

Mody podłużne: fugoida i oscylacja krótkookresowa

Macierz A z lekcji 5 ma dwie pary wartości własnych: wolną, z okresem pół minuty, i szybką, z okresem ok. dwóch sekund. Ta lekcja zagłębia do środka obu. Wektory własne pokazują, jak każdy mod wygląda z boku. Proste modele fizyczne tłumaczą, skąd biorą się częstości: fugoida to wymiana energii kinetycznej na potencjalną, a oscylacja krótkookresowa to wahadło w pochyleniu z usterzeniem jako sprężyną i tłumikiem. Na koniec łączymy to ze statyką z lekcji 4: co dzieje się z modami, gdy środek ciężkości wędruje do punktu neutralnego.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2,5 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

A. Tewari,
*Advanced Control
of Aircraft,
Spacecraft and
Rockets*, rozdz. 3.5
(przykład 3.3); E.
H. J. Pallett, S.
Coyle, *Automatic
Flight Control*,
rozdz. 1A (rys.
1.14); P. H. Zipfel,
rozdz. 7.4.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Lanchester i jego szybowce
- 1 Dwa mody, dwie skale czasu
- 2 Fugoida: wymiana energii
- 3 Oscylacja krótkookresowa: wahadło w pochyleniu
- 4 Mody a położenie środka ciężkości
- 5 Jakie mody lubi pilot
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Lanchester i jego szybowce

Frederick Lanchester puszczał w ostatnich latach XIX wieku modele szybowców i obserwował, że lecą one po falistym torze: nurkują, nabierają prędkości, wznoszą się, zwalniają, i tak w kółko. W książce *Aerodnetics* (1908) nazwał ten ruch fugoidą, chcąc oddać greckie słowo „lot”; filolodzy zauważyli potem, że $\varphi\nu\gamma\eta$ znaczy raczej ucieczkę. Nazwa została. Lanchester wyjaśnił fugoidę bez równań różniczkowych, samą zasadą zachowania energii, i podał jej okres w zależności od prędkości.

Ten sam rachunek możesz zrobić w pamięci. Szybowiec leci z prędkością U . Gdy prędkość rośnie o ΔU , siła nośna rośnie jak U^2 , czyli o $2\Delta U/U$ ciężaru, i zakrzywia tor w górę. Wznoszenie zamienia prędkość na wysokość i siła nośna znowu spada poniżej ciężaru. Powstaje oscylator: energia przelewa się między prędkością a wysokością, a siłą przywracającą jest nadwyżka albo niedobór siły nośnej względem ciężaru.

Pytanie na start. Jaki okres fugoidy przewiduje zasada zachowania energii dla samolotu lecącego z prędkością 55 m/s, jeśli kąt natarcia się nie zmienia? Pełny model z lekcji 5 daje 30 s. Odpowiedź w części 2.

Dwa mody, dwie skale czasu

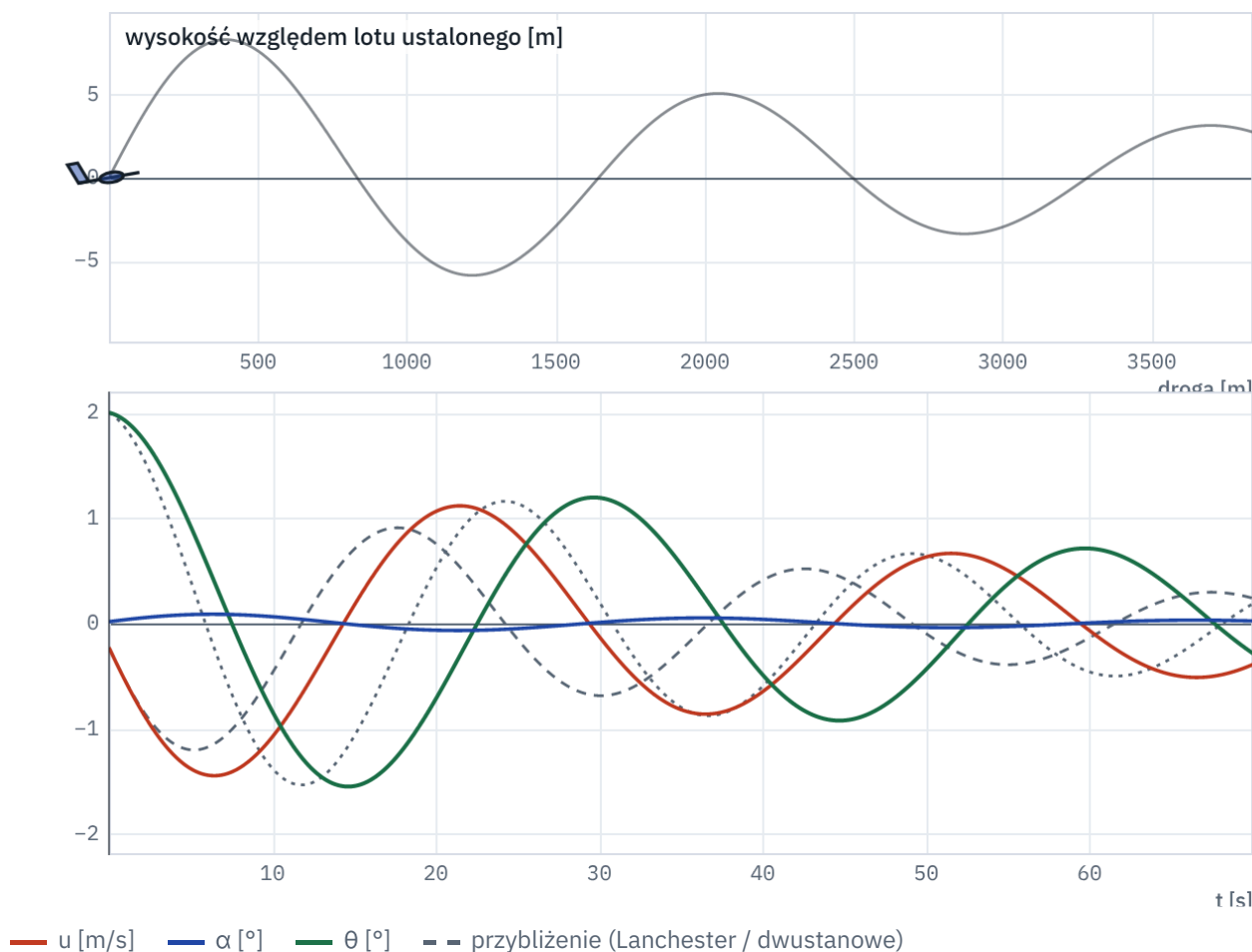
Wartości własne macierzy A z przykładu 3.3 (lekcja 5 Lot w płaszczyźnie symetrii: model podłużny i pochodne stateczności) to $-0,017 \pm 0,209i$ i $-2,44 \pm 2,57i$. Rozwiązanie ogólne jest kombinacją dwóch ruchów (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne, mody normalne), a każdy ma swój **wektor własny**: proporcje i przesunięcia fazowe, z jakimi zmieniają się u , α , θ , q . Unormowane tak, żeby amplituda pochylenia θ była 1 rad:

