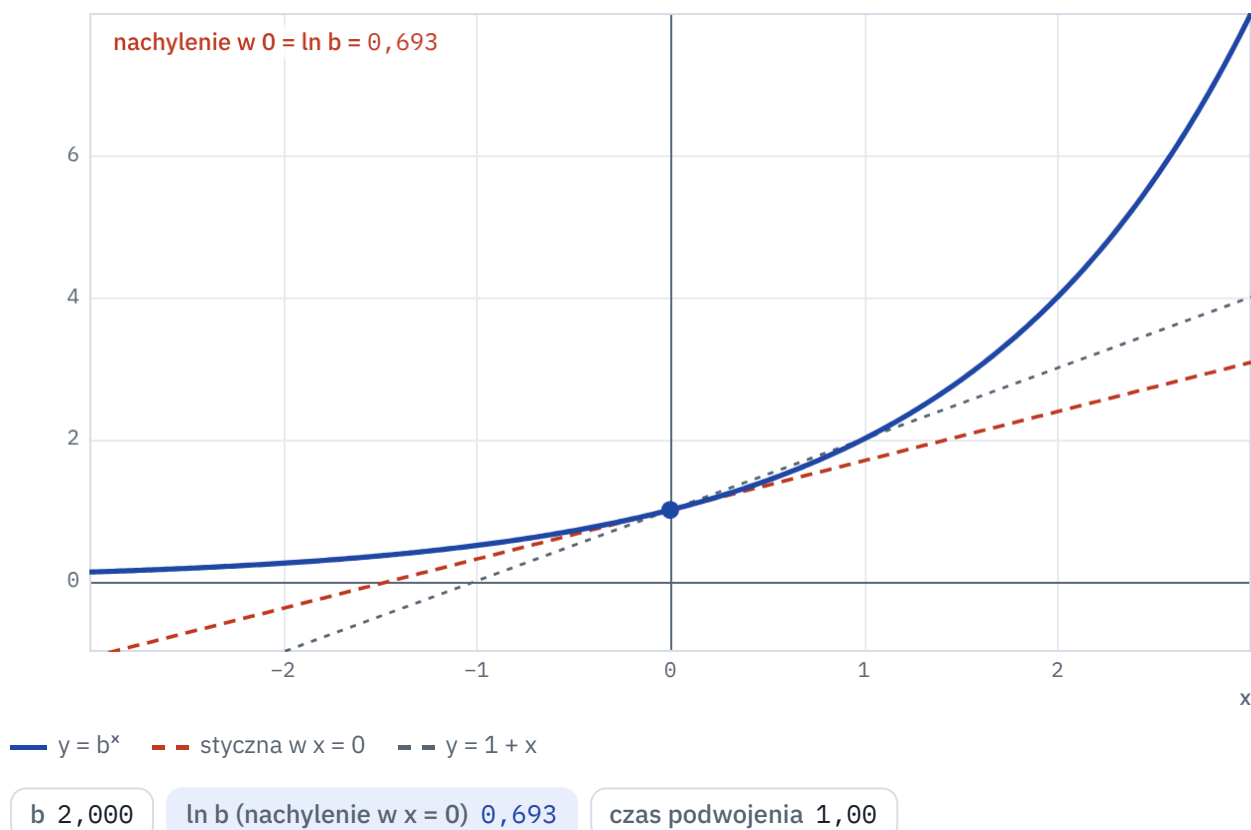
$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \quad \text{dla małych } \varepsilon, \quad e \approx 2,71828.$$

Na wykresie: styczna do $y = e^x$ w punkcie $x = 0$ ma nachylenie dokładnie 1. Dla innej podstawy nachylenie w zerze wynosi $\ln b$ (część 5).

Dlaczego to ważne? W lekcji 1.3 Pochodne zobaczysz, że wtedy funkcja e^x jest swoją własną pochodną: tempo wzrostu jest równe aktualnej wartości. Stąd w każdym procesie, w którym tempo zmian jest proporcjonalne do aktualnej wartości, pojawia się $e^{t/\tau}$ albo $e^{-t/\tau}$: w rozpadzie promieniotwórczym, przy rozładowaniu kondensatora, a przy stygnięciu herbaty dla różnicy temperatur herbaty i otoczenia. Dlatego w prawach przyrody pojawia się e , a nie 10 czy 2. Funkcję e^x zapisuje się też jako $\exp x$.

SYMULACJA 1

Funkcja b^x i jej styczna w zerze. Zmieniaj podstawę b i obserwuj nachylenie stycznej. Przy $b = e \approx 2,718$ styczna to dokładnie $y = 1 + x$. Gdy oś pionowa ma skalę logarytmiczną (część 5), wykres funkcji wykładniczej jest prostą.



Stan na rysunku: $b = 2,000$, $\ln b = 0,693$. Dla $b = e$ styczna w zerze to $y = 1 + x$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

5 zadań · ok. 35 min

- 1 Kultura bakterii podwaja się co 20 minut. Ile razy liczniejsza jest po 4 godzinach? A po 1 godzinie i 40 minutach?
- 2 Oblicz $(1 + \frac{1}{n})^n$ dla $n = 10$ i $n = 1000$. Ile cyfr po przecinku zgadza się z e ?
- 3 Lokata ma oprocentowanie 5% rocznie. Ile razy wzrośnie kapitał po 10 latach przy kapitalizacji rocznej, miesięcznej i ciągłej (czynniki $e^{0,05t}$)?
- 4 „Reguła 70”: przy wzroście o $p\%$ rocznie wielkość podwaja się po ok. $70/p$ latach. Sprawdź ją dla $p = 7$, licząc dokładnie n z warunku $1,07^n = 2$ (po przeczytaniu części 5) albo próbując kolejne n .

