

Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon

Strzała leci grotem do przodu, lotka do badmintona korkiem, a papierowy samolot z plasteliną na nosie leci, a bez niej koziołkuje. Wszystkie trzy rozstrzyga jedno pytanie: czy po zaburzeniu powstaje moment, który przywraca dawny kąt natarcia. Ta lekcja buduje odpowiedź dla samolotu: moment pochylający, środek aerodynamiczny, rola usterzenia poziomego, punkt neutralny i zapas stateczności, a potem trym, czyli ustawienie steru, przy którym samolot leci sam. Kończy się stabilnością kierunkową i poprzeczną, wiatrowskazem i wzniosem skrzydeł. Wszystko to statyka: o tym, jak samolot wraca do równowagi w czasie, mówią lekcje 5 i 6.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2,5 h zadań

ZADANIA

15 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

D. J. Newman,
*Interactive
Aerospace
Engineering and
Design*, rozdz. 7;
E. H. J. Pallett, S.
Coyle, *Automatic
Flight Control*,
rozdz. 1A

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: plastelina na nosie
- 1 Moment pochylający i środek aerodynamiczny
- 2 Usterzenie, punkt neutralny i zapas stateczności
- 3 Trym i granice położenia środka ciężkości
- 4 Stateczność kierunkowa i poprzeczna
- 5 Statyka to jeszcze nie dynamika
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: plastelina na nosie

Zrób papierowy samolot i puść go płasko. Często albo nurkuje, albo zadziera nos, traci prędkość i opada „liściem”. Przyklej na nosie kulkę plasteliny wielkości ziarnka grochu: lot się wygładza. Przesuń plastelinę na tył: samolot staje dęba i koziołkuje. Lekko podgięte do góry tylne krawędzie skrzydeł zmieniają wysokość, na jakiej leci, i prędkość, z jaką opada.

Otto Lilienthal, który przed braćmi Wright wykonał ponad dwa tysiące lotów szybowcowych, sterował przesuwaniem ciała, czyli właśnie położeniem środka ciężkości. Zginął w 1896 roku, gdy jego szybowiec w podmuchu zadarł nos i przepadł. Bracia Wright w 1903 roku zbudowali samolot celowo niestateczny w pochyleniu, ze sterem wysokości z przodu: łatwo nim manewrowali, ale pilot musiał go bez przerwy pilnować. Większość konstruktorów poszła inną drogą: samolot, który sam wraca do równowagi, z usterzeniem z tyłu. Ta lekcja wyjaśnia, dlaczego to usterzenie jest potrzebne i gdzie wolno położyć środek ciężkości.

Pytanie na start. *Samo skrzydło z typowym, wypukłym profilem ma moment pochylający, który opuszcza nos. Gdyby środek ciężkości leżał przed nim, samolot byłby stateczny. Dlaczego więc samo skrzydło (bez ogona i bez sztuczek z profilem) nie może latać? Odpowiedź w części 1.*

Moment pochylający i środek aerodynamiczny

Siły aerodynamiczne zapisujemy jak w lekcji Dział 10: Płyiny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne: ciśnienie dynamiczne $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$ razy powierzchnia razy współczynnik. Moment pochylający potrzebuje jeszcze długości, i jest nią średnia cięciwa aerodynamiczna $\bar{c}$:

$$M = \bar{q} S \bar{c} C_m.$$

Siła nośna rozkłada się wzdłuż cięciwy, więc moment zależy od punktu, względem którego go liczymy. Dla profilu istnieje punkt szczególny, **środek aerodynamiczny**: względem niego moment nie zmienia się z kątem natarcia. Teoria cienkiego profilu daje go w ćwierci cięciwy od krawędzi natarcia, a pomiary w tunelu w pobliżu tego miejsca. Względem środka aerodynamicznego profil ma stały moment $C_{m,ac}$, ujemny (opuszczający nos) dla profilu wygiętego w górę i zerowy dla symetrycznego. Cała zmiana siły nośnej z kątem natarcia „działa” w środku aerodynamicznym.

Moment względem środka ciężkości, który leży w odległości $(h - h_{ac})\bar{c}$ za środkiem aerodynamicznym (położenia mierzymy w ułamkach cięciwy od krawędzi natarcia):

STATECZNOŚĆ STATYCZNA PODŁUŻNA I ZRÓWNOWAŻENIE

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha, \quad \text{stateczność: } C_{m\alpha} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} < 0, \quad \text{trym przy } \alpha > 0 : C_{m0} > 0.$$

Samo skrzydło: $C_m = C_{m,ac} + (h - h_{ac}) C_L$, więc $C_{m\alpha} = a_w(h - h_{ac})$ i $C_{m0} = C_{m,ac}$.