mod	okres	ζ	$ u $ [m/s]	$ \alpha $ [rad]	faza u względem θ
fugoida	30 s	0,082	46	0,049	+98°
krótkookresowa	2,4 s	0,69	2,2	1,36	+36°

Fugoida to ruch prędkości i pochylenia przy prawie stałym kącie natarcia (jedna dwudziesta zmian pochylenia). Krótkookresowa to ruch kąta natarcia i pochylenia przy prawie stałej prędkości: 1° zmiany θ to zaledwie 0,04 m/s zmiany u . Mody są dobrze rozdzielone (częstości różnią się 17 razy), co pozwala każdy z nich opisać osobnym, prostym modelem. Tewari pisze dokładnie to: fugoida jest wolną oscylacją u i θ przy $\alpha \approx 0$, krótkookresowa szybką oscylacją α i θ przy $u \approx 0$.

SYMULACJA 1

Samolot z boku na tle swojego toru i przebiegi u , α , θ . Pobudź osobno każdy mod (warunek początkowy wzdłuż wektora własnego) albo oba naraz podmuchem. Linie szare: przybliżenia z części 2 i 3. Pochylenie samolotu na rysunku jest powiększone.



u -0,23 m/s

α 0,02°

θ 2,00°

wysokość względna 0,0 m

energia: $\Delta(V^2/2g + h)$ -1,3 m

Fugoida: prędkość i pochylenie falują z okresem 30 s, kąt natarcia prawie się nie zmienia. Samolot wymienia energię kinetyczną na potencjalną: najwolniej leci na szczycie, najszybciej w dolinie (u i wysokość w przeciwfazie). Linie szare: przybliżenie Lanchestera, okres 25 s.

Stan na rysunku: fugoida, $t = 0,0$ s; model z przykładu 3.3 Tewarięgo przy 55 m/s; pobudzenie: część rzeczywista wektora własnego fugoidy, $\theta(0) = 2^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Fugoida ma okres 30 s i $\zeta = 0,082$. Po ilu okresach amplituda spada o połowę? Ile to sekund?

- 2 W fugoidzie amplituda pochylenia wynosi 2° . Jaka jest amplituda prędkości i kąta natarcia?

- 3 W fugoidzie u wyprzedza θ o ok. 90° . Co z tego wynika dla toru: gdzie samolot leci najszybciej, a gdzie ma największe pochylenie?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

2 Fugoida: wymiana energii

Przybliżenie Lanchestera: kąt natarcia stały, moment pomijamy (samolot sam ustawia się do toru), tłumienie zaniedbujemy. Zostają dwa równania z lekcji 5, dla u i θ :

$$\dot{u} = X_u u / m - g\theta, \quad 0 = \frac{Z_u}{mU} u + q \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{Z_u}{mU} u = \frac{2g}{U^2} u.$$

✪ FUGOIDA W PRZYBLIŻENIU LANCHESTERA

$$\ddot{u} - \frac{X_u}{m} \dot{u} + \frac{2g^2}{U^2} u = 0, \quad \omega_p \approx \frac{\sqrt{2}g}{U}, \quad T_p \approx \frac{\pi\sqrt{2}U}{g}, \quad \zeta_p \approx -\frac{X_u}{2m\omega_p}.$$

Okres rośnie liniowo z prędkością i nie zależy od samolotu. Tłumienie daje opór rosnący z prędkością.