5

Policz kalkulatorem $\frac{10^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ oraz $\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ dla $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$. Do czego dążą? Porównaj z liczbą 2,3025 z tabeli Feynmana.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5

Logarytm

5.1 Drugie działanie odwrotne do potęgowania

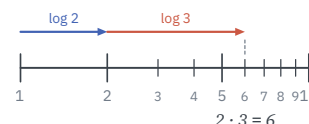
Potęgowanie ma dwa działania odwrotne, bo b^a i a^b to zwykle różne liczby. Feynman zwraca na to uwagę: pytanie „jaka liczba podniesiona do trzeciej potęgi daje 8?” prowadzi do pierwiastka, a pytanie „do jakiej potęgi podnieść 2, żeby dostać 8?” do logarytmu. FLP I-22-2

DEFINICJA LOGARYTMU

$$\log_b c = a \iff b^a = c, \quad b > 0, b \neq 1, c > 0.$$

Logarytm dziesiętny piszemy $\log x$ (bez podstawy), logarytm naturalny o podstawie e to $\ln x$, a logarytm dwójkowy w informatyce $\log_2 x$.

Logarytm istnieje tylko dla $c > 0$, bo dodatnia podstawa w dowolnej potędze daje liczbę dodatnią. Przykłady: $\log_2 32 = 5$, $\log 0,001 = -3$, $\ln e^4 = 4$, $\log_b 1 = 0$ dla każdej podstawy.



Każda reguła potęg ma swoją wersję dla logarytmów:

REGUŁY LOGARYTMÓW

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y, \quad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \quad \log_b(x^r) = r \log_b x \quad (x, y > 0).$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{zmiana podstawy}).$$

Pierwsza reguła to $b^m b^n = b^{m+n}$ czytana od tyłu. Zmiana podstawy mówi, że logarytmy przy różnych podstawach różnią się tylko stałym czynnikiem. Feynman ujmuje to tak: dowolną tablicę logarytmów dostaje się z innej, mnożąc wszystkie liczby przez jedną stałą. Na przykład $\ln x = 2,302585 \cdot \log x$. FLP I-22-4

5.2 Metoda Briggsa

Wracamy do pytania z prologu. Briggs wyciągał kolejne pierwiastki kwadratowe z 10:

k	wykładnik $s = 1/2^k$	10^s	$\frac{10^s - 1}{s}$
1	1/2	3,162 278	4,325
2	1/4	1,778 279	3,113
3	1/8	1,333 521	2,668
4	1/16	1,154 782	2,477
5	1/32	1,074 608	2,387
6	1/64	1,036 633	2,345
7	1/128	1,018 152	2,323
8	1/256	1,009 035	2,313
9	1/512	1,004 507	2,308
10	1/1024	1,002 251	2,305

Żeby znaleźć $\log 2$, dzielimy 2 przez największy czynnik z tabeli, który się mieści, potem resztę przez następny, który się mieści, i tak dalej. Każde dzielenie przez 10^s dodaje s do logarytmu. Zostaje reszta bliska 1. Dla niej korzystamy z ostatniej kolumny: kolejne liczby różnią się o 0,021; 0,010; 0,005; 0,003, czyli różnice maleją mniej więcej o połowę. Dalsze wyrazy zmniejszyłyby więc ostatnią liczbę jeszcze o ok. tyle, ile wynosi ostatnia różnica, i kolumna zbiega do ok. 2,3026. Stąd $10^\varepsilon \approx 1 + 2,3026 \varepsilon$, więc $\varepsilon \approx (\text{reszta} - 1)/2,3026$.

Przykład 5.1

$\log 2$

ręcznie

Znajdź $\log_{10} 2$ metodą Briggsa z tabeli powyżej.

- 1 $10^{1/2} = 3,16$ jest za duże. Mieści się $10^{1/4}$: $2/1,778\,279 = 1,124\,683$. Logarytm $\geq \frac{1}{4}$.
- 2 $10^{1/8}$ i $10^{1/16}$ są za duże. Mieści się $10^{1/32}$: $1,124\,683/1,074\,608 = 1,046\,598$.
- 3 Mieści się $10^{1/64}$: $1,046\,598/1,036\,633 = 1,009\,613$. Potem $10^{1/256}$: $1,009\,613/1,009\,035 = 1,000\,573$.
- 4 Suma wykładników: $\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{308}{1024} = 0,300\,781$.
- 5 Reszta $1,000\,573$: $\varepsilon \approx 0,000\,573/2,3026 = 0,000\,249$.

Wynik: $\log 2 \approx 0,300\,781 + 0,000\,249 = 0,301\,030$.

Sprawdzenie: kalkulator daje $\log 2 = 0,301\,030\,0$, zgodnie na sześciu miejscach ✓. Feynman dostał tą samą drogą $0,30103$, zgodnie na pięciu cyfrach, z tymi samymi czynnikami. (FLP I-22-4, tabela 22-2)

SYMULACJA 2

Metoda Briggsa. Wybierz liczbę c i liczbę pierwiastków w tabeli. Słupki pokazują, z jakich potęg $10^{1/2^k}$ składa się c . Bez poprawki dla reszty wynik jest dokładny do $1/2^n$, gdzie n to liczba pierwiastków w tabeli, z poprawką $10^\varepsilon \approx 1 + 2,3026 \varepsilon$ dużo lepiej.