Warunek $C_{m\alpha} < 0$ to dokładnie to, co robi plastelina: gdy podmuch zwiększa kąt natarcia, przyrost siły nośnej działa za środkiem ciężkości i opuszcza nos. Drugi warunek mówi, że moment musi zerować się przy dodatnim kącie natarcia, inaczej samolot ustaliłby się przy ujemnej sile nośnej. Teraz widać odpowiedź na pytanie z prologu: samo skrzydło ze środkiem ciężkości przed środkiem aerodynamicznym ma $C_{m\alpha} < 0$, ale $C_{m0} = C_{m,ac} < 0$. Jest stateczne wokół kąta, przy którym nie niesie samolotu. Dlatego potrzebny jest drugi element, który doda moment podnoszący nos. Latające skrzydła radzą sobie profilem z odgiętą do góry krawędzią spływu ($C_{m,ac} \geq 0$) albo skosem i skręceniem skrzydła, które robią z końcówek „ogon”.

⚠️ PUŁAPKA: ŚRODEK PARCIA TO NIE ŚRODEK AERODYNAMICZNY

Środek parcia to punkt, w którym działa wypadkowa siła nośna. Dla profilu wygiętego wędruje on do tyłu, gdy kąt natarcia maleje, i ucieka do nieskończoności przy zerowej sile nośnej. Do stateczności się nie nadaje. Środek aerodynamiczny stoi w miejscu, a jego cena to stały moment $C_{m,ac}$. Starsze podręczniki pilotażu mieszają oba pojęcia.

📝 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Środek ciężkości leży w 20% cięciwy, środek aerodynamiczny w 25%. Podmuch zwiększa siłę nośną skrzydła o ΔL . W którą stronę obróci się samolot?
- 2 Względem krawędzi natarcia profil cienki ma $C_{m,LE} = C_{m,ac} - C_L/4$. Pokaż, że względem punktu w ćwierci cięciwy moment nie zależy od C_L . Ile wynosi $C_{m,LE}$ przy $C_L = 0,36$ i $C_{m,ac} = -0,05$?
- 3 Samo skrzydło: $a_w = 4,94/\text{rad}$, $C_{m,ac} = -0,05$, środek ciężkości w 20% cięciwy. Policz $C_{m\alpha}$ i współczynnik siły nośnej, przy którym skrzydło jest w równowadze. Czy może latać?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Usterzenie, punkt neutralny i zapas stateczności

Usterzenie poziome to małe skrzydło w odległości l_H za środkiem aerodynamicznym skrzydła, o powierzchni S_H i nachyleniu krzywej nośności a_H . Jego kąt natarcia nie jest kątem natarcia samolotu z dwóch powodów. Po pierwsze, skrzydło odchyła strumień w dół (lekcja Dział 10: Płynty: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne, opór indukowany): kąt odchylenia ε rośnie z kątem natarcia, $d\varepsilon/d\alpha \approx 2a_w/(\pi AR)$. Po drugie, statecznik jest zamontowany pod innym

kątem niż skrzydło (Pallett nazywa tę różnicę podłużnym kątem wzniosu). Ster wysokości zmienia kąt natarcia usterzenia o $\tau\delta$, gdzie $\tau \approx 0,5-0,6$ dla steru zajmującego ok. 30-40% głębokości statecznika (w modelu przyjmujemy ostrożnie $\tau = 0,45$).

SAMOLOT Z USTERZENIEM POZIOMYM

$$C_m = C_{m,ac} + (h - h_{ac}) C_L - \eta V_H C_{L,H}, \quad C_{L,H} = a_H \left[\alpha \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) + i'_H + \tau\delta \right], \quad V_H = \frac{S_H}{S}$$

Punkt neutralny (położenie środka ciężkości, przy którym $C_{m\alpha} = 0$): $h_n = h_{ac} + \eta V_H \frac{a_H}{a} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right)$, gdzie $a = dC_L/d\alpha$ całego samolotu.