Dla 55 m/s: $\omega_p = 0,252$ rad/s, $T_p = 24,9$ s, $\zeta_p = 0,089$. Pełny model: 0,209 rad/s, 30,0 s, 0,082. Okres wychodzi o 17% za krótki, tłumienie prawie dokładnie. To jest odpowiedź na pytanie z prologu: sama energia daje 25 s; pozostałe 5 s to wpływ ruchu kąta natarcia, który Lanchester pominął. Ruch ten jest mały ($|\alpha|/|\theta| = 0,05$), ale mnoży się przez duże $Z_\alpha/(mU)$. Uwzględnia go poprawione przybliżenie, wciąż krótkie:

$$\omega_p^2 \approx -\frac{g}{U} \frac{Z_u}{m} \cdot \frac{M_\alpha}{M_\alpha - \frac{Z_\alpha}{mU} M_q},$$

które dla przykładu 3.3 daje $\omega_p = 0,210$ rad/s i okres 29,9 s, prawie dokładnie. Przy bardzo „sztywnym” M_α drugi czynnik dąży do 1 i wracamy do Lanchestera.

Skąd wymiana energii? Całkowita energia na jednostkę ciężaru to $V^2/(2g) + h$. W fugoidzie bez oporu jest stała, więc spadek o 28 m daje przyrost prędkości o 5 m/s przy 55 m/s: $\Delta h = U\Delta u/g$. Symulacja 1 pokazuje tę sumę w ostatnim polu odczytu: w fugoidzie zmienia się tylko powoli, w wyniku tłumienia.

- 1 Policz okres fugoidy z przybliżenia Lanchestera dla 30 m/s, 55 m/s i 80 m/s.
- 2 Wyprowadź częstość fugoidy z energii: samolot na torze $h(t) = H \sin \omega t$, $V = U + u$,
 $V^2/2 + gh = \text{const}$, siła nośna $L = mg(V/U)^2$ zakrzywia tor: $mU\dot{\gamma} = L - mg$.
- 3 Policz $\zeta_p \approx -X_u/(2m\omega_p)$ i porównaj z modelem dwustanowym (u, θ) , którego macierz to

$$\begin{bmatrix} X_u/m & -g \\ -Z_u/(mU) & 0 \end{bmatrix}.$$

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

3 Oscylacja krótkookresowa: wahadło w pochyleniu

Przez dwie sekundy prędkość nie ma czasu się zmienić. Wyrzucamy więc równanie dla u , kładziemy $u = 0$ i zostaje model dwustanowy (α, q) :

$$\dot{\alpha} = \frac{Z_\alpha}{mU} \alpha + q, \quad \dot{q} = \left(\frac{M_\alpha}{J_y} + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \frac{Z_\alpha}{mU} \right) \alpha + \left(\frac{M_q}{J_y} + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \right) q.$$

🔧 OSCYLACJA KRÓTKOOKRESOWA (MODEL DWUSTANOWY)

$$s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2 = 0, \quad \omega_s^2 = \frac{Z_\alpha}{mU} \frac{M_q}{J_y} - \frac{M_\alpha}{J_y}, \quad 2\zeta_s \omega_s = - \left(\frac{Z_\alpha}{mU} + \frac{M_q}{J_y} + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \right).$$

To jest wahadło. Sztywnością jest głównie $-M_\alpha/J_y$, statyczna stateczność z lekcji 4 Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon, plus wkład $Z_\alpha M_q$ (tu 31% całości): obrót, który zakrzywia tor, zmienia kąt natarcia. Tłumienie ma trzy źródła: usterzenie hamujące obrót (M_q), opóźnione odchylenie strumienia ($M_{\dot{\alpha}}$) i siła nośna, która zakrzywia tor i sama zmniejsza kąt natarcia (Z_α). Dla przykładu 3.3: $\omega_s^2 = 3,93 + 8,6 = 12,53$, $\omega_s = 3,54$ rad/s; $2\zeta_s \omega_s = 1,96 + 2 + 0,9 = 4,86$, $\zeta_s = 0,687$. Pełny model: 3,542 i 0,688. Przybliżenie jest praktycznie dokładne.

Pallett opisuje ten ruch słowami pilota (rys. 1.14): po podmuchu nos szybko wraca, z jednym lekkim przestrzałem albo bez niego. Ten ruch leży w paśmie, w którym pilot steruje (ok. 1–10 rad/s), więc musi być dobrze tłumiony sam z siebie: słabo tłumiona krótkookresowa sprzęga się z ruchami drążka i grozi oscylacjami wzbudzonymi przez pilota. Fugoidę pilot koryguje sam, zwykle nieświadomie: jest tak wolna, że wystarczy patrzeć na prędkościomierz.

- 1 Policz ω_s i ζ_s z modelu dwustanowego, gdy M_α/J_y zmaleje dwukrotnie (środek ciężkości bliżej punktu neutralnego).
- 2 Przy jakim M_α/J_y oscylacja krótkookresowa przestaje być oscylacją ($\zeta_s = 1$)? Przy jakim staje się niestateczna?
- 3 Dlaczego w modelu dwustanowym można pominąć θ , choć występuje w pełnym modelu?

