

Lot w płaszczyźnie symetrii: model podłużny i pochodne stateczności

Statyka z lekcji 4 mówiła, w którą stronę samolot ciągnie po zaburzeniu. Teraz piszemy równania ruchu. Ograniczamy się do płaszczyzny symetrii: prędkość, kąt natarcia, pochylenie i prędkość pochylania. Najpierw szukamy stanu równowagi (trymu) metodą Newtona, potem linearyzujemy wokół niego i dostajemy układ czterech równań liniowych, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$. Współczynniki macierzy $\mathbf{A}$ to pochodne stateczności. Każda z nich ma konkretny sens fizyczny: jedne są sprężynami, inne tłumikami, a jedna wynika wprost z tego, że szybszy samolot ma większą siłę nośną.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2,5 h zadań

ZADANIA

15 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

A. Tewari,
*Advanced Control
of Aircraft,
Spacecraft and
Rockets*, rozdz. 3.5
i przykład 3.3; P.
H. Zipfel,
*Modeling and
Simulation of
Aerospace Vehicle
Dynamics*, rozdz.
7

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Bryan, 1911
- 1 Równania ruchu w płaszczyźnie symetrii
- 2 Trym jako układ równań nieliniowych
- 3 Linearyzacja i pochodne stateczności
- 4 Co znaczy każda pochodna
- 5 Ster wysokości i przepustnica
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Bryan, 1911

W 1911 roku, osiem lat po pierwszym locie braci Wright, brytyjski matematyk George Bryan wydał książkę *Stability in Aviation*. Zapisał w niej równania ruchu samolotu jako bryły sztywnej, zlinearyzował je wokół lotu ustalonego i każdą siłę oraz moment rozwinął w szereg Taylora względem zaburzeń prędkości, kąta natarcia i prędkości kątowej. Współczynniki tych rozwinięć (Bryan nazywał je pochodnymi oporu, ang. *resistance derivatives*) nazywamy dziś pochodnymi stateczności. Brakowało mu tylko danych: nikt jeszcze nie umiał ich zmierzyć. Kilka lat wcześniej Frederick Lanchester opisał bez równań różniczkowych wolne falowanie toru szybowca, które nazwał fugoidą. Bryan pokazał, że jest ono jednym z dwóch rozwiązań tego samego układu równań.

Ta lekcja to program Bryana w nowoczesnej postaci: równania w osiach ciała, trym policzony numerycznie, linearyzacja do postaci $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ z lekcji 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów. Liczby bierzemy z przykładu 3.3 Tewariego, dla lekkiego samolotu przy 55 m/s.

Pytanie na start. *Fugoida to wolne falowanie toru z okresem ok. 30 s. Która siła je tłumi: opór, siła nośna, czy moment usterzenia? Odpowiedź w części 4 i w symulacji 2.*

1

Równania ruchu w płaszczyźnie symetrii

Gdy samolot się nie przechyla, nie odchyła i nie ślizga ($P = R = V = 0$), ruch odbywa się w płaszczyźnie symetrii. Zostają cztery zmienne w osiach ciała: składowe prędkości U (wzdłuż osi x) i W (wzdłuż z , w dół), prędkość pochylania Q i kąt pochylenia Θ . Prawo Newtona zapisane w osiach obracających się z bryłą ma, tak jak równania Eulera z lekcji 2 Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia, dodatkowy człon: $m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F}$.

✚ RUCH PODŁUŻNY (OSIE CIAŁA, NED)

$$m(\dot{U} + QW) = X - mg \sin \Theta, \quad m(\dot{W} - QU) = Z + mg \cos \Theta, \quad J_y \dot{Q} = M, \quad \dot{\Theta} = Q.$$

X, Z to siły aerodynamiczne i ciąg w osiach ciała, M moment pochylający. Kąt natarcia $\alpha = \arctan(W/U)$, kąt toru $\gamma = \Theta - \alpha$. Położenie: $\dot{x} = U \cos \Theta + W \sin \Theta$, $\dot{h} = U \sin \Theta - W \cos \Theta$.

Człon $-QU$ w drugim równaniu to przyspieszenie dośrodkowe: samolot, który obraca się z prędkością Q , zakrzywia tor, a to wymaga siły normalnej mUQ . Ten człon pojawi się w każdym manewrze.

Czego potrzebujemy, żeby te równania rozwiązać? Sił X, Z i momentu M w funkcji stanu i sterowania: $X = X(U, \alpha, Q, \delta, T, \dots)$ itd. W lekcji 4 Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon mieliśmy prosty model współczynników C_L, C_D, C_m . To wystarczy do trymu.

- 1 Samolot leci poziomo i prosto z prędkością 55 m/s przy kącie natarcia $4,3^\circ$ (oś x ciała wzdłuż osi zerowej siły nośnej skrzydła). Ile wynoszą U , W , Q i Θ ?
- 2 Wyprowadź drugie równanie z $m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F}$ dla $\mathbf{v} = (U, 0, W)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, Q, 0)$ i grawitacji mg w dół NED.
- 3 Pilot ciągnie drążek: $Q = 0,2$ rad/s przy $U = 55$ m/s, W stałe. Jakie przyspieszenie normalne i jakie przeciążenie odczuwa?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