Feynman zauważa przy tym coś więcej. Liczby w ostatniej kolumnie tabeli zbliżają się do stałej, którą on oszacował na 2,3025 (dokładnie 2,3026). Gdyby logarytmy mierzyć nie w „potęgach dziesiątki”, lecz w jednostkach 2,3026 razy mniejszych, to dla małych wykładników byłoby po prostu $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$. Tak wybrana podstawa to $e = 10^{1/2,3026} = 10^{0,4343} \approx 2,718$. Feynman pisze, że podstawa 10 bierze się tylko z liczby palców u ludzi, a e jest podstawą „naturalną”, niezwiązaną z naszą anatomią. (FLP I-22-4)

Teraz możemy też dopowiedzieć zdanie z części 4.3. Każdą podstawę da się zapisać jako potęgę e : $b = e^{\ln b}$. Wtedy $b^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln b} \approx 1 + \varepsilon \ln b$. Współczynnik przy ε to więc $\ln b$: dla $b = 10$ jest to $\ln 10 \approx 2,3026$, dla $b = 2$ jest to $\ln 2 \approx 0,693$.

5.3 Logarytmy w fizyce i technice

Logarytm pojawia się wszędzie tam, gdzie wielkość zmienia się o wiele rzędów wielkości albo gdzie pytamy o czas w procesie wykładniczym.

- **Decybele.** Poziom natężenia dźwięku $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dB. Dziesięciokrotny wzrost natężenia to +10 dB, dwukrotny to +3 dB.
- **pH** = $-\log[\text{H}^+]$, gdzie stężenie jonów wodorowych podaje się w mol/l.

--

- **Czas w procesie wykładniczym.** Z równania $N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} = N$ dostajemy $t = T \log_2 \frac{N_0}{N}$. Dla $U = U_0 e^{-t/\tau}$ mamy $t = \tau \ln \frac{U_0}{U}$.
- **Liczba cyfr.** Liczba całkowita $N \geq 1$ ma $\lfloor \log N \rfloor + 1$ cyfr, gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ to część całkowita. 2^{100} ma $\lfloor 100 \cdot 0,30103 \rfloor + 1 = 31$ cyfr.

Przykład 5.2

Rozładowanie kondensatora

Kondensator rozładowuje się przez opornik: $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, gdzie stała czasowa $\tau = RC = 2$ ms. Po jakim czasie napięcie spadnie do 10%, a po jakim do 1% wartości początkowej?

- 1 Warunek $U = 0,1 U_0$: $e^{-t/\tau} = 0,1$. Logarytmujemy obie strony: $-t/\tau = \ln 0,1 = -\ln 10$.
- 2 $t_{10\%} = \tau \ln 10 \approx 2,303 \tau = 4,61$ ms.
- 3 Dla 1%: $t_{1\%} = \tau \ln 100 = 2\tau \ln 10 \approx 4,605 \tau = 9,21$ ms.

Wynik: 10% po ok. 4,6 ms, 1% po ok. 9,2 ms.

Sprawdzenie: spadek do 1% to dwa spadki po 10 razy, więc czas jest dwa razy dłuższy ✓. W czasie τ napięcie spada do $1/e \approx 37\%$, a $\ln 10 \approx 2,3$ to ta sama liczba, którą Feynman znalazł w tabeli pierwiastków.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

7 zadań · ok. 45 min

- 1 Oblicz: $\log_2 32$, $\log 0,001$, $\ln e^4$, $\log_3 \frac{1}{9}$, $\log_5 1$.

- 2 Wiedząc, że $\log 2 \approx 0,30103$ i $\log 3 \approx 0,47712$, oblicz $\log 6$, $\log 5$, $\log 1,5$, $\log 8$.

- 3 Dwa jednakowe głośniki grają razem. O ile decybeli wzrasta poziom dźwięku w porównaniu z jednym? Ile razy wzrasta natężenie, gdy poziom rośnie o 25 dB?

- 4 Izotop ma czas połowicznego rozpadu 8 dni. Jaka część jąder zostaje po 30 dniach? Po ilu dniach zostaje 0,1%?

- 5 Oblicz $\log_2 10$ ze wzoru na zmianę podstawy. Ile bitów potrzeba, żeby zapisać liczbę milion?


6 Ile cyfr ma liczba 3^{200} i jaka jest jej pierwsza cyfra? Użyj $\log 3 \approx 0,477121$.

7 Metodą Briggsa z tabeli w części 5.2 znajdź $\log 3$. Które pierwiastki z 10 wchodzą do iloczynu?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

6 Złożenie i funkcja odwrotna

6.1 Złożenie funkcji

Plama oleju na wodzie ma promień rosnący z czasem: $r(t) = 0,5t$ (m, s). Pole koła to $A(r) = \pi r^2$. Pole plamy w chwili t dostajemy, wstawiając jedną funkcję do drugiej:

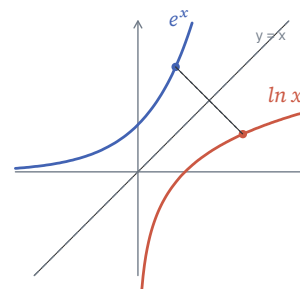
$$A(r(t)) = \pi(0,5t)^2 = 0,25\pi t^2.$$

To **złożenie** funkcji, zapisywane $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: najpierw działa g , potem f . Kolejność ma znaczenie. Dla $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 1$ mamy $f(g(x)) = (x + 1)^2$, ale $g(f(x)) = x^2 + 1$. W lekcji 1.3 Pochodne złożenie da regułę łańcuchową, jedną z najczęściej używanych reguł w fizyce.