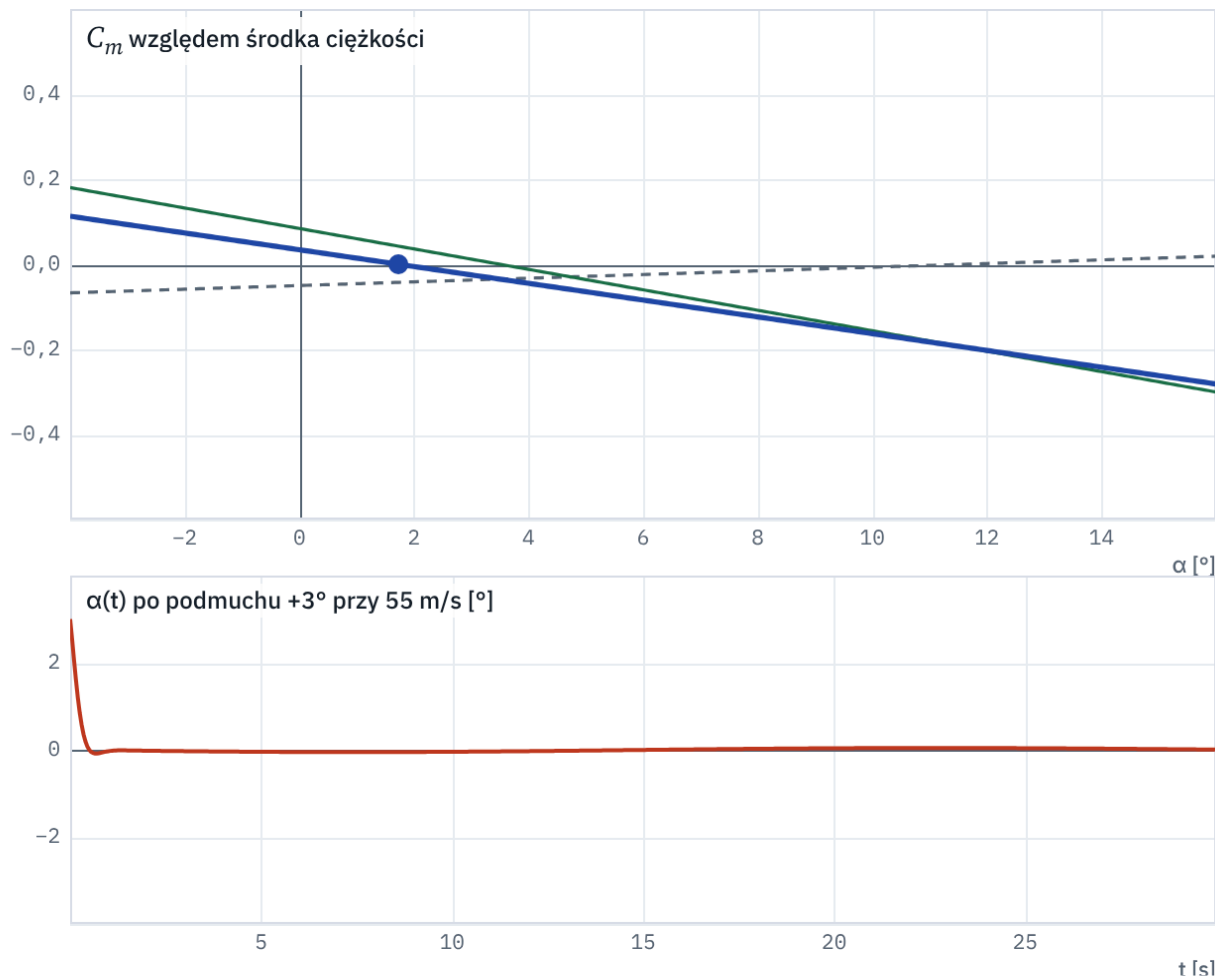
Zapas stateczności: $K_n = h_n - h$, $C_{m\alpha} = -a K_n$.

$\eta \approx 0,9$ uwzględnia, że usterzenie leży w spowolnionym śladzie skrzydła i kadłuba, a V_H (objętość usterzenia) mierzy jego „dźwignię”. Ostatni wzór jest najważniejszy w tej lekcji: nachylenie krzywej momentu jest proporcjonalne do odległości środka ciężkości od punktu neutralnego. Punkt neutralny to środek aerodynamiczny *całego samolotu*: punkt, w którym działa przyrost siły nośnej całości przy zmianie kąta natarcia. Środek ciężkości przed nim daje stateczność, za nim niestateczność.

Przykład liczbowy dla samolotu z lekcji Dział 10: Płyny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne: 1100 kg, $S = 16,2 \text{ m}^2$, rozpiętość 10,9 m, więc $\bar{c} = 1,49 \text{ m}$ i $AR = 7,3$. Geometrię usterzenia przyjmujemy typową dla tej klasy: $S_H = 3,4 \text{ m}^2$, $l_H = 4,6 \text{ m}$, wydłużenie 4. Daje to $V_H = 0,65$, $d\varepsilon/d\alpha = 0,43$, $a = 5,39/\text{rad}$ i punkt neutralny $h_n = 0,51$ (przykład 6.1). Newman w przykładzie 7.1, dla samolotu tej samej klasy o trochę innych wymiarach, dostaje punkt neutralny $0,26\bar{c}$ za środkiem aerodynamicznym, czyli też ok. $0,51\bar{c}$. Pallett na rys. 1.12 pokazuje typowe położenie środka ciężkości w 30% cięciwy. Przy $h = 0,30$ zapas wynosi 0,21, a $C_{m\alpha} = -1,13/\text{rad}$. To więcej niż typowe w praktyce kilka do kilkunastu procent, bo nasz model pomija kadłub: jego destabilizujący wkład przesunął punkt neutralny do przodu, zwykle o kilka do kilkunastu procent cięciwy.