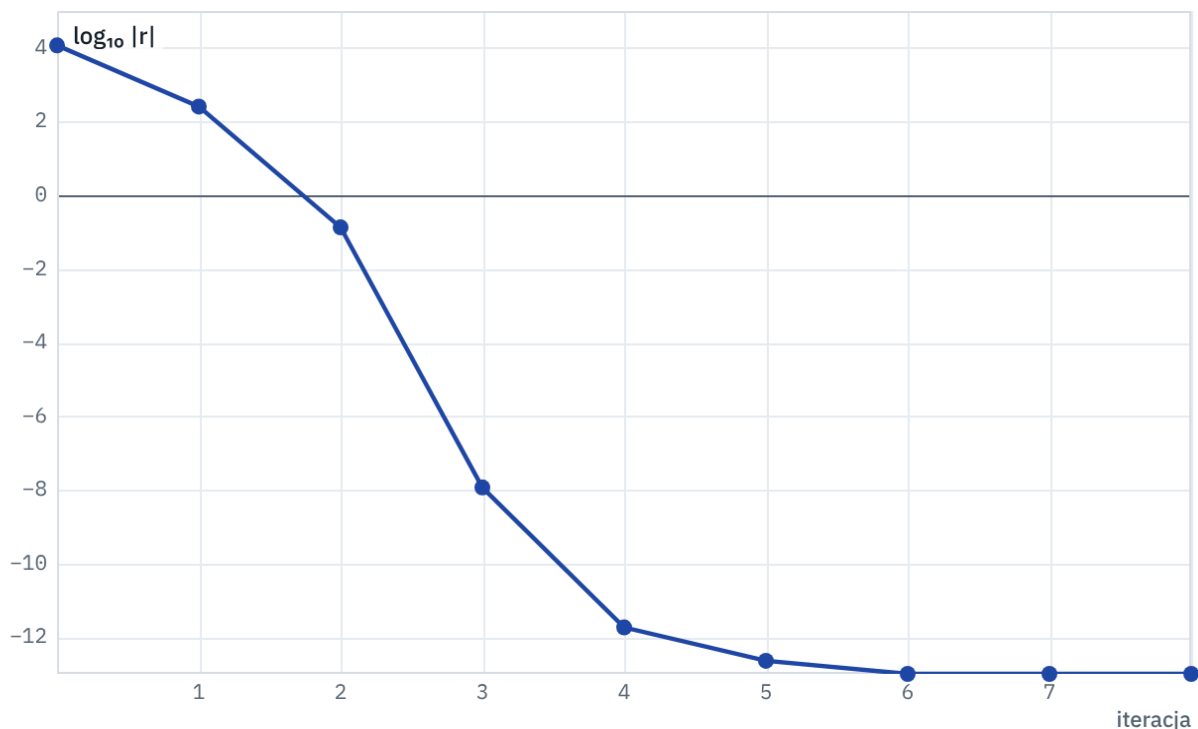
2 Trym jako układ równań nieliniowych

Lot ustalony to punkt, w którym wszystkie pochodne stanu są zerowe. Dla lotu prostoliniowego ze stałą prędkością V i kątem toru γ niewiadome to kąt natarcia α , wychylenie steru δ i ciąg T . Równania (ciąg wzdłuż osi x , przez środek ciężkości):

$$\mathbf{r}(\alpha, \delta, T) = \begin{bmatrix} T \cos \alpha - D(\alpha, \delta) - mg \sin \gamma \\ L(\alpha, \delta) + T \sin \alpha - mg \cos \gamma \\ C_m(\alpha, \delta) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Układ jest nieliniowy przez $T \cos \alpha$, $T \sin \alpha$ i opór kwadratowy w C_L . W lekcji 4 Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon rozwiązaliśmy jego wersję liniową; tu robimy to porządnie metodą Newtona z lekcji 6.2 Metody numeryczne: Python i C++: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}_k)$, z jacobianem $J = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{x}$ liczonym różnicami skończonymi. Tak liczą trym prawdziwe symulatory (Zipfel, rozdz. 7): dla każdego punktu z obwiedni lotu, przed linearyzacją.

SYMULACJA 1 Trym samolotu z lekcji 4 (środek ciężkości w 30% cięciwy) metodą Newtona. Wykres: logarytm normy reszty w kolejnych iteracjach; tabela: wartości niewiadomych. Zmieniaj prędkość i kąt toru. Spróbuj startu z daleka.



— norma reszty |r| (skala log.)

α trymu 4,26°
 δ trymu -2,64°
 ciąg 1111 N
 prędkość wznoszenia V sin γ 0,00 m/s

Reszta spada z ok. 10⁴ do 10⁻⁸ w trzech krokach: zbieżność kwadratowa, liczba poprawnych cyfr podwaja się w każdym kroku. Ciąg rośnie o mg·sin γ przy wznoszeniu; kąt natarcia i ster prawie się nie zmieniają.

Stan na rysunku: V = 55 m/s, γ = 0,0°, samolot z lekcji 4 (h = 0,30), ciąg wzdłuż osi zerowej siły nośnej skrzydła, przez środek ciężkości; jacobian liczony różnicami skończonymi.

it.	α [°]	δ [°]	T [N]	r
0	0,0000	0,0000	0,0	1,17e+4
1	4,2925	-2,6716	866,9	2,55e+2
2	4,2610	-2,6389	1110,8	1,34e-1
3	4,2611	-2,6389	1110,8	1,15e-8
4	4,2611	-2,6389	1110,8	1,83e-12
5	4,2611	-2,6389	1110,8	2,27e-13

Przy 55 m/s w locie poziomym Newton startujący z zera daje po trzech krokach $\alpha = 4,26^\circ$, $\delta = -2,64^\circ$, $T = 1111$ N (przykład 6.1). Reszta spada jak $10^4 \rightarrow 10^2 \rightarrow 10^{-1} \rightarrow 10^{-8}$: zbieżność kwadratowa. Wznoszenie pod kątem 5° wymaga ciągu 2050 N; kąt natarcia i ster prawie się nie zmieniają, bo siła nośna musi zrównoważyć tylko $mg \cos \gamma$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- Ile jest równań i niewiadomych w trymie lotu prostoliniowego w płaszczyźnie symetrii?
Co jest dane, a co szukane?
- Normy reszty w kolejnych krokach: $1,2 \cdot 10^4$; $2,5 \cdot 10^2$; 0,13; $1,2 \cdot 10^{-8}$. Sprawdź, że $|r_{k+1}|/|r_k|^2$ jest mniej więcej stałe. Co to mówi o metodzie?
- Przy 35 m/s trym wymaga mniejszego ciągu (883 N) niż przy 55 m/s (1111 N). Dlaczego?
Przy jakiej prędkości opór jest najmniejszy? ($C_{D0} = 0,03$, $e = 0,8$, $AR = 7,3$)

□ □ □ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Linearyzacja i pochodne stateczności

Wokół trymu piszemy $U = U_e + u$, $\alpha = \alpha_e + \alpha'$ (dalej bez primu), $\Theta = \theta_e + \theta$, $Q = q$, i pomijamy iloczyny małych zaburzeń (lekcja 4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność).