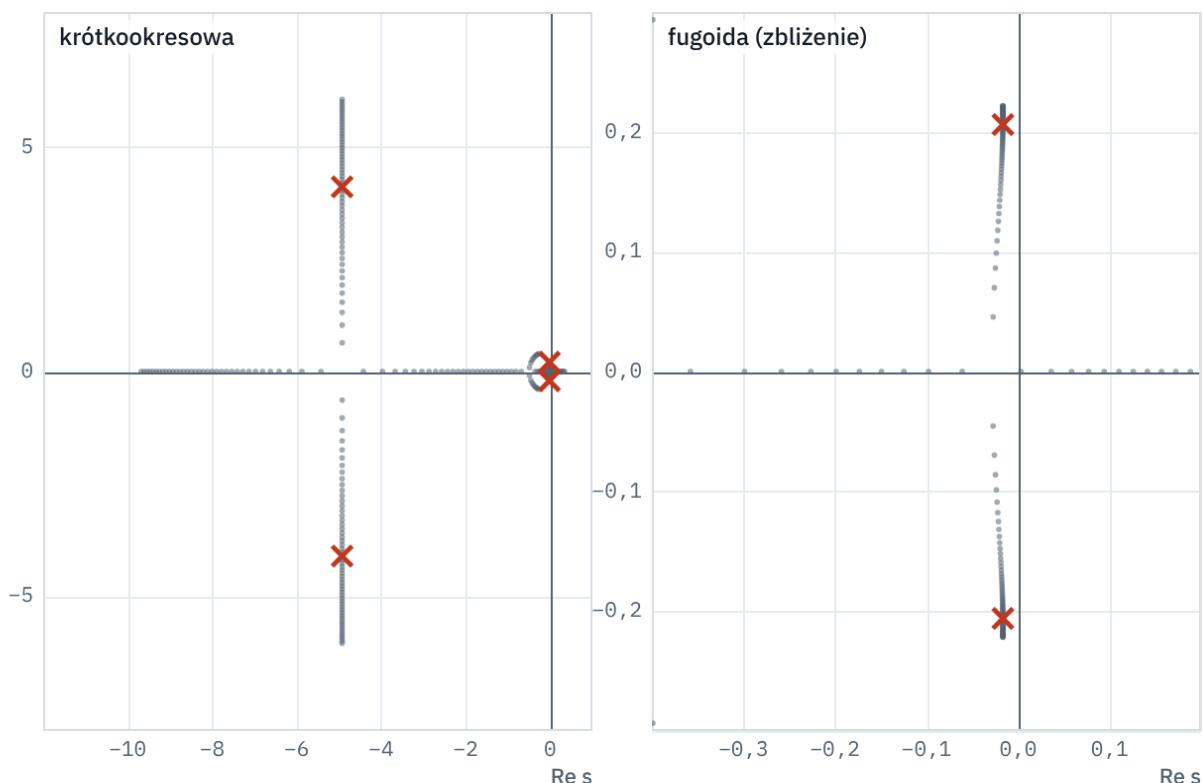
□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

4 Mody a położenie środka ciężkości

W lekcji 4 zapas stateczności był liczbą z geometrii. Tu widać, jak zmienia dynamikę. W modelu z lekcji 4 (pochodne z geometrii, nie z Tewariego) przesuwamy środek ciężkości od 15% do 60% cięciwy:

- przy dużym zapasie krótkookresowa jest szybką oscylacją: $h = 0,15$: $\omega_s = 7,8$ rad/s, $h = 0,30$: $6,4$ rad/s, z prawie stałą częścią rzeczywistą $-4,9/s$ (tłumienie nie zależy od M_α);
- przy $h \approx 0,43$ para krótkookresowa spotyka się na osi rzeczywistej i rozchodzi na dwa pierwiastki rzeczywiste: nos wraca bez przestrzału;
- fugoida wolniej (okres z 28 s do 90 s przy $h = 0,50$), a tuż przed punktem neutralnym rozpada się na dwa pierwiastki rzeczywiste;
- za punktem neutralnym ($h_n = 0,51$) jeden z nich przechodzi na prawą półpłaszczyznę: niestateczność statyczna z lekcji 4 jest niestatecznością dynamiczną modu, który był fugoidą.

SYMULACJA 2 Bieguny samolotu z lekcji 4 w funkcji położenia środka ciężkości (szare kropki: ścieżki dla h od 0,15 do 0,60; czerwone krzyżyki: wybrane h). Lewy panel: krótkookresowa, prawy: zbliżenie przy zerze. Zmieniaj też prędkość lotu.



— bieguny dla wybranego h - - ścieżki biegunów przy h od 0,15 do 0,60

zapas stateczności 0,210

pierwiastki $-0,017 + 0,206i$; $-0,017 - 0,206i$; $-4,924 + 4,108i$; $-4,924 - 4,108i$

mody zespolone $\omega = 0,21$, $\zeta = 0,080$ | $\omega = 6,41$, $\zeta = 0,768$

najwolniejsze zanikanie 61 s (stała czasowa)

Zapas dodatni: krótkookresowa jest szybką, dobrze tłumioną oscylacją, fugoida wolną i słabo tłumioną. Przesuwaj środek ciężkości do tyłu i patrz, jak bieguny krótkookresowej zbiegają się na osi rzeczywistej.