6.2 Funkcja odwrotna

Funkcja odwrotna f^{-1} „cofa” działanie f : jeśli $y = f(x)$, to $x = f^{-1}(y)$. Przeliczenie Fahrenheita na Celsjusza jest odwrotne do przeliczenia Celsjusza na Fahrenheita: z $t_F = 1,8 t_C + 32$ wyznaczamy $t_C = (t_F - 32)/1,8$. Logarytm $\log_b$ jest odwrotny do b^x , a $\ln$ do e^x :

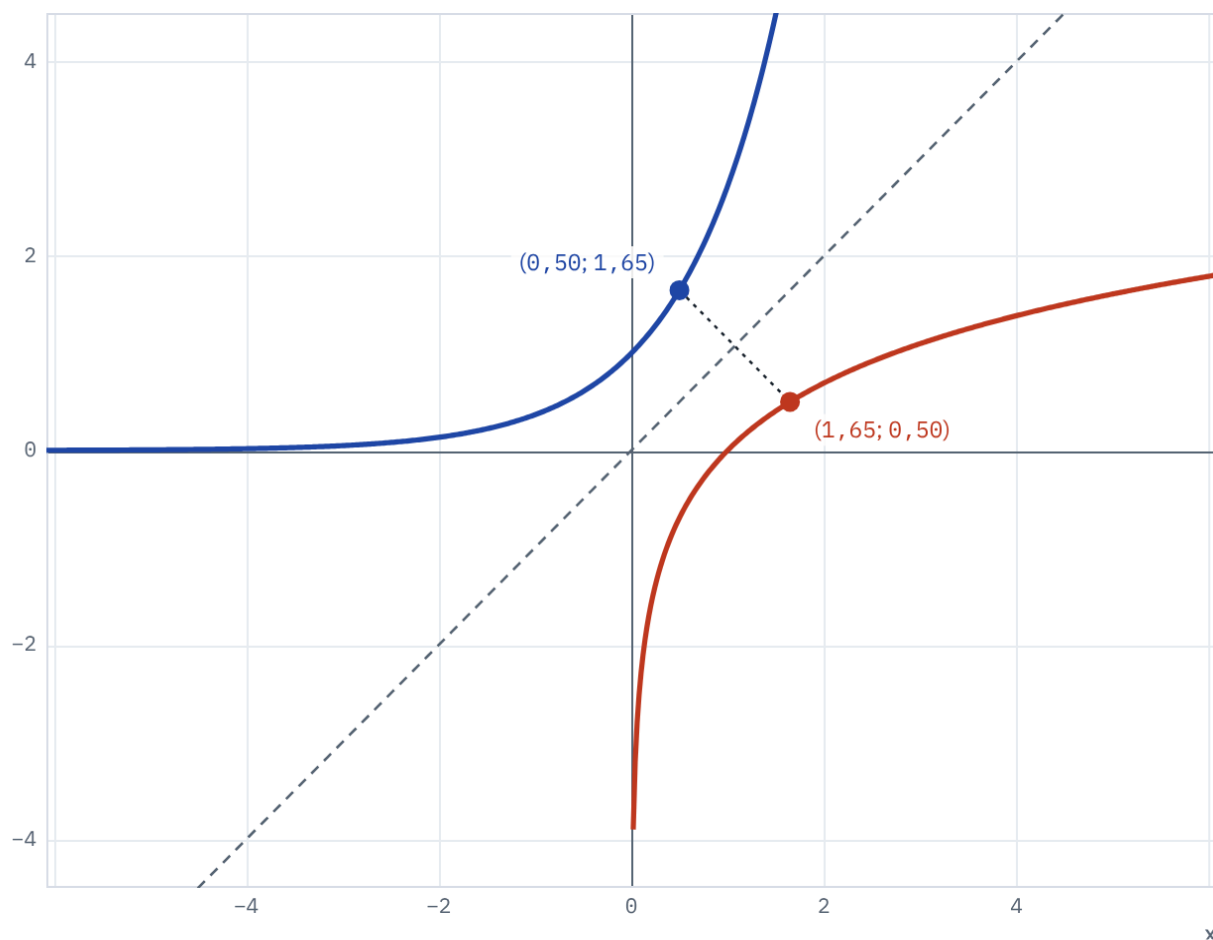
$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln e^x = x.$$



Funkcja ma odwrotną tylko wtedy, gdy różnym argumentom przypisuje różne wartości (jest **różnowartościowa**). Funkcja x^2 na całej osi tego warunku nie spełnia, bo $(-3)^2 = 3^2$. Ograniczamy więc dziedzinę do $x \geq 0$ i wtedy odwrotną jest $\sqrt{x}$. Tak samo powstaną funkcje cyklometryczne, np. $\arcsin$, w lekcji 0.3 Trygonometria i funkcje hiperboliczne.

Wykres funkcji odwrotnej to odbicie wykresu f względem prostej $y = x$, bo punkt $(a; b)$ zamienia się w punkt $(b; a)$. Wykres $\ln x$ to odbity wykres e^x .

SYMULACJA 3 Funkcja i jej odwrotna. Punkt $(x_0; f(x_0))$ na wykresie f i jego odbicie $(f(x_0); x_0)$ na wykresie f^{-1} leżą symetrycznie względem prostej $y = x$. Wybierz parę funkcji i przesuвай x_0 .



— $y = f(x)$ — $y = f^{-1}(x)$ - - $y = x$

$f(x) e^x$

$f^{-1}(x) \ln x$

$x_0 0,50$

$f(x_0) 1,649$

$f^{-1}(f(x_0)) 0,500$

Stan na rysunku: $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$, $x_0 = 0,50$, $f(x_0) = 1,649$.

Przykład 6.1

Odwracanie wzoru krok po kroku

Znajdź funkcję odwrotną do $f(x) = 2^{x-1} + 3$ i jej dziedzinę.