Przyrosty sił i momentu rozwijamy w szereg Taylora do pierwszego rzędu:

$$\bar{X} = X_u u + X_\alpha \alpha + X_q q, \quad \bar{Z} = Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q q, \quad \bar{M} = M_u u + M_\alpha \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q q.$$

Współczynniki $X_u = \partial X / \partial u$ itd. to **pochodne stateczności**. Człon z $\dot{\alpha}$ wygląda dziwnie (siła zależna od prędkości zmian kąta natarcia), ale ma prosty sens, który omówimy w części 4. W osiach stateczności (oś x wzdłuż prędkości w trymie, $\theta_e = 0$ dla lotu poziomego) i przy pominięciu małych X_q , $Z_{\dot{\alpha}}$, Z_q , M_u dostajemy układ Tewariego (równ. 3.151–3.152):

MODEL PODŁUŻNY W PRZESTRZENI STANÓW (LOT POZIOMY)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{mU} & \frac{X_\alpha}{mU} & -g & 0 \\ \frac{Z_u}{mU} & \frac{Z_\alpha}{mU} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} & \frac{M_\alpha}{J_y} + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \frac{Z_\alpha}{mU} & 0 & \frac{M_q}{J_y} + \frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ q \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta \\ \Delta T / m \end{bmatrix}.$$

Przykład 3.3 (Tewari), $U = 55$ m/s: $X_u/m = -0,045/s$, $Z_u/m = -0,36/s$, $X_\alpha/m = 1,96$ m/s², $Z_\alpha/m = -108$ m/s², $M_\alpha/J_y = -8,6/s^2$, $M_{\dot{\alpha}}/J_y = -0,9/s$, $M_q/J_y = -2/s$.

Skąd wiersz czwarty? Równanie momentu ma $M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}$ po prawej stronie, a $\dot{\alpha}$ wyrażamy z wiersza drugiego. Wartości własne tej macierzy (przykład 6.2) dają dwa mody: wolny o okresie 30 s i szybki o okresie 2,4 s. To fugoida i oscylacja krótkookresowa, tematy lekcji 6 Mody podłużne: fugoida i oscylacja krótkookresowa.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz z danych przykładu 3.3 elementy drugiego wiersza macierzy A .

- 2 Tewari pomija Z_q i $Z_{\dot{\alpha}}$. Gdyby je zachować, drugie równanie miałoby postać $(mU - Z_{\dot{\alpha}})\dot{\alpha} = Z_u u + Z_{\alpha}\alpha + (mU + Z_q)q$. Dlaczego pominięcie jest uzasadnione?

- 3 Sprawdź jednostki: X_u/m w 1/s, Z_{α}/m w m/s², M_{α}/J_y w 1/s², M_q/J_y w 1/s. Pokaż, że każdy wiersz równania $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ jest wymiarowo spójny.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

4 Co znaczy każda pochodna

Pochodne wylicza się półempirycznie z geometrii albo mierzy w tunelu i w locie. Dla zrozumienia wystarczy prosty model z lekcji 4 Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon. W tabeli obok wartości Tewariego są nasze oszacowania z tego modelu (1100 kg, $J_y = 1825 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, środek ciężkości w 44% cięciwy, przy którym M_{α} wychodzi jak u Tewariego):

pochodna	wzór (model z lekcji 4)	sens fizyczny	Tewari	nasz model
X_u/m	$-2\bar{q}SC_D/(mU)$	szybciej, to większy opór (tłumik prędkości)	-0,045	-0,037
Z_u/m	$-2\bar{q}SC_L/(mU) = -2g/U$	szybciej, to większa siła nośna	-0,36	-0,357
X_{α}/m	$\bar{q}S(C_L - C_{D\alpha})/m$	większy kąt natarcia przechyla siłę nośną do przodu	1,96	4,07
Z_{α}/m	$-\bar{q}S(a + C_D)/m$	nachylenie krzywej nośności	-108	-148
M_{α}/J_y	$\bar{q}S\bar{c}C_{m\alpha}/J_y$	stateczność statyczna („sprężyna”)	-8,6	-8,65