SYMULACJA 1

Na górze współczynnik momentu względem środka ciężkości w funkcji kąta natarcia: skrzydło (przerzywana), usterzenie (zielona) i suma (niebieska), z punktem trymu. Na dole odpowiedź samolotu przy 55 m/s na podmuch, który zwiększył kąt natarcia o 3° (pełny model podłużny z lekcji 5). Przesuwaj środek ciężkości do tyłu, aż za punkt neutralny. Zmniejszaj usterzenie.



-- skrzydło — usterzenie poziome — cały samolot — kąt natarcia $\alpha(t)$ po podmuchu

punkt neutralny h_n 0,510

zapas stateczności $h_n - h$ 0,210

$C_{m\alpha}$ [1/rad] -1,130

C_{m0} (przy $\delta = 0$) 0,0341

trym: α 1,73°

prędkość lotu poziomego przy tym trymie 89,7 m/s

największa część rzeczywista pierwiastków -0,017 1/s

Nachylenie ujemne (stateczność statyczna) i trym przy dodatnim kącie natarcia: samolot wraca do trymu po podmuchu. Skrzydło samo destabilizuje, usterzenie stabilizuje. Przesuń środek ciężkości do tyłu i obserwuj, jak spada nachylenie.

Stan na rysunku: $h = 0,30$, $S_H = 3,4 \text{ m}^2$, $\delta = 0,0^\circ$; punkt neutralny 0,510, zapas 0,210, $C_{m\alpha} = -1,130/\text{rad}$.

- 1 Policz objętość usterzenia V_H dla $S_H = 3,4 \text{ m}^2$, $l_H = 4,6 \text{ m}$, $S = 16,2 \text{ m}^2$, $\bar{c} = 1,49 \text{ m}$.
■ ■ ■
- 2 Skrzydło o $a_w = 4,94/\text{rad}$ i wydłużeniu 7,3. Ile wynosi $d\varepsilon/d\alpha$? Co to oznacza dla usterzenia, gdy samolot zwiększa kąt natarcia o 1° ?
■ ■ ■
- 3 Policz a całego samolotu i punkt neutralny: $a_H = 4,19/\text{rad}$, $\eta = 0,9$, $h_{ac} = 0,25$. ($a = a_w + \eta \frac{S_H}{S} a_H (1 - d\varepsilon/d\alpha)$)
■ ■ ■
- 4 Wyprowadź $C_{m\alpha} = -a(h_n - h)$ z wzoru w ramce, przyjmując, że ramię usterzenia mierzymy od środka aerodynamicznego skrzydła (wtedy V_H nie zależy od h).
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Trym i granice położenia środka ciężkości

Lot ustalony wymaga dwóch rzeczy naraz: siła nośna równa ciężarowi, $C_L = mg/(\bar{q}S)$, i zerowy moment, $C_m = 0$. Przy danej prędkości to dwa równania liniowe na dwie niewiadome: kąt natarcia i wychylenie steru wysokości. Rozwiązanie to **trym**. Pilot ustawia ster wysokości w położeniu trymu, a siłę, którą musiałby przy tym trzymać na drążku, zdejmując kłapkę wyważającą (trymerem).

TRYM (LOT POZIOMY Z PRĘDKOŚCIĄ V)

$$\begin{cases} a\alpha + C_{L\delta}\delta = C_L^{\text{wym}} - C_{L0} \\ C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta = -C_{m0} \end{cases} \quad C_L^{\text{wym}} = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}.$$