Stan na rysunku: samolot z lekcji 4, $h = 0,300$ (punkt neutralny 0,510), $V = 55$ m/s, poziom morza; pierwiastki: $-0,017 \pm 0,206i$, $-0,017 \pm 0,206i$, $-4,924 \pm 4,108i$, $-4,924 \pm 4,108i$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Dlaczego część rzeczywista biegunów krótkookresowej prawie nie zależy od położenia środka ciężkości, a część urojona tak?

- 2 W symulacji 2 zwiększ prędkość z 55 do 75 m/s przy $h = 0,30$. Co dzieje się z częstością krótkookresowej i okresem fugoidy? Wyjaśnij skalowanie.
- 3 Przy $h = 0,52$ pierwiastek niestateczny to $+0,058/s$. Ile to czasu podwojenia? Czy wygląda to bardziej na fugoidę, czy na krótkookresową?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Jakie mody lubi pilot

Stateczność to za mało: samolot z krótkookresową tłumioną przez $\zeta = 0,1$ jest stateczny, ale „pływa” po każdym ruchu drążka, a z $\zeta = 3$ reaguje ospale. Wymagania jakości pilotażu (amerykańska norma MIL-F-8785C, w praktyce wzór dla innych przepisów) podają dla krótkookresowej w podstawowych fazach lotu przedział $0,35 \leq \zeta_s \leq 1,3$, a dla fugoidy $\zeta_p \geq 0,04$ dla najlepszego poziomu jakości; na drugim poziomie wystarcza $\zeta_p \geq 0$, a na trzecim dopuszcza się lekko niestateczną fugoidę z czasem podwojenia co najmniej 55 s. Samolot z przykładu 3.3 spełnia oba warunki: $\zeta_s = 0,69$, $\zeta_p = 0,082$.

Gdy samolot ich nie spełnia (np. samolot odrzutowy na dużej wysokości ma słabo tłumioną krótkookresową, bo maleje M_q ; zadanie 8.1 lekcji 5), dodaje się automatyczny tłumik pochylenia. To jest temat lekcji 8 Augmentacja stateczności: tłumik odchylenia i pochylenia.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 15 min

- 1 Samolot ma krótkookresową $\omega_s = 3$ rad/s, $\zeta_s = 0,2$. Jakie M_q/J_y trzeba dodać (np. tłumikiem), żeby osiągnąć $\zeta_s = 0,7$, nie zmieniając ω_s ? Pomiń zmianę ω_s od członu $Z_\alpha M_q$.
- 2 Dlaczego dla fugoidy wymaganie tłumienia jest tak łagodne ($\zeta \geq 0,04$, a nawet dopuszcza się lekką niestateczność)?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

☰ METODA: ANALIZA MODÓW PODŁUŻNYCH

1. **Wartości własne** macierzy A : dwie pary, wolna i szybka.
2. **Wektory własne**: unormuj do θ ; sprawdź, które zmienne dominują.
3. **Przybliżenia**: fugoida z Lanchestera, krótkookresowa z modelu (α, q) ; porównaj z pełnym modelem.
4. **Wrażliwość**: jak mody zależą od h, U , wysokości.
5. **Sprawdzenie** z wymaganiami jakości pilotażu.

Przykład 6.1

Fugoida Lanchestera przy 55 m/s

Oszacuj okres i tłumienie fugoidy z energii i porównaj z pełnym modelem.

- 1 $\omega_p = \sqrt{2} \cdot 9,81/55 = 0,252 \text{ rad/s}$, $T_p = 2\pi/0,252 = 24,9 \text{ s}$.
- 2 $\zeta_p = 0,045/(2 \cdot 0,252) = 0,089$.
- 3 Pełny model: $\omega_p = 0,209 \text{ rad/s}$, $T_p = 30,0 \text{ s}$, $\zeta_p = 0,082$.

Wynik: okres 25 s zamiast 30 s (17% za krótki), tłumienie z błędem 9%.

Sprawdzenie: różnicę okresu usuwa poprawione przybliżenie z części 2 (29,9 s); wyzerowanie X_α w pełnym modelu nie zmienia okresu, więc winny jest skończony M_α , czyli mały ruch kąta natarcia ✓.

Przykład 6.2

Krótkookresowa z modelu dwustanowego

Policz ω_s , ζ_s i okres dla przykładu 3.3.

- 1 $Z_\alpha/(mU) = -1,964/s$, $M_q/J_y = -2/s$, $M_{\dot{\alpha}}/J_y = -0,9/s$, $M_\alpha/J_y = -8,6/s^2$.
- 2 $\omega_s^2 = (-1,964)(-2) + 8,6 = 12,53$, $\omega_s = 3,54 \text{ rad/s}$.
- 3 $2\zeta_s\omega_s = 1,964 + 2 + 0,9 = 4,864$, $\zeta_s = 0,687$; okres tłumiony $2\pi/(\omega_s\sqrt{1-\zeta_s^2}) = 2,44 \text{ s}$.