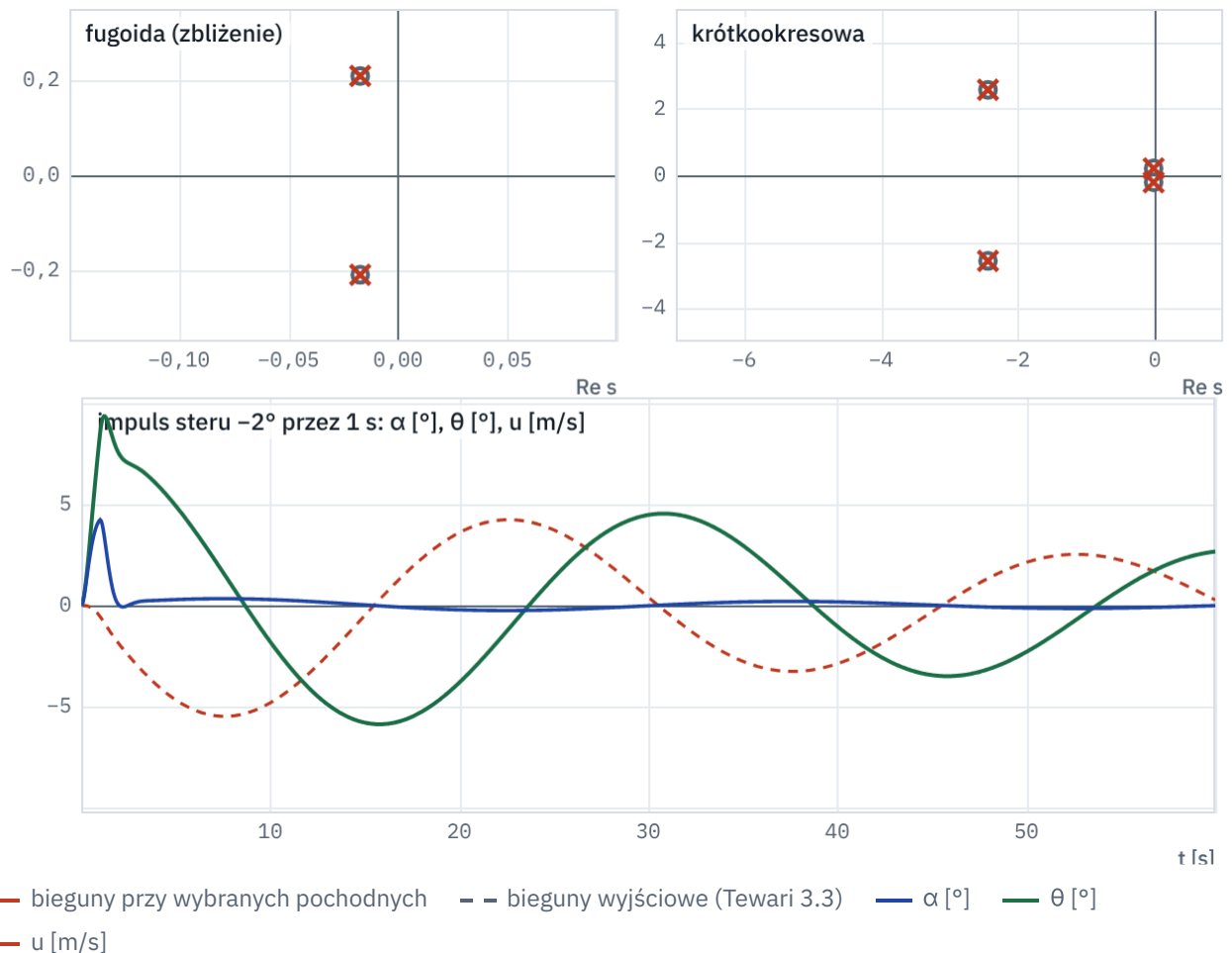
pochodna	wzór (model z lekcji 4)	sens fizyczny	Tewari	nasz model
M_q/J_y	$\bar{q}S\bar{c} C_{mq} \frac{\bar{c}}{2U}/J_y, C_{mq} \approx -2\eta a_H V_H \frac{l_H}{\bar{c}}$	tłumienie przez usterzenie	-2	-5,0
$M_{\dot{\alpha}}/J_y$	jak M_q , z $C_{m\dot{\alpha}} \approx C_{mq} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$	opóźnienie odchylenia strumienia	-0,9	-2,1

Najpiękniejszy wiersz to Z_u : przy stałym kącie natarcia siła nośna rośnie jak U^2 , więc $\partial L/\partial U = 2L/U = 2mg/U$. Ta pochodna nie zależy od kształtu samolotu, tylko od prędkości, i rzeczywiście Tewari ma $-0,36$, a $2g/U = 0,357$. Pozostałe różnią się o czynnik do 2,5, bo to inny samolot o nieznanym nam masie i bezwładności, a nasz model tłumienia (samo usterzenie, bez kadłuba i skrzydła) jest zgrubny. Zgadza się rzędy wielkości i znaki, i to wystarcza, żeby rozumieć mody.

Pochodna $M_{\dot{\alpha}}$ ma sens czasowy: strumień odchylony przez skrzydło dociera do usterzenia po czasie $l_H/U \approx 0,08$ s. Gdy kąt natarcia rośnie, usterzenie widzi jeszcze odchylenie „sprzed chwili”, mniejsze niż obecne, więc ma większy kąt natarcia i daje dodatkowy moment hamujący. Działa jak dodatkowe tłumienie.

SYMULACJA 2

Model z przykładu 3.3. Wybierz pochodną i zmień jej mnożnik (0 wyłącza ją zupełnie). Na górze bieguny: fugoida (zbliżenie przy zerze) i oscylacja krótkookresowa, szare kółka to model wyjściowy. Na dole odpowiedź na krótki impuls steru wysokości w górę. Sprawdź, co tłumi fugoidę, a co oscylację krótkookresową.



fugoida $\omega = 0,210$ rad/s, $\zeta = 0,082$, $T = 30,1$ s

krótkookresowa $\omega = 3,542$ rad/s, $\zeta = 0,688$, $T = 2,4$ s

pierwiastki rzeczywiste brak

stateczność stateczny

M_q to tłumik: obracający się samolot zmienia kąt natarcia usterzenia, które hamuje obrót. Bez M_q oscylacja krótkookresowa jest słabiej tłumiona (ζ 0,69 $\rightarrow$ 0,49).

Stan na rysunku: macierz A z przykładu 3.3 Tewariego ($U = 55$ m/s), mnożniki: $M_a \times 1,00$, $M_q \times 1,00$, $M_{\dot{\alpha}} \times 1,00$, $Z_a \times 1,00$, $X_u \times 1,00$, $Z_u \times 1,00$; sterowanie $Z_{\delta}/m = -9,7$ m/s², $M_{\delta}/J = -25$ 1/s² (model z lekcji 4).

Odpowiedź na pytanie z prologu: fugoidę tłumi X_u , czyli wzrost oporu z prędkością. Bez niego fugoida w tym modelu jest lekko niestateczna ($\zeta = -0,025$). Moment usterzenia (M_q , $M_{\dot{\alpha}}$) tłumi oscylację krótkookresową. Na fugoidę $M_{\dot{\alpha}}$ prawie nie wpływa, a M_q zmienia jej okres i tłumienie o ok. 20–25% (bez M_q okres spada do 25 s, wartości Lanchestera z lekcji 6). Główne mechanizmy tłumienia są więc różne dla obu modów.