- 1 Piszemy $y = 2^{x-1} + 3$ i wyznaczamy x . Najpierw $y - 3 = 2^{x-1}$.
- 2 Logarytmujemy przy podstawie 2: $x - 1 = \log_2(y - 3)$, więc $x = \log_2(y - 3) + 1$.
- 3 Zamieniamy nazwy zmiennych: $f^{-1}(x) = \log_2(x - 3) + 1$. Dziedzina: $x > 3$, bo tylko takie wartości przyjmuje f .

Wynik: $f^{-1}(x) = \log_2(x - 3) + 1$ dla $x > 3$.

Sprawdzenie: $f(3) = 2^2 + 3 = 7$ i $f^{-1}(7) = \log_2 4 + 1 = 3 \checkmark$. Dziedzina f^{-1} to zbiór wartości f , a zbiór wartości f^{-1} to dziedzina f .

ZADANIA · CZĘŚĆ 6

5 zadań · ok. 30 min

- 1 Znajdź funkcję odwrotną do $f(x) = 3x - 2$. Sprawdź, że $f(f^{-1}(x)) = x$.

- 2 Dla $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x + 1$ oblicz $f(g(2))$, $g(f(2))$ oraz wzór $f(g(x))$.

- 3 Zapisz $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$ jako złożenie dwóch prostszych funkcji. Czy rozkład jest jednoznaczny?

- 4 Wyjaśnij, dlaczego $f(x) = x^2 - 4x$ nie ma funkcji odwrotnej na całej osi. Na jakim możliwie dużym przedziale zawierającym $x = 5$ ją ma?

- 5 Znajdź funkcję odwrotną do $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ dla $x \neq 1$. Jaka jest jej dziedzina?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

7 Przekształcenia wykresu

Większość funkcji w fizyce to kilka podstawowych kształtów, przesuniętych i rozciągniętych. Wystarczy rozpoznać, co zrobiono z wykresem $y = f(x)$:

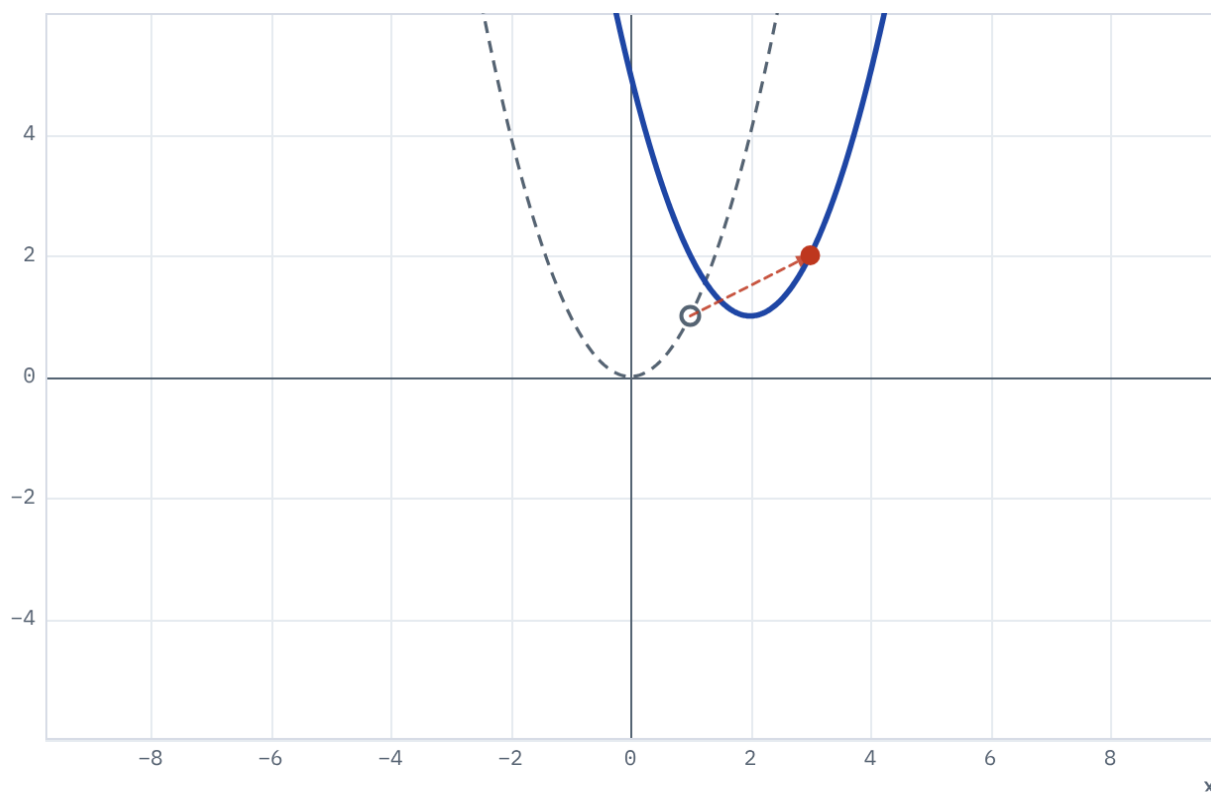
wzór	co się dzieje z wykresem
$f(x) + c$	przesunięcie o c w górę
$f(x - h)$	przesunięcie o h w prawo (znak minus!)
$A f(x)$	rozciągnięcie w pionie $ A $ razy; dla $A < 0$ także odbicie względem osi x
$f(kx)$	ściśnięcie w poziomie $ k $ razy (dla $ k < 1$ rozciągnięcie); dla $k < 0$ także odbicie względem osi y

Przesunięcie w prawo zapisuje się minusem, co na początku myli. Logika jest taka: wykres $f(x - h)$ w punkcie $x = h$ ma wartość $f(0)$, czyli to, co pierwotny wykres miał w zerze, jest teraz w h . Tak samo w $f(kx)$ wartość $f(1)$ pojawia się już w $x = 1/k$.