Wynik: $\omega_s = 3,54 \text{ rad/s}$, $\zeta_s = 0,69$, okres 2,4 s.

Sprawdzenie: pełny model 3,542 rad/s, 0,688 ✓.

Przykład 6.3

Podmuch: oba mody naraz

Pionowy podmuch zwiększa nagle kąt natarcia o 3° . Opisz odpowiedź samolotu z przykładu 3.3.

- 1 Pierwsza sekunda: krótkookresowa. Samolot obraca się nosem w dół, ustawiając się do nowego napływu jak wiatrowskaz (pochylenie spada do $-1,7^\circ$), kąt natarcia wraca do trymu (po 3 s zostaje $-0,04^\circ$), a dodatkowa siła nośna zakrzywia tor w górę.
- 2 Następne minuty: fugoida pobudzona tym zakrzywieniem: prędkość waha się o ok. 1,2 m/s, pochylenie o ok. $1,3\text{--}1,5^\circ$, wysokość o ok. 8 m, z okresem 30 s.

Wynik: szybkie wygaszenie kąta natarcia i powolne, słabo tłumione falowanie toru.

Sprawdzenie: amplituda wysokości $\approx U|u|/g = 55 \cdot 1,2/9,81 = 6,7 \text{ m}$, rząd 8 m z symulacji ✓ (energia nie jest tu dokładnie stała, bo podmuch ją zmienił).

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Fugoida to wahania nosa samolotu.”

To wahania toru i prędkości. Nos wędruje razem z torem, a kąt natarcia prawie się nie zmienia. Wahania nosa względem toru to oscylacja krótkookresowa.

× „Okres fugoidy zależy od konstrukcji samolotu.”

W pierwszym przybliżeniu tylko od prędkości: $T \approx \pi\sqrt{2U/g}$. Konstrukcja wpływa na poprawki i na tłumienie.

× „Lepiej mieć jak najmocniej tłumioną krótkookresową.”

Zbyt mocne tłumienie daje ospałą reakcję na drążek. Pilot chce ζ w okolicach 0,5–0,8.

× „Niestateczność statyczna od razu wywraca samolot.”

Tuż za punktem neutralnym niestateczny jest powolny mod (dawna fugoida), z czasem podwojenia kilkunastu sekund. Groźna staje się dopiero kilka procent cięciwy dalej.

× „Przybliżenia to tylko ćwiczenie; liczy się pełny model.”

Przybliżenia mówią, które pochodne sterują którym modelem. Inżynier projektujący usterzenie albo tłumik myśli właśnie nimi, a pełny model służy do sprawdzenia.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Sterowanie ciągiem.** W 1989 roku załoga DC-10 lotu 232 straciła wszystkie układy hydrauliczne i sterowała tylko ciągiem silników. Jak, w świetle tej lekcji i lekcji 5, można sterować torem samym ciągiem i dlaczego było to tak trudne?

2 **Szybowiec.** Szybowiec przy 25 m/s. Jaki okres fugoidy przewiduje Lanchester? Dlaczego fugoidę szybowca łatwo zobaczyć, a samolotu odrzutowego trudno?

3 **Rozdzielenie modów.** Przybliżenia działają, bo częstości różnią się 17 razy. Dla jakich samolotów lub warunków to rozdzielenie się psuje?

4 **Odwracalność fugoidy.** Fugoida bez oporu zachowuje energię. Czy to znaczy, że samolot bez oporu nigdy nie wróci do lotu ustalonego po zaburzeniu? Jak tę „pamięć” zaburzenia usuwa autopilot?

- 5 **Krótkookresowa i podmuchy.** Pilot czuje turbulencję jako przyspieszenia pionowe. Jak częstość krótkookresowej wpływa na to, które podmuchy odczuwa najsilniej? (Wskazówka: rezonans, lekcja Dział 6: Drgania, rezonans i układy liniowe.)

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Czym różnią się fugoida i oscylacja krótkookresowa?**

Fugoida: wolna (dziesiątki sekund), słabo tłumiona wymiana prędkości i wysokości przy stałym α . Krótkookresowa: szybka (sekundy), dobrze tłumiona zmiana α i θ przy stałej prędkości.

- 2 **Jaki okres fugoidy daje przybliżenie Lanchestera?**

$T \approx \pi\sqrt{2}U/g$; przy 55 m/s 25 s (pełny model 30 s).

- 3 **Co tłumia fugoidę?**

Opór rosnący z prędkością (X_u): $\zeta_p \approx -X_u/(2m\omega_p)$.

- 4 **Jaki jest model krótkookresowej?**

Dwustanowy (α, q): $\omega_s^2 = Z_\alpha M_q / (mU J_y) - M_\alpha / J_y$, $2\zeta_s \omega_s = -(Z_\alpha / (mU) + (M_q + M_{\dot{\alpha}}) / J_y)$.

- 5 **Co się dzieje z modami, gdy środek ciężkości zbliża się do punktu neutralnego?**

Krótkookresowa wolniej i staje się aperiodyczna, fugoida wolniej i rozpada się na pierwiastki rzeczywiste; za punktem neutralnym jeden z nich staje się dodatni.