- 1 Policz $Z_u/m = -2g/U$ dla 55 m/s i dla 40 m/s. Jak zmieni się ta pochodna, jeśli samolot poleci wyżej z tą samą prędkością?
- 2 Z $M_\alpha/J_y = -8,6/s^2$ policz $C_{m\alpha}$ i zapas stateczności, przyjmując $J_y = 1825 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\bar{q}S\bar{c} = 44\,600 \text{ N}\cdot\text{m}$ i $a = 5,39/\text{rad}$.
- 3 W symulacji 2 wyzeruj X_u . Fugoida dostaje $\zeta = -0,025$. Wyjaśnij to energetycznie: co robi opór rosnący z prędkością, gdy samolot na przemian nurkuje i wznosi się?

▢ podstawowe ▢ średnie ▢ feynmanowskie

5 Ster wysokości i przepustnica

Do macierzy B potrzebujemy pochodnych sterowania. Z modelu z lekcji 4 (przy środku ciężkości 0,44): $Z_\delta/m = -\bar{q}SC_{L\delta}/m = -9,7 \text{ m/s}^2$ i $M_\delta/J_y = \bar{q}S\bar{c}C_{m\delta}/J_y = -25/s^2$ (znak według konwencji z lekcji 4: $\delta > 0$ to ster w dół). Ciąg działa wzdłuż osi x przez środek ciężkości, więc wpływa tylko na pierwsze równanie, z $X_T/m = 1/m$ na niuton.

✎ STAN USTALONY PO ZMIANIE STEROWANIA

$0 = A\mathbf{x}_\infty + B\mathbf{u}$, czyli $\mathbf{x}_\infty = -A^{-1}B\mathbf{u}$. Wiersz momentu (z $q = 0$, $\dot{\alpha} = 0$): $M_\alpha\alpha + M_\delta\delta = 0$ (dokładnie: człony z $M_{\dot{\alpha}}$ znoszą się dzięki wierszowi drugiemu), więc **ster ustala kąt natarcia**, a przez niego prędkość. Wiersz siły wzdłuż toru: **nadmiar ciągu ustala kąt wznoszenia**, $\Delta\gamma = \Delta T/(mg)$.

To jest jedna z najważniejszych lekcji pilotażu i automatyki lotu jednocześnie, sprzeczna z intuicją kierowcy. Ciągnięcie drążka na stałe przede wszystkim spowalnia samolot do nowego kąta natarcia. Kąt toru zmienia się tylko o tyle, o ile przy nowej prędkości zmienia się opór. Przy 55 m/s, powyżej prędkości najmniejszego oporu (38 m/s, zadanie 2.3), wolniejszy lot ma mniejszy opór, więc stały ciąg daje lekkie wznoszenie; poniżej tej prędkości ten sam ruch drążka dałby opadanie. Dodanie gazu przy tym samym trymie nie przyspiesza samolotu: prędkość wraca do tej samej wartości, a samolot zaczyna się wznosić. W modelu: $\delta = -1^\circ$ (ster w górę) daje w stanie ustalonym α większe o $2,9^\circ$, prędkość mniejszą o ok. 15 m/s (to już daleko poza zakresem linearyzacji, ale kierunek jest dobry) i kąt toru tylko o $1,6^\circ$ większy, a nadmiar ciągu 550 N daje wznoszenie pod kątem $2,9^\circ$ bez zmiany prędkości. Autopilot z lekcji 9 Autopilot: pętle wewnętrzne i zewnętrzne używa dokładnie tego podziału: przepustnicą trzyma tor albo prędkość, sterem wysokości drugą z tych wielkości.

- 1 Pilot dodaje 550 N ciągu przy niezmiennym trymie. Jaki będzie kąt wznoszenia i prędkość wznoszenia przy 55 m/s?
■ ■ ■
- 2 Pokaż z wierszy drugiego i czwartego, że w stanie ustalonym $\alpha_\infty = -M_\delta \delta / M_\alpha$ dokładnie. Policz dla $\delta = -1^\circ$ i porównaj z wynikiem pełnego rozwiązania (2,9°).
■ ■ ■
- 3 Dlaczego dobrze zaprojektowany samolot ma linię ciągu przechodzącą blisko środka ciężkości ($M_T \approx 0$)? Co by się działo przy silniku wysoko nad środkiem ciężkości (jak w wodnosamolotach)?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

☰ METODA: OD SAMOLOTU DO MACIERZY A , B

1. Model sił i momentów (C_L , C_D , C_m w funkcji α , δ , q , $\dot{\alpha}$) i ciągu.
2. Trym metodą Newtona dla zadanej prędkości, wysokości i kąta toru.
3. Pochodne analitycznie albo różnicami skończonymi wokół trymu.
4. Macierze A , B w osiach stateczności; jednostki w każdym wierszu.
5. Sprawdzenie: $Z_u \approx -2g/U$; znaki $M_\alpha < 0$, $M_q < 0$; wartości własne: jedna wolna i jedna szybka para.

Przykład 6.1

Trym przy 55 m/s metodą Newtona

Samolot z lekcji 4 ($h = 0,30$), lot poziomy, 55 m/s. Start: $\alpha = \delta = 0$, $T = 0$.

- 1 Krok 0: $\mathbf{r} = (-902; -11\,620; 0,034)$, $|\mathbf{r}| = 1,2 \cdot 10^4$ (brak siły nośnej i ciągu).
- 2 Krok 1: $\alpha = 4,293^\circ$, $\delta = -2,672^\circ$, $T = 867$ N; $|\mathbf{r}| = 255$.
- 3 Krok 2: $\alpha = 4,261^\circ$, $\delta = -2,639^\circ$, $T = 1110,8$ N; $|\mathbf{r}| = 0,13$.
- 4 Krok 3: zmiany w piątej cyfrze; $|\mathbf{r}| = 1,2 \cdot 10^{-8}$.