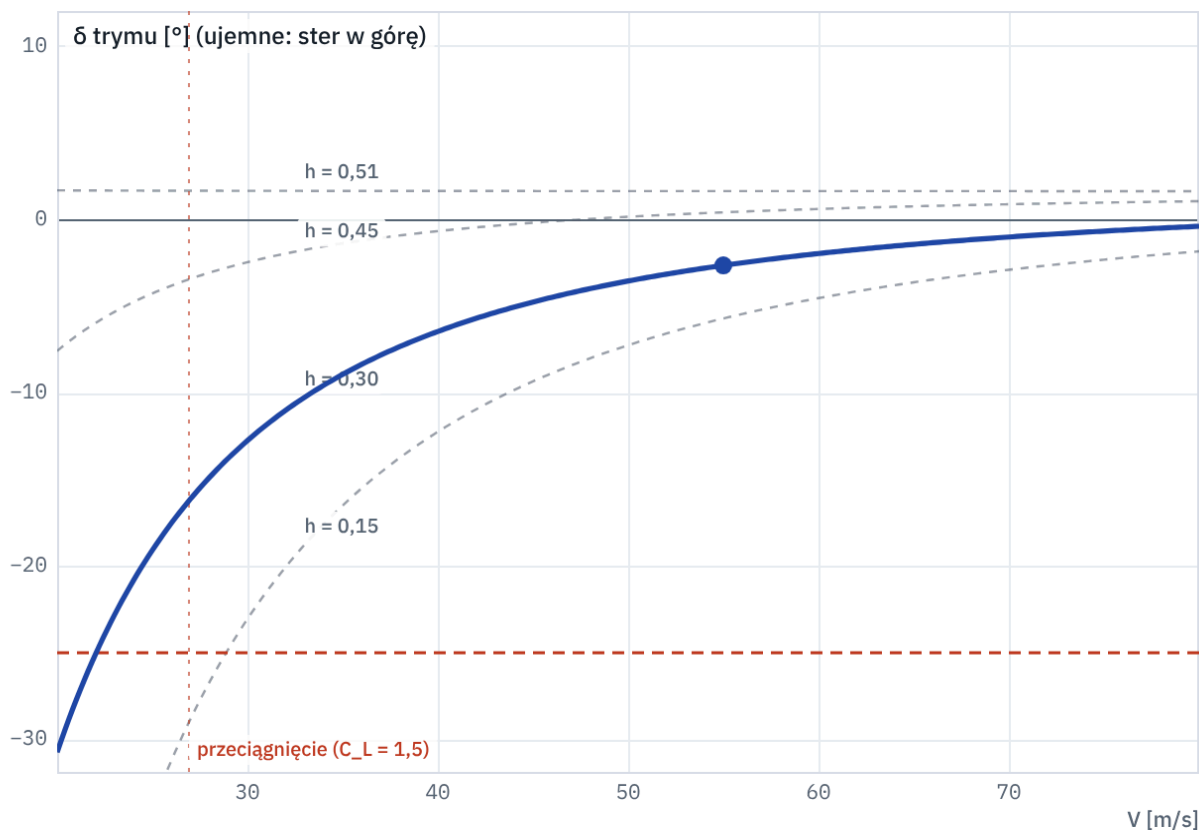
Zmiana trymu z prędkością: $\frac{d\delta}{dC_L} = \frac{a K_n}{\det}$, proporcjonalna do zapasu stateczności (wyznacznik układu, $\det = aC_{m\delta} - C_{L\delta}C_{m\alpha}$, jest dla typowego samolotu ujemny, zadanie 3.2).

Wynika z tego coś, co pilot czuje w rękach. Przy dużym zapasie zmiana prędkości wymaga dużej zmiany wychylenia steru: samolot „broni” swojej prędkości wytrimowanej. Przy środku ciężkości w punkcie neutralnym krzywa $\delta(V)$ jest płaska, a za nim odwraca nachylenie: żeby lecieć szybciej, trzeba ciągnąć. Pomiar $\delta(V)$ w locie próbnym przy kilku położeniach środka ciężkości to standardowy sposób wyznaczenia punktu neutralnego.

Środek ciężkości ma więc dwie granice. **Tylna** to punkt neutralny minus wymagany zapas (zwykle kilka procent cięciwy). **Przednia** wynika z siły steru: im bardziej z przodu środek ciężkości, tym mocniej trzeba podnosić nos przy małej prędkości, a ster ma ograniczone wychylenie. W naszym modelu przy wychyleniu w górę o 25° i $C_{L,\max} = 1,5$ przednia granica wypada w $h = 0,20$ (przykład 6.3). Dlatego rozmieszczenie pasażerów i bagażu w małym samolocie się liczy, a każdy samolot ma w instrukcji obwiednię położenia środka ciężkości.

SYMULACJA 2

Wychylenie steru potrzebne do trymu w funkcji prędkości, dla wybranego położenia środka ciężkości (niebieska) i kilku innych (szare). Pozioma czerwona linia: największe wychylenie steru w górę; pionowa: prędkość przeciągnięcia. Znajdź położenie, przy którym przy przeciągnięciu brakuje steru, i takie, przy którym krzywa staje się płaska.



— $\delta_{\text{trym}}(V)$ dla wybranego h - - - inne położenia h - - - granica wychylenia steru

zapas stateczności 0,210

δ przy 55 m/s $-2,67^\circ$

$-d\delta/dV$ przy 55 m/s $0,156^\circ/(m/s)$

δ przy przeciągnięciu (26,9 m/s) $-16,2^\circ$

przednia granica środka ciężkości $h = 0,197$

punkt neutralny (tylna granica bez zapasu) $h = 0,510$

Im większy zapas stateczności, tym bardziej trzeba wychylić ster przy zmianie prędkości (krzywa stromsza). Przy punkcie neutralnym krzywa jest płaska: samolot nie „broni” swojej prędkości.