- 6 **Jakie tłumienie krótkookresowej uznaje się za dobre?**

Ok. 0,35–1,3 (MIL-F-8785C, podstawowe fazy lotu), najlepiej 0,5–0,8.

FUGOIDA

$$\omega_p \approx \sqrt{2} g/U, T_p \approx \pi \sqrt{2} U/g$$

$$\zeta_p \approx -X_u/(2m\omega_p)$$

$$\Delta h \approx U \Delta u/g \text{ (energia)}$$

przykład 3.3: 0,209 rad/s, 30 s, $\zeta = 0,082$

KRÓTKOOKRESOWA

$$\omega_s^2 = \frac{Z_\alpha M_q}{mU J_y} - \frac{M_\alpha}{J_y}$$

$$2\zeta_s \omega_s = - \left(\frac{Z_\alpha}{mU} + \frac{M_q + M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \right)$$

przykład 3.3: 3,54 rad/s, 2,4 s, $\zeta = 0,69$

dobrze: $0,35 \leq \zeta_s \leq 1,3$; fugoida $\zeta_p \geq 0,04$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, przykład 3.3 i omówienie przybliżeń obu modów (s. 143–144).
- **Dla chętnych:** E. H. J. Pallett, S. Coyle, *Automatic Flight Control*, rozdz. 1A (stateczność dynamiczna, rys. 1.14, opis modów z perspektywy pilota); P. H. Zipfel, rozdz. 7.4.2.

Ruch w płaszczyźnie symetrii jest opisany. Ale samolot przechyla się i odchyła, a te ruchy są ze sobą splecione silniej niż ruch podłużny: przechylenie wywołuje ślizg, ślizg odchylenie, odchylenie przechylenie. Następna lekcja odkrywa w tym splocie trzy mody o bardzo różnym charakterze, w tym jeden z najbardziej podstępnych w lotnictwie: powolną spiralę.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Amplituda maleje jak $e^{-\zeta\omega t}$, $\zeta\omega = 0,017/s$. Połowa po $\ln 2/0,017 = 40$ s, czyli po ok. 1,3 okresu.
2. $2^\circ = 0,035$ rad; $|u| = 46 \cdot 0,035 = 1,6$ m/s, $|\alpha| = 0,049 \cdot 2^\circ = 0,1^\circ$. Pilot widzi to jako powolne zmiany prędkości i wysokości przy stałym położeniu nosa względem toru.
3. Przy przesunięciu 90° prędkość jest największa, gdy θ przechodzi przez zero rosnąco: w dolinie toru, tuż przed wznoszeniem. Pochylenie ($\approx$ kąt toru, bo α stałe) jest największe w połowie wznoszenia. Wysokość jest największa, gdy prędkość najmniejsza: energia przelewa się.

Zadania • część 2

1. $T = \pi\sqrt{2}U/g$: 13,6 s; 24,9 s; 36,2 s. Samolot pasażerski przy 250 m/s: 113 s, prawie dwie minuty.
2. Z energii: $Uu = -gh$ (pierwszy rząd). Z równania toru: $U\dot{\gamma} = g \cdot 2u/U = -2g^2h/U^2$. Ale $\dot{h} = U\gamma$, więc $\ddot{h} = U\dot{\gamma} = -\frac{2g^2}{U^2}h$: oscylator o $\omega = \sqrt{2}g/U$ ✓.
3. $0,045/(2 \cdot 0,252) = 0,089$. Model dwustanowy: wielomian $s^2 + 0,045s + 0,0642 = 0$, $\omega = 0,253$, $\zeta = 0,089$. Te same liczby: przybliżenie z ramki to właśnie ten model (z dokładnym $-Z_u/(mU) = 0,36/55$ zamiast $2g/U^2$).

Zadania • część 3

1. $\omega_s^2 = 3,93 + 4,3 = 8,23$, $\omega_s = 2,87$ rad/s; $\zeta_s = 4,86/(2 \cdot 2,87) = 0,85$. Wolniej i bardziej tłumione. Pełny model: 2,87 i 0,85 (symulacja 2 lekcji 5 z mnożnikiem 0,5).
2. $\zeta_s = 1$ gdy $\omega_s = 4,86/2 = 2,43$, czyli $\omega_s^2 = 5,91$, $M_\alpha/J_y = 3,93 - 5,91 = -1,98/s^2$. Niestateczna (w modelu dwustanowym), gdy $\omega_s^2 < 0$: $M_\alpha/J_y > 3,93/s^2$. To jest granica „punktu manewrowego”, położona za punktem neutralnym. Pełny model daje dywergencję już przy $M_\alpha > 0$, ale bardzo powolną: wchodzi w nią ruch prędkości, czyli dawna fugoida.
3. θ wchodzi do równań tylko przez grawitację w równaniu dla u ($-g\theta$). Gdy u wyrzucamy, θ zostaje tylko jako całka z q i nie wpływa na α ani q . Model (α, q) jest zamknięty; θ dostaje się z niego przez całkowanie.