Wynik: $\alpha = 4,26^\circ$, $\delta = -2,64^\circ$, $T = 1111$ N.

Sprawdzenie: liniowy trym z lekcji 4 dawał $4,29^\circ$ i $-2,67^\circ$; ciąg $\approx$ opór 1,1 kN z przykładu 10.5 fizyki ✓.

Przykład 6.2

Macierz

A

i jej wartości własne

Złóż macierz A z danych przykładu 3.3 i policz wartości własne.

- 1 Wiersz 4: $\frac{M_{\dot{\alpha}}}{J_y} \frac{Z_u}{mU} = (-0,9)(-0,0065) = 0,0059$; $-8,6 + (-0,9)(-1,964) = -6,833$; $-2 - 0,9 = -2,9$.
- 2
$$A = \begin{bmatrix} -0,045 & 1,96 & -9,81 & 0 \\ -0,0065 & -1,964 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,0059 & -6,833 & 0 & -2,9 \end{bmatrix}.$$
- 3 Wartości własne (numerycznie): $-0,0173 \pm 0,209i$ i $-2,44 \pm 2,57i$.

Wynik: fugoida $\omega = 0,21$ rad/s, $\zeta = 0,082$, okres 30 s; krótkookresowa $\omega = 3,54$ rad/s, $\zeta = 0,69$, okres 2,4 s.

Sprawdzenie: zgodne z wynikiem polecenia `damp` u Tawariego ✓. Stosunek częstości 17: mody są dobrze rozdzielone, co wykorzystamy w lekcji 6.

Przykład 6.3

Skąd

$$Z_u = -2g/U$$

Pokaż, że w locie poziomym przy stałym kącie natarcia $Z_u/m = -2g/U$, i sprawdź wartość Tawariego.

- 1 W osiach stateczności $Z \approx -L = -\frac{1}{2}\rho U^2 SC_L$ (siła nośna działa w górę, czyli w stronę $-z$).
- 2 $Z_u = \partial Z / \partial U = -\rho U SC_L = -2L/U$.
- 3 W trymie $L = mg$, więc $Z_u/m = -2g/U = -2 \cdot 9,81/55 = -0,357/s$.

Wynik: $-0,357/s$ wobec $-0,36/s$ u Tawariego.

Sprawdzenie: pominęliśmy zależność C_L od liczby Macha i Reynoldsa, uzasadnioną przy 55 m/s ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Ster wysokości służy do wznoszenia.”

W stanie ustalonym ustala kąt natarcia, czyli prędkość. Kąt toru zmienia się tylko przez zmianę oporu przy nowej prędkości (w naszym modelu o ok. $1,6^\circ$ na stopień steru, przy prędkości najmniejszego oporu wcale). O wznoszeniu decyduje nadmiar mocy, czyli przepustnica. Krótkotrwale ster oczywiście podnosi nos i tor, ale energii z niego nie przybędzie.

× „Pochodne stateczności to stałe samolotu.”

Zależą od punktu lotu: prędkości, wysokości, masy, położenia środka ciężkości, klap. Dlatego trym i linearyzację robi się dla wielu punktów obwiedni, a regulatory programuje się w funkcji tych warunków (lekcja 3.3 automatyki).

× „Kąt pochylenia to kąt natarcia.”

$\theta = \alpha + \gamma$. W locie poziomym są równe, we wznoszeniu i nurkowaniu nie. Samolot może mieć nos w górę i lecieć w dół (podejście do lądowania przy małej prędkości).

× „Model liniowy wystarczy do każdego manewru.”

Opisuje małe zaburzenia wokół trymu. Zmiana prędkości o 15 m/s przy 55 m/s albo przeciągnięcie wychodzą poza jego zakres; tam potrzebny jest pełny model z lekcji 10.

× „Człon $M_{\dot{\alpha}}$ to egzotyka.”

To opóźnienie, z jakim odchyłony strumień dociera do usterzenia. Daje zauważalną część tłumienia krótkookresowej (bez niego ζ spada z 0,69 do 0,56).

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Wysokość.** Samolot leci na 3000 m z tą samą prędkością przyrządową (ciśnienie dynamiczne bez zmian). Gęstość jest mniejsza o 26%. Które pochodne się zmieniają i jak?

- 2 **Osie ciała czy stateczności?** Dlaczego Tewari linearyzuje w osiach stateczności, a symulatory 6 DOF (Zipfel) liczą w osiach ciała?
- 3 **Podmuch.** Jak wprowadzić do modelu wiatr: podmuch pionowy w_g i poziomy u_g ? Które zmienne widzi aerodynamika, a które bezwładność?
- 4 **Jedna pochodna na raz.** W symulacji 2 ustaw mnożnik M_α na $-0,25$, czyli $M_\alpha/J_y \approx +2,15/s^2$ (środek ciężkości za punktem neutralnym). Co dzieje się z modami i dlaczego niestateczność jest wolna?
- 5 **Pochodne z symulatora.** Mając nieliniowy model sił (np. z lekcji 10), jak policzyć macierz A bez wyprowadzania wzorów? Na co uważać przy wyborze kroku różnic skończonych?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Jakie są zmienne stanu modelu podłużnego?**

u (zaburzenie prędkości), α , θ , q .

- 2 **Jak znaleźć trym?**

Rozwiązać nieliniowy układ równań sił i momentu (np. metodą Newtona) ze względu na α , δ , T .

- 3 **Co to są pochodne stateczności?**

Współczynniki rozwinięcia Taylora sił i momentów względem zaburzeń stanu i sterowania wokół trymu, np. $M_\alpha = \partial M / \partial \alpha$.

- 4 **Ile wynosi Z_u/m w locie poziomym?**

$-2g/U$, niezależnie od samolotu.

5 Które pochodne tłumią fugoide, a które oscylację krótkookresową?

Fugoidę X_u (opór od prędkości); krótkookresową M_q , $M_{\dot{\alpha}}$ i Z_{α} .