Stan na rysunku: $h = 0,30$, zapas 0,210, największe wychylenie steru w górę 25° , $C_{L\max} = 1,5$ (prędkość przeciągnięcia 26,9 m/s); przednia granica $h = 0,197$, tylna (punkt neutralny) $h = 0,510$.

⚠️ PUŁAPKA: ZNAK WYCHYLENIA STERU

W tej lekcji $\delta > 0$ to kraweść splotu steru w dół: zwiększa siłę nośną usterzenia i opuszcza nos, więc $C_{m\delta} < 0$. Tak jest u Etkina i w większości podręczników. Tewari przyjmuje odwrotny znak (dodatnie wychylenie podnosi nos), dlatego jego pochodna M_δ jest dodatnia. Przed przepisaniem modelu z książki sprawdź, w którą stronę obraca samolot dodatnie wychylenie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Jaki współczynnik siły nośnej jest potrzebny do lotu poziomego przy 55 m/s, a jaki przy 40 m/s (1100 kg, 16,2 m², poziom morza)?
- 2 Rozwiąż układ trymu ze względu na δ i pokaż, że $d\delta/dC_L^{\text{wym}} = -C_{m\alpha}/\det = aK_n/\det$, gdzie $\det = aC_{m\delta} - C_{L\delta}C_{m\alpha}$. Policz znak $\det$ dla $C_{m\delta} = -1,10$, $C_{L\delta} = 0,36$, $C_{m\alpha} = -1,13$, $a = 5,39$.
- 3 Jeśli ster wychyla się w górę najwyżej o 20°, a nie o 25°, jak przesunie się przednia granica środka ciężkości w naszym modelu? Skorzystaj z symulacji 2.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Stateczność kierunkowa i poprzeczna

Te same pytania zadajemy dla zaburzeń „na boki”. Zaburzeniem jest tu **kąt ślizgu** β : kąt między osią samolotu a kierunkiem napływu w płaszczyźnie poziomej. Przy $\beta > 0$ powietrze napływa z prawej strony.

- **Stateczność kierunkowa** (wiatrowskazowa, Pallett: *weathercock*): statecznik pionowy za środkiem ciężkości przy ślizgu dostaje boczną siłę, która obraca nos w stronę napływu. Warunek: $C_{n\beta} = \partial C_n / \partial \beta > 0$. Wkład statecznika $\approx \eta_V V_V a_V$ z objętością statecznika $V_V = S_V l_V / (Sb)$; kadłub przed środkiem ciężkości działa destabilizująco. Strzała i wiatrowskaz działają tak samo.
- **Stateczność poprzeczna**: przy ślizgu w prawo samolot powinien przechylać się w lewo, czyli unosić skrzydło od strony napływu. Warunek: $C_{l\beta} < 0$. Daje to **wznios** skrzydeł (skrzydło od strony napływu ma większy kąt natarcia), górnopłat (kadłub pod skrzydłem kieruje opływ tak, że działa jak dodatkowy wznios) i skos skrzydeł do tyłu.

Po co stateczność poprzeczna, skoro przechylenie samo nie zmienia kąta natarcia? Bo przechylony samolot ześlizguje się w stronę opuszczonego skrzydła: siła nośna ma składową

poziomą. Ślizg z $C_{l\beta} < 0$ podnosi opuszczone skrzydło. Przechylenie jest więc stabilizowane dopiero przez ślizg, a to wiąże oba ruchy ze sobą. Zbyt duża stateczność poprzeczna przy małej kierunkowej daje kołysanie holendrowane, zbyt mała daje powolne zacieśnianie zakrętu (spirale). Ten kompromis to temat lekcji 7 Ruch boczny: przechylenie, spirala i holendrowanie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Dlaczego lotka do badmintona leci korkiem do przodu niezależnie od tego, jak ją uderzymy?
- 2 Samolot ze wzniosem skrzydeł Γ ślizga się w prawo ($\beta > 0$). Pokaż jakościowo, że prawe skrzydło ma większy kąt natarcia niż lewe i jaki znak ma powstały moment przechylający.
- 3 Górnopłaty (jak Cessna 172) mają zwykle mały wznios, a dolnopłaty większy. Dlaczego?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Statyka to jeszcze nie dynamika