Zadania • część 4

1. Część rzeczywista to $-\zeta\omega = \frac{1}{2}(Z_\alpha/(mU) + M_q/J_y + M_{\dot{\alpha}}/J_y)$: tłumienie od usterzenia i siły nośnej, niezależne od h (w naszym modelu ramię usterzenia liczymy od skrzydła). M_α zmienia tylko ω^2 , czyli „sztywność”: wpływa na część urojona.
2. $M_\alpha \propto \bar{q} \propto U^2$, więc $\omega_s \propto U$: krótkookresowa szybsza (ok. 8,7 rad/s). Fugoida: $\omega_p \approx \sqrt{2}g/U$ maleje, okres rośnie mniej więcej liniowo z U (pełny model: z 30 do 42 s). Mody rozchodzą się jeszcze bardziej.
3. $\ln 2/0,058 = 12$ s. Powolny, rzeczywisty: to dawna fugoida (ruch prędkości i toru), nie krótkookresowa. Samolot powoli zadziera albo opuszcza nos i rozpędza się lub zwalnia.

Zadania · część 5

1. $2\zeta\omega$ musi wzrosnąć z 1,2 do 4,2/s, czyli o 3/s. Trzeba dodać $\Delta M_q/J_y = -3/s$. Tłumik pochylenia daje dokładnie taki człon: wychylenie steru proporcjonalne do q działa jak dodatkowe M_q .
2. Fugoida ma okres kilkadziesiątu sekund: pilot ma mnóstwo czasu, żeby ją zauważyć na prędkościomierzu i wysokościomierzu i poprawić. Krótkookresowa leży w paśmie, w którym pilot sam steruje; słabo tłumiona sprzęgałaby się z jego ruchami drążka, więc musi być dobrze tłumiona „sama z siebie”.

Zadania do przemyślenia

1. Ciąg ustala kąt toru (lekcja 5), a silniki pod skrzydłami dodają moment pochylający (podnoszą nos przy dodaniu gazu). Dodanie gazu zaczyna wznoszenie, ujęcie opadanie; różnica ciągów silników daje skręt.
 2. Ciąg działa przez fugoidę: odpowiedź ma okres dziesiątek sekund i jest słabo tłumiona. Załoga musiała tłumić fugoidę samymi silnikami, z opóźnieniem ich reakcji, co przy podejściu do lądowania jest niezwykle trudne. Po tym wypadku NASA badała automatyczne sterowanie ciągiem (PCA).
1. $T = \pi\sqrt{2} \cdot 25/9,81 = 11$ s.
 2. Szybowiec ma bardzo mały opór, więc X_u jest małe i fugoida jest słabo tłumiona i krótka: widać ją jako wyraźne falowanie po puszczeniu drążka. Samolot odrzutowy ma fugoidę o okresie ponad minuty: zmiany są powolne i giną w korektach autopilota.
1. Gdy ω_s maleje (mały zapas stateczności, mała prędkość) albo ω_p rośnie (mała prędkość). Stosunek ω_s/ω_p rośnie z prędkością, więc najgorzej jest przy małej prędkości i środku ciężkości z tyłu.
 2. Wtedy mody mieszają się (symulacja 2 przy $h \approx 0,5$), a przybliżenia przestają obowiązywać. Tak bywa przy podejściu do lądowania lekkich samolotów z tylnym środkiem ciężkości i w samolotach z bardzo małym zapasem.
1. Tak: bez tłumienia oscylacja trwa wiecznie, z amplitudą ustaloną przez zaburzenie. Rzeczywiste samoloty tłumią ją oporem, słabo.
 2. Autopilot utrzymujący wysokość lub prędkość zamyka pętlę na zmiennych fugoidy (np. wysokość przez ster wysokości albo prędkość przez przepustnicę) i daje jej sztuczne tłumienie. To pętle zewnętrzne z lekcji 9 Autopilot: pętle wewnętrzne i zewnętrzne.
1. W modelu bryły sztywnej z siłami quasi-stacjonarnymi odpowiedź przyspieszenia normalnego na podmuch pionowy jest filtrem górnoprzepustowym z częstością narożną ok. ω_s (długość fali $2\pi U/\omega_s \approx 98$ m). Podmuchy dłuższe samolot „przejeżdża”: obraca się i zmienia tor, zanim przyrost siły nośnej narośnie. Krótsze przenosi w całości: bezwładność pochylenia nie pozwala mu się do nich dostosować. Przy $\zeta = 0,69$ szczyt rezonansowy jest prawie niewidoczny.
 2. Bardzo krótkie podmuchy są w rzeczywistości łagodzone przez zjawiska, których ten model nie zawiera: skrzydło wchodzi w podmuch stopniowo, a siła nośna narasta z opóźnieniem (efekt Küssnera). Słabo tłumiona krótkookresowa dawałaby wyraźny rezonans i nieprzyjemne kołysanie: kolejny powód wymagań z części 5.

Dynamika lotu · Lekcja 6: Mody podłużne · Źródła: A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (Wiley 2011, rozdz. 3.5, przykład 3.3); E. H. J. Pallett, S. Coyle, *Automatic Flight Control* (Blackwell 1993, rozdz. 1A); F. W. Lanchester, *Aerodynamics* (1908); MIL-F-8785C (1980). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l6.py).