6 Czym w stanie ustalonym steruje ster wysokości, a czym przepustnica?

Ster: kątem natarcia, czyli prędkością. Przepustnica: kątem toru (wznoszeniem).

RÓWNANIA I TRYM

$$m(\dot{U} + QW) = X - mg \sin \Theta, m(\dot{W} - QU) = Z + mg \cos \Theta$$

$$J_y \dot{Q} = M, \dot{\Theta} = Q, \gamma = \Theta - \alpha$$

$$\text{trym: } \mathbf{r}(\alpha, \delta, T) = 0, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x}_\infty = -A^{-1} B \mathbf{u}; \Delta \gamma = \Delta T / (mg)$$

POCHODNE (MODEL PROSTY)

$$X_u = -2\bar{q}SC_D/U, Z_u = -2\bar{q}SC_L/U = -2mg/U$$

$$Z_\alpha = -\bar{q}S(a + C_D), M_\alpha = \bar{q}S\bar{c}C_{m\alpha}$$

$$M_q = \bar{q}S\bar{c}C_{mq}\frac{\bar{c}}{2U}, C_{mq} \approx -2\eta a_H V_H \frac{l_H}{\bar{c}}$$

$$C_{m\dot{\alpha}} \approx C_{mq} \frac{d\bar{c}}{d\alpha}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, rozdz. 3.5–3.5.1 i przykład 3.3 (kilka stron, z macierzą A i wartościami własnymi).
- **Dla chętnych:** P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*, rozdz. 7 (pochodne w różnych układach osi, linearyzacja z modelu symulacyjnego); D. J. Newman, rozdz. 4.3.

Mamy macierz A i jej wartości własne: jedną parę wolną i słabo tłumioną, drugą szybką i dobrze tłumioną. Następna lekcja zagląda do środka obu: jak wygląda każdy mod (wektory własne), skąd biorą się jego częstość i tłumienie, i dlaczego bardzo proste modele, Lanchestera dla fugoidy i dwustanowy dla krótkookresowej, trafiają prawie dokładnie.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $U = 55 \cos 4,3^\circ = 54,85 \text{ m/s}$, $W = 55 \sin 4,3^\circ = 4,12 \text{ m/s}$, $Q = 0$, $\Theta = \alpha + \gamma = 4,3^\circ$. W osiach stateczności (oś x wzdłuż prędkości w trymie) byłoby $W = 0$ i $\Theta = 0$; Tewari używa właśnie ich.
2. $\omega \times \mathbf{v} = (QW, 0, -QU)$. Grawitacja w osiach ciała przy pochyleniu Θ : $mg(-\sin \Theta, 0, \cos \Theta)$ (trzeci wiersz macierzy R z lekcji 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony). Składowa z : $m(\dot{W} - QU) = Z + mg \cos \Theta$.
3. $\dot{W} = 0$, więc $Z + mg \cos \Theta = -mUQ$: przyspieszenie dośrodkowe $UQ = 11 \text{ m/s}^2$ skierowane „w górę” samolotu. Przeciążenie $n = 1 + UQ/g = 2,1$ (przy $\Theta \approx 0$).

Zadania · część 2

1. Trzy równania (siła wzdłuż x , wzdłuż z , moment) i trzy niewiadome (α, δ, T). Dane: masa, prędkość, kąt toru, gęstość powietrza, położenie środka ciężkości.
2. $2,5 \cdot 10^2 / (1,2 \cdot 10^4)^2 = 1,7 \cdot 10^{-6}$; $0,13 / (2,5 \cdot 10^2)^2 = 2,1 \cdot 10^{-6}$; $1,2 \cdot 10^{-8} / 0,13^2 = 7 \cdot 10^{-7}$. Rząd wielkości ten sam: zbieżność kwadratowa (lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++). Ostatni stosunek jest mniejszy, bo reszta zbliża się do dokładności różnic skończonych.
3. Opór to suma oporu szkodliwego, rosnącego jak V^2 , i indukowanego, malejącego jak $1/V^2$. Minimum, gdy są równe: $C_L = \sqrt{\pi e A R C_{D0}} = 0,74$, czyli $V = \sqrt{2mg / (\rho S C_L)} = 38 \text{ m/s}$. 35 m/s leży tuż poniżej, 55 m/s wyraźnie powyżej. Wolniej niż 38 m/s opór znowu rośnie: „druga strona” krzywej oporu.

Zadania · część 3

1. $Z_u / (mU) = -0,36/55 = -0,0065/\text{s}$, $Z_\alpha / (mU) = -108/55 = -1,964/\text{s}$, potem 0 i 1. Zgadza się z macierzą u Tewariego.
2. Oba człony pochodzą od siły nośnej usterzenia, które jest małe w porównaniu ze skrzydłem. Porównujemy je z mU , przy masie rzędu 1100 kg ok. 60 500 kg·m/s; dla samolotu lekkiego $|Z_q|, |Z_{\dot{\alpha}}|$ to setki do kilku tysięcy w tych samych jednostkach, czyli poprawka rzędu procenta.
3. Wiersz 1: $[\dot{u}] = \text{m/s}^2$; $(X_u/m)u$: $1/\text{s} \cdot \text{m/s} \checkmark$, $(X_\alpha/m)\alpha$: $\text{m/s}^2 \cdot \text{rad} \checkmark$, $g\theta \checkmark$. Wiersz 2: $[\dot{\alpha}] = 1/\text{s}$; $Z_u u / (mU)$: $(1/\text{s})(\text{m/s})/(\text{m/s}) \checkmark$; $Z_\alpha \alpha / (mU)$: $(\text{m/s}^2)/(\text{m/s}) \checkmark$; $q \checkmark$. Wiersz 4: $[\dot{q}] = 1/\text{s}^2$; $M_\alpha \alpha / J_y \checkmark$, $M_q q / J_y$: $(1/\text{s})(1/\text{s}) \checkmark$.