Stateczność statyczna mówi tylko, w którą stronę działa moment tuż po zaburzeniu. Nie mówi, czy ruch powrotny wygaśnie, czy przerodzi się w narastające wahania. Wahadło z „ujemnym tarciem” ma moment przywracający, a mimo to jego drgania rosną. Pełną odpowiedź dają wartości własne modelu dynamiki, który zbudujemy w lekcji 5 Lot w płaszczyźnie symetrii: model podłużny i pochodne stateczności. Na razie podgląd: dla naszego samolotu przy 55 m/s największa część rzeczywista wartości własnych zależy od położenia środka ciężkości tak:

h	zapas K_n	największa część rzeczywista [1/s]	charakter
0,30	0,21	-0,017	stateczny, słabo tłumione wolne wahania (fugoida)
0,50	0,01	-0,026	stateczny
0,52	-0,01	+0,058	dywergencja, podwojenie w ok. 12 s
0,55	-0,04	+0,157	podwojenie w 4,4 s
0,60	-0,09	+0,343	podwojenie w 2 s

Granica stateczności dynamicznej pokrywa się tu z punktem neutralnym. Tuż za nim niestateczność jest powolna: pilot może nad nią zapanować, jak bracia Wright. Kilka procent

ciężkiwy dalej czas podwojenia spada do sekund, poniżej możliwości człowieka. Samoloty bojowe od lat 70. latają z ujemnym zapasem, bo komputer koryguje wychylenia steru dziesiątki razy na sekundę (lekcja 8 Augmentacja stateczności: tłumik odchylenia i pochylenia).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 15 min

- 1 Wahadło z momentem przywracającym i „ujemnym tłumieniem”: $\ddot{\theta} - 0,1\dot{\theta} + 4\theta = 0$. Czy  jest stateczne statycznie? A dynamicznie?
- 2 Czas podwojenia zaburzenia to $\ln 2/\lambda$. Pilot reaguje z opóźnieniem ok. 0,3–0,5 s i  potrzebuje kilku takich reakcji, żeby opanować ruch. Przy jakim położeniu środka ciężkości z tabeli samolot jest jeszcze sterowalny ręcznie?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: STATECZNOŚĆ STATYCZNA PODŁUŻNA

1. Dane: $S, \bar{c}, AR, a_w, C_{m,ac}$; usterzenie $S_H, l_H, a_H, \eta, \tau$; masa, prędkość.
2. Odchylenie strumienia: $d\varepsilon/d\alpha \approx 2a_w/(\pi AR)$.
3. Punkt neutralny z ramki, zapas $K_n = h_n - h, C_{m\alpha} = -aK_n$.
4. Trym: układ dwóch równań na α i δ ; sprawdź δ w całym zakresie prędkości i przy przeciągnięciu.
5. Sprawdzenie: $C_{m0} > 0$, trym przy dodatnim α ; nachylenie $\delta(V)$ ma znak zgodny z K_n .

Przykład 6.1

Punkt neutralny lekkiego samolotu

Samolot z części 2 (dane w zadaniach 2.1–2.3). Policz punkt neutralny i zapas przy środku ciężkości w 30% cięciwy.

- 1 $V_H = 0,65, d\varepsilon/d\alpha = 0,43, a_H = 2\pi \cdot 4/6 = 4,19/\text{rad}, a = 5,39/\text{rad}.$
- 2 $h_n = 0,25 + 0,9 \cdot 0,65 \cdot (4,19/5,39) \cdot 0,57 = 0,51.$
- 3 $K_n = 0,51 - 0,30 = 0,21, C_{m\alpha} = -5,39 \cdot 0,21 = -1,13/\text{rad}.$

Wynik: punkt neutralny w 51% cięciwy, zapas 21% cięciwy, czyli 0,31 m.

Sprawdzenie: Newman (przykład 7.1) dla podobnego samolotu: 0,26 $\bar{c}$ za środkiem aerodynamicznym, u nas też 0,26 $\bar{c}$ ✓.

Przykład 6.2

Trym przy 55 m/s

Ten sam samolot, $h = 0,30$, $C_{m,ac} = -0,05$, kąt zaklinowania usterzenia (netto, z odchyleniem strumienia przy $\alpha = 0$) $i'_H = -2^\circ$, $\tau = 0,45$. Znajdź α i δ trymu przy 55 m/s.

- 1 $C_{L0} = \eta \frac{S_H}{S} a_H i'_H = 0,9 \cdot 0,21 \cdot 4,19 \cdot (-0,035) = -0,028$; $C_{m0} = C_{m,ac} + (h - h_{ac})C_{L0} - \eta V_H a_H i'_H = -0,05 - 0,001 + 0,085 = 0,034$: dodatni dzięki ujemnemu kątowi usterzenia ✓.
- 2 $C_{L\delta} = 0,9 \cdot 0,21 \cdot 4,19 \cdot 0,45 = 0,36$, $C_{m\delta} = (h - h_{ac})C_{L\delta} - \eta V_H a_H \tau = 0,018 - 1,10 = -1,08$ (w tablicach często pomija się pierwszy człon: $-1,10$).
- 3 Układ: $5,39 \alpha + 0,36 \delta = 0,36 + 0,028$, $-1,13 \alpha - 1,08 \delta = -0,034$. Rozwiązanie: $\alpha = 0,075$ rad, $\delta = -0,047$ rad.