Ogólny przypadek $y = A f(k(x - h)) + c$ czytamy od środka: przesuwamy o h , ściskamy k razy wokół $x = h$, rozciągamy A razy, podnosimy o c .

SYMULACJA 4

Przekształcenia wykresu $y = A f(k(x - h)) + c$. Wykres przerywany to f bez zmian. Zmieniaj po jednym parametrze i sprawdź, czy wykres porusza się tak, jak przewiduje tabela.



-- $y = f(x)$ — $y = A \cdot f(k(x - h)) + c$ — punkt charakterystyczny

wzór $y = (x - 2,0)^2 + 1,0$

punkt (1; 1) przechodzi w (3,00; 2,00)

Stan na rysunku: $f(x) = x^2$, $A = 1,0$, $k = 1,0$, $h = 2,0$, $c = 1,0$; $y = (x - 2,0)^2 + 1,0$.

Przykład 7.1

Stygnąca kawa

Kawa o temperaturze $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ stygnie w pokoju o temperaturze $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jej temperatura to $T(t) = 20 + 60e^{-t/\tau}$ z $\tau = 10\text{ min}$. Opisz wykres jako przekształcenie e^{-x} i oblicz, kiedy kawa ma $40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- 1 Zaczynamy od e^{-x} : dla $x \geq 0$ maleje od 1 do 0. Wstawiamy $x = t/\tau$, czyli rozciągamy wykres w poziomie 10 razy ($k = 1/\tau$).
- 2 Mnożymy przez 60: rozciągnięcie w pionie (różnica temperatur na starcie). Dodajemy 20: przesunięcie w górę do temperatury pokoju, do której krzywa dąży.
- 3 Warunek $40 = 20 + 60e^{-t/\tau}$ daje $e^{-t/\tau} = \frac{1}{3}$, czyli $t = \tau \ln 3 \approx 10,99\text{ min}$.

Wynik: kawa ma $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ po ok. 11 minutach.

Sprawdzenie: $T(0) = 80\text{ }^{\circ}\text{C} \checkmark$, $T \rightarrow 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ dla $t \rightarrow \infty \checkmark$. Po czasie τ różnica temperatur spada do $1/e \approx 37\%$, czyli z 60 do 22 K, a do 20 K (temperatura $40\text{ }^{\circ}\text{C}$) spada odrobinę później, po $1,1\tau \checkmark$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 7

4 zadania · ok. 25 min

- 1 Opisz, jak powstaje wykres $y = (x - 2)^2 + 3$ z wykresu $y = x^2$. Gdzie jest wierzchołek?
■ ■ ■
- 2 Parabolę $y = x^2$ przesunięto o 1 w lewo, rozciągnięto 2 razy w pionie i odbito względem osi x . Podaj wzór.
■ ■ ■
- 3 Dla kawy z przykładu 7.1 oblicz, kiedy będzie miała $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ile czasu zajmuje ostatnie 5 stopni (z 25 do $20\text{ }^{\circ}\text{C}$)?
■ ■ ■
- 4 Czy wykres $y = f(2x - 6)$ jest przesunięty względem $y = f(2x)$ o 6 czy o 3 w prawo? Uzasadnij.
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Błędne intuicje

× „ $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, a $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.”

Reguły potęg dotyczą iloczynów, nie sum. $(3 + 4)^2 = 49$, a $3^2 + 4^2 = 25$ (część 2.2).

× „ $\sqrt{x^2} = x$.”

$\sqrt{x^2} = |x|$. Pierwiastek kwadratowy z definicji nie jest ujemny.

× „ $\log(a + b) = \log a + \log b$.”

Logarytm zamienia *iloczyn* w sumę: $\log(ab) = \log a + \log b$. Dla sumy nie ma prostego wzoru.

× „ 2^{-3} to liczba ujemna.”

Ujemny wykładnik oznacza odwrotność: $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$. Funkcja wykładnicza o dodatniej podstawie nigdy nie jest ujemna.

× „ $f(x - 2)$ przesuwa wykres w lewo, bo jest minus.”

W prawo. Wartość z punktu 0 pojawia się teraz w punkcie 2 (część 7).

× „ $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.”

Funkcja odwrotna to inna funkcja, a nie odwrotność wartości. Dla $f(x) = 2x$ mamy $f^{-1}(x) = x/2$, a $1/f(x) = \frac{1}{2x}$. Zapis f^{-1} jest niefortunny, ale powszechny.

× „Wzrost wykładniczy to po prostu szybki wzrost.”

To wzrost o stały *procent* w równych odstępach czasu. Na początku bywa wolniejszy od liniowego, ale w końcu wyprzedza każdą potęgę t^n (część 4.1).

Sprawdź się

1 Dlaczego $a^0 = 1$, a nie 0?

Bo reguła $a^m a^n = a^{m+n}$ ma działać dalej: $a^0 \cdot a^n = a^n$, więc a^0 musi być równe 1.

2 Ile wynosi $\log 2000$, jeśli $\log 2 \approx 0,301$?

$$\log(2 \cdot 10^3) = 3 + 0,301 = 3,301.$$

3 Co mówi nachylenie wykresu funkcji liniowej opisującej prędkość w czasie?

To przyspieszenie: o tyle rośnie prędkość w każdej sekundzie.

4 Czym wyróżnia się podstawa e spośród wszystkich podstaw funkcji wykładniczej?

Tylko dla niej $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$ dla małych ε , czyli styczna w zerze ma nachylenie 1. Dlatego e^x jest swoją własną pochodną.

5 Jak z wykresu e^x dostać wykres $\ln x$?

Odbić go względem prostej $y = x$.