Zadania · część 4

1. $-0,357/\text{s}$ i $-0,49/\text{s}$. Wysokość nie zmienia jej wcale: $-2g/U$ nie zawiera gęstości (mniejsza gęstość jest skompensowana większym C_L w trymie).
2. $C_{m\alpha} = -8,6 \cdot 1825/44\,600 = -0,35/\text{rad}$; $K_n = 0,35/5,39 = 0,065$. W geometrii z lekcji 4 to środek ciężkości w $0,51 - 0,065 = 0,44$ cięciwy, blisko tylnej granicy.
3. W fugoidzie energia przelewa się między kinetyczną a potencjalną. Opór rosnący z prędkością zabiera więcej energii w szybkich fazach, czyli tłumia wahania. Bez X_u idealny model Lanchestera (stały kąt natarcia) dałby fugoidę obojętną. Małe ujemne tłumienie w pełnym modelu bierze się ze sprzężenia z ruchem kąta natarcia: skończone M_α razem z M_q sprawiają, że α zmienia się trochę w

niekorzystnej fazie (przy dziesięciokrotnie większym M_α ujemne tłumienie prawie znika). Człon X_α działa wręcz lekko tłumiąco. To, że samoloty mają fugoidę stateczną, zawdzięczamy oporowi.

Zadania • część 5

1. $\Delta\gamma = 550/(1100 \cdot 9,81) = 0,051 \text{ rad} = 2,9^\circ$; prędkość wznoszenia $55 \cdot 0,051 = 2,8 \text{ m/s}$ (ok. 550 stóp na minutę).
2. Wiersz drugi przy $\dot{\alpha} = q = 0$: $Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_\delta \delta = 0$. Wiersz czwarty zawiera $M_{\dot{\alpha}}/(mU)$ razy dokładnie to samo wyrażenie, więc te człony się zerują i zostaje $M_\alpha \alpha + M_\delta \delta = 0$. $\alpha = -(-25)(-1^\circ)/(-8,6) = 2,9^\circ \checkmark$. Wiersz momentu ustala więc kąt natarcia niezależnie od ciągu.
3. Przy $M_T \neq 0$ zmiana ciągu zmienia też trym kąta natarcia, więc przepustnica przestaje być czystym sterem toru. Silnik wysoko nad środkiem ciężkości przy dodaniu gazu opuszcza nos (moment ujemny), przy ujęciu gazu podnosi: zmiana mocy przy podejściu do lądowania wymaga jednoczesnej korekty sterem. Tewari wymaga $Z_T = M_T = 0$ w swoim projekcie autopilota.

Zadania do przemyślenia

1. Prędkość rzeczywista rośnie o $1/\sqrt{0,74} = 1,16$ raza. Siły i momenty przy tym samym $\bar{q}$ są te same, więc Z_α/m , M_α/J_y bez zmian; $Z_\alpha/(mU)$ maleje o 14% (słabsze „zakrzywianie toru” na radian).
2. M_q zawiera $\bar{c}/(2U)$: maleje o 14%, tłumienie krótkookresowej spada. $Z_u = -2g/U$ też maleje, fugoida wolniejsza. Wysoko samolot jest „luźniejszy” w tłumieniu, co jest jednym z powodów stosowania tłumików w samolotach odrzutowych.
2. 1. W osiach stateczności $W_e = 0$, $\theta_e = 0$ (dla lotu poziomego): równania liniowe są najprostsze, a siła nośna i opór leżą wzdłuż osi. Ale osie te zależą od trymu: inne dla każdego punktu lotu.
2. Symulator nieliniowy musi działać przy dowolnych kątach i manewrach, więc pisze równania w osiach ciała (stały tensor bezwładności, czujniki), a współczynniki aerodynamiczne przelicza z osi prędkości. Linearyzacja jest dla niego tylko narzędziem analizy.
3. 1. Siły aerodynamiczne zależą od prędkości względem powietrza: $u - u_g$ i $\alpha - w_g/U$. Bezwładność (lewa strona równań) od prędkości względem ziemi.
2. W modelu liniowym podmuch wchodzi więc jak sterowanie: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}[u_g; w_g]$, gdzie $\mathbf{E}$ to minus kolumny $\mathbf{A}$ odpowiadające u i α (z czynnikiem $1/U$ dla w_g). Z tego modelu korzysta symulacja turbulencji w lekcji o autopilocie.
4. 1. Pojawia się dodatni pierwiastek rzeczywisty ok. $+0,19/\text{s}$ (podwojenie w ok. 3,6 s), szybki pierwiastek rzeczywisty ok. $-4,5/\text{s}$ i wolna para zespolona o okresie ok. 25 s. Mody przestają być rozdzielone: nie ma już ani klasycznej fugoidy, ani oscylacji krótkookresowej.
2. Moment przywracający zniknął, ale tłumienie M_q i Z_α wciąż działa: samolot obraca się powoli, bo każdy obrót jest hamowany. Tak było w tabeli w części 5 lekcji 4.
5. 1. Znaleźć trym (Newton), potem dla każdej zmiennej stanu i sterowania zaburzyć ją o $\pm\Delta$ i policzyć różnicę centralną pochodnych stanu: kolumna $\mathbf{A}$ to $(\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \Delta\mathbf{e}_j))/(2\Delta)$.
2. Krok za duży: błąd od nieliniowości (np. przeciągnięcie). Za mały: błędy zaokrągleń i tablic interpolowanych. Kroki dobiera się osobno dla każdej zmiennej, w jej naturalnych jednostkach (np. 0,1 m/s, $0,1^\circ$), a wynik porównuje z wartościami własnymi z symulacji.

Dynamika lotu • Lekcja 5: Model podłużny i pochodne stateczności • Źródła: A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (Wiley 2011, rozdz. 3.5, przykład 3.3); P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics* (AIAA 2000, rozdz. 7); G. H. Bryan, *Stability in Aviation* (1911). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l5.py).