6 Natężenie dźwięku wzrosło 1000 razy. O ile decybeli wzrósł poziom?

$$10 \log 1000 = 30 \text{ dB}.$$

7 Wielkość maleje wykładniczo ze stałą czasową τ . Po jakim czasie spada do 10%?

$$\text{Po } \tau \ln 10 \approx 2,3 \tau.$$

POTĘGI I LOGARYTMY

$$a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$\log_b c = a \iff b^a = c \quad (b > 0, b \neq 1, c > 0)$$

$$\log(xy) = \log x + \log y, \log x^r = r \log x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \ln x \approx 2,3026 \log x$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2,71828, e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$$

$$N_0 e^{-t/\tau} = N \Rightarrow t = \tau \ln(N_0/N)$$

FUNKCJE I WYKRESY

$$\text{liniowa: } y = ax + b, a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{kwadratowa: } y = a(x - p)^2 + q, p = -\frac{b}{2a}, \text{ wierzchołek } (p; q)$$

$$\text{wykładnicza: } y = f_0 b^t; \text{ czas podwojenia } \log_b 2$$

$$\text{złożenie: } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{odwrotna: } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y);$$

$$\text{wykres odbity względem } y = x$$

$$y = A f(k(x - h)) + c: \text{ przesunięcie } h \text{ w prawo, ściśnięcie } k, \text{ rozciągnięcie } A, \text{ przesunięcie } c \text{ w górę}$$

Do przeczytania u Feynmana

- **Obowiązkowo:** 22-1...22-4 (algebra jako ciąg uogólnień, potęgi ułamkowe, tablice Briggsa i liczba e).
- **Dla chętnych:** 22-5...22-6 (liczby zespolone i „najbardziej niezwykły wzór w matematyce”). Wróćmy do nich w lekcji 1.7 Liczby zespolone i fazory.

Do przeczytania w podręcznikach matematyki

- **K. A. Stroud**, *Engineering Mathematics*: część wprowadzająca (arytmetyka, wyrażenia algebraiczne, funkcje, funkcja wykładnicza i logarytmiczna). Bardzo dużo zadań z odpowiedziami.
- Dowolny podręcznik do matematyki w szkole średniej na poziomie rozszerzonym: rozdziały o potęgach, logarytmach i funkcjach.

Następna lekcja to równania, nierówności i wielomiany (0.2 Równania, nierówności, wielomiany i ułamki proste), w tym miejsca zerowe paraboli, której wierzchołek umiemy już znaleźć. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna wrócą w lekcji o pochodnych (1.3 Pochodne), gdzie okaże się, dlaczego e^x jest wyjątkowa, oraz w równaniach różniczkowych (4.1 Równania różniczkowe zwyczajne), gdzie opiszemy rozpad, stygnięcie i rozładowanie kondensatora.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Wymierne: $0,125 = \frac{1}{8}$, $\sqrt{9} = 3$, $0,333 \dots = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$. Niewymierne: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ i π .
2. $x = 0,1666 \dots$: $10x - x = 1,5$, więc $x = \frac{1,5}{9} = \frac{1}{6}$. $y = 0,2727 \dots$: $100y - y = 27$, więc $y = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.
3. Gdyby $1 + \sqrt{2} = r$ było wymierne, to $\sqrt{2} = r - 1$ też byłoby wymierne, bo różnica ułamków jest ułamkiem. To przeczy części 1.2.

Zadania • część 2

1. $16^{3/4} = 2^3 = 8$; $27^{-2/3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $2^{-3} \cdot 2 = \frac{1}{4}$; $\sqrt{100} = 10$.
2. Mianownik: $x^{3/2}y^3$. Iloraz: $x^{1/2-3/2}y^{3-3} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.
3. $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, więc $a^{3/2} = a^1 \cdot a^{1/2} = a\sqrt{a}$. Wykładnik $\frac{1}{2}$ to pierwiastek, bo $a^{1/2}a^{1/2} = a$.
4. $r^3 = 258 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$, $V \approx 1,08 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$, gęstość $\approx 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 5,5 \text{ g/cm}^3$. To dwa razy więcej niż skały powierzchniowe, więc wewnątrz Ziemi musi być dużo gęstsze (żelazne jądro).
5. $2^{40} = (2^{10})^4 = 1024^4 = 1,0995 \cdot 10^{12}$, czyli o ok. 10% więcej. Dlatego dysk „1 TB” system pokazuje jako ok. 0,91 TiB.
6. $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 80 \approx 2,9 \cdot 10^9$, czyli ok. $3 \cdot 10^9$ uderzeń. Rachunek w głowie: rok $\approx \pi \cdot 10^7 \text{ s}$, więc 80 lat $\approx 2,5 \cdot 10^9 \text{ s}$; tętno $\approx 1,2$ na sekundę daje $3 \cdot 10^9$.

Zadania • część 3

1. $f: x \geq 3$, czyli $[3; \infty)$. $g: \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. $h: 5 - x > 0$, czyli $(-\infty; 5)$; zero jest wykluczone, bo pierwiastek stoi w mianowniku.
2. $a = \frac{13-5}{6-2} = 2$, $b = 5 - 2 \cdot 2 = 1$, więc $y = 2x + 1$. Sprawdzenie: $2 \cdot 6 + 1 = 13 \checkmark$.
3. Nachylenie $\frac{3,5 \text{ cm}}{0,5 \text{ kg}} = 7 \text{ cm/kg}$, więc $L = 12 + 7m$ (cm, kg). Dla 1,2 kg: 20,4 cm. Nachylenie to wydłużenie na kilogram, związane ze sztywnością sprężyny: $k = \frac{0,5 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,035 \text{ m}} \approx 140 \text{ N/m}$.
4. $2(x^2 - 6x) + 13 = 2[(x-3)^2 - 9] + 13 = 2(x-3)^2 - 5$. Wierzchołek $(3; -5)$, najmniejsza wartość -5 .
5. $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$; $s \approx 13,9 + 13,8 = 27,7 \text{ m}$. $100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$; $s \approx 27,8 + 55,1 = 82,9 \text{ m}$. Droga zatrzymania wzrosła prawie trzykrotnie, bo droga hamowania rośnie z kwadratem prędkości.
6. Drugi bok to $20 - x$, pole $A(x) = x(20 - x) = -(x-10)^2 + 100$. Największe pole 100 m^2 daje kwadrat o boku 10 m.

Zadania • część 4

1. 4 h to 12 podwojeń: $2^{12} = 4096$. 100 minut to 5 podwojeń: $2^5 = 32$.
2. $n = 10$: 2,5937; $n = 1000$: 2,7169. Przy $n = 1000$ zgadzają się dwie cyfry po przecinku (2,71). Błąd maleje mniej więcej jak $e/(2n)$, czyli wolno. ...

3. Roczna: $1,05^{10} \approx 1,6289$. Miesięczna: $(1 + \frac{0,05}{12})^{120} \approx 1,6470$. Ciągła: $e^{0,5} \approx 1,6487$. Częstsza kapitalizacja daje coraz mniejszy zysk dodatkowy.
4. $1,07^{10} \approx 1,967$, $1,07^{11} \approx 2,105$. Dokładnie $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,07} \approx 10,24$ roku, a reguła daje 10. Liczba 70 bierze się z $100 \ln 2 \approx 69,3$.
5. Dla 10: 2,589; 2,329; 2,305, granica $\ln 10 = 2,302585$. Dla e : 1,0517; 1,0050; 1,0005, granica 1. Feynman, licząc ręcznie, dostał 2,3025; poprawna wartość to 2,3026, o czym on sam wspomina.

Zadania • część 5

- 5; -3; 4; -2; 0.
- $\log 6 = 0,77815$; $\log 5 = 1 - 0,30103 = 0,69897$; $\log 1,5 = \log 3 - \log 2 = 0,17609$; $\log 8 = 3 \log 2 = 0,90309$.
- Natężenie rośnie 2 razy: $10 \log 2 \approx 3,0$ dB. Wzrost o 25 dB to natężenie $10^{2,5} \approx 316$ razy większe.
- $2^{-30/8} = 2^{-3,75} \approx 0,074$, czyli ok. 7,4%. Dla 0,1%: $t = 8 \log_2 1000 = 8 \cdot \frac{3}{\log 2} \approx 8 \cdot 9,97 \approx 79,7$ dnia.
- $\log_2 10 = \frac{1}{\log 2} \approx 3,32$. $\log_2 10^6 = 6 \cdot 3,32 \approx 19,9$, więc potrzeba 20 bitów ($2^{20} = 1\,048\,576 > 10^6$).
- $\log 3^{200} = 95,424$, więc 96 cyfr. $10^{0,424} \approx 2,66$, więc liczba zaczyna się od 2 (dokładnie: 2656...).
- $3 = 10^{1/4} \cdot 10^{1/8} \cdot 10^{1/16} \cdot 10^{1/32} \cdot 10^{1/128} \cdot 1,001\,287$. Wykładniki: $\frac{256+128+64+32+8}{1024} = 0,476\,563$, poprawka $0,001\,287/2,3026 = 0,000\,559$. Razem 0,477 122 (dokładnie 0,477 121).

Zadania • część 6

- $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$. $f(f^{-1}(x)) = 3 \cdot \frac{x+2}{3} - 2 = x \checkmark$.
- $f(g(2)) = f(5) = 25$; $g(f(2)) = g(4) = 9$; $f(g(x)) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
- Np. $h = f \circ g$ z $g(x) = 1 + x^2$ i $f(u) = \sqrt{u}$. Rozkład nie jest jednoznaczny: można też wziąć $g(x) = x^2$ i $f(u) = \sqrt{1+u}$.
- $f(x) = (x-2)^2 - 4$, więc np. $f(0) = f(4) = 0$. Na przedziale $[2; \infty)$ funkcja rośnie i jest różnowartościowa; tam $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+4}$.
- $y(x-1) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = y+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$, dziedzina $x \neq 2$. Wartość 2 to ta, której f nigdy nie przyjmuje: $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$.

Zadania • część 7

- Przesunięcie o 2 w prawo i o 3 w górę. Wierzchołek (2; 3).
- $y = -2(x+1)^2$. Kolejność przesunięcia i rozciągnięcia w pionie nie ma tu znaczenia, bo rozciągnięcie odbywa się względem osi x , a przesunięcie jest poziome.
- $e^{-t/\tau} = \frac{5}{60}$, $t = \tau \ln 12 \approx 24,8$ min. Ostatnie 5 stopni trwa nieskończenie długo: krzywa zbliża się do 20 °C, ale tej temperatury nie osiąga. W praktyce po kilku τ różnicy nie da się zmierzyć.

4. O 3: $f(2x - 6) = f(2(x - 3))$. Wartość, którą $f(2x)$ ma w x_0 , funkcja $f(2x - 6)$ ma w $x_0 + 3$. Zanim odczytasz przesunięcie, wyciągnij współczynnik przy x przed nawias.

Matematyka · Liczby, potęgi, logarytmy i funkcje elementarne. Źródła: R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, t. I (Addison-Wesley 1963; New Millennium Edition 2011), rozdz. 22; K. A. Stroud, *Engineering Mathematics*. Tabela pierwiastków z 10 i wszystkie liczby w przykładach policzone na nowo. Cytaty w tłumaczeniu własnym.