Wynik: $\alpha = 4,3^\circ$, $\delta = -2,7^\circ$ (ster lekko w górę).

Sprawdzenie: kąt natarcia zgadza się z przykładem 10.5 z fizyki ($4,2^\circ$ dla samego skrzydła); usterzenie dokłada trochę ujemnej siły nośnej, więc skrzydło musi nieść trochę więcej ✓.

Przykład 6.3

Przednia granica środka ciężkości

Przy przeciągnięciu $C_{L,max} = 1,5$. Ster wychyla się w górę najwyżej o 25° . Jak daleko z przodu może leżeć środek ciężkości?

- 1 Prędkość przeciągnięcia: $V_s = \sqrt{2mg/(\rho S C_{L,max})} = 26,9$ m/s.
- 2 Szukamy h , przy którym trym przy V_s wymaga $\delta = -25^\circ$. Wychylenie trymu rośnie (staje się mniej ujemne) z h , więc rozwiązanie jest jedno; metodą bisekcji: $h = 0,197$.

Wynik: dopuszczalny zakres środka ciężkości to od ok. 20% cięciwy (ster) do 51% minus wymagany zapas (stateczność).

Sprawdzenie: w prawdziwym samolocie przy ziemi działa jeszcze efekt bliskości ziemi (mniejsze odchylenie strumienia), który przy lądowaniu przesunął przednią granicę do tyłu: model daje granicę optymistyczną ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Usterzenie poziome niesie część ciężaru.”

Zwykle jest odwrotnie: w typowym samolocie usterzenie daje małą siłę w dół (u Newmana w przykładzie 7.1: 374 N), żeby zrównoważyć moment skrzydła. Skrzydło niesie wtedy więcej niż ciężar.

× „Im bardziej stateczny samolot, tym lepiej.”

Duży zapas oznacza duże wychylenia steru przy każdej zmianie prędkości, ciężkie sterowanie i przednią granicę bliżej. Samoloty projektuje się z zapasem kilku do kilkunastu procent cięciwy.

× „Środek ciężkości musi leżeć przed środkiem parcia.”

Musi leżeć przed punktem neutralnym, który jest środkiem aerodynamicznym całego samolotu. Środek parcia wędruje z kątem natarcia i do stateczności się nie nadaje.

× „Stateczny statycznie znaczy stateczny.”

To warunek konieczny. O tym, czy zaburzenie wygaśnie, decydują wartości własne pełnego modelu (lekcje 5 i 6).

× „Wznios skrzydła utrzymuje skrzydła poziomo.”

Wznios działa tylko przy ślizgu. Przechylony samolot bez ślizgu nie dostaje od wzniosu żadnego momentu; ślizg pojawia się dopiero dlatego, że siła nośna ma składową poziomą.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1

Kaczka. W układzie „kaczka” ster wysokości jest z przodu (bracia Wright, współczesne Rutan VariEze). Czy taki samolot może być stateczny? Gdzie musi leżeć środek ciężkości i dlaczego przednie skrzydło powinno przeciągać się pierwsze?

- 2 **Papierowy samolot.** Wyjaśnij z punktu widzenia tej lekcji, co robi plastelina na nosie i co robi podgięcie tylnych krawędzi skrzydeł do góry.
- 3 **Spalanie paliwa.** Duży samolot pasażerski ma zbiorniki w skrzydłach i czasem w usterzeniu poziomym. Jak można wykorzystać przepompowywanie paliwa w locie przelotowym i jakie jest ryzyko?
- 4 **Latawiec.** W lekcji Dział 10: Płyiny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne uzda latawca ustala kąt natarcia. Jaką rolę pełni miejsce przyczepienia linki z punktu widzenia momentów i co robi ogon latawca?
- 5 **Pomiar w locie.** Pilot doświadczalny mierzy wychylenie steru przy kilku prędkościach dla trzech położów środka ciężkości i dostaje nachylenia $d\delta/dC_L$: $-0,20$, $-0,14$, $-0,08$ rad na jednostkę C_L przy $h = 0,25$, $0,32$, $0,39$. Gdzie jest punkt neutralny?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Jakie dwa warunki musi spełniać krzywa $C_m(\alpha)$?**

$C_{m\alpha} < 0$ (stateczność) i $C_{m0} > 0$ (trym przy dodatnim kącie natarcia).

- 2 **Co to jest środek aerodynamiczny?**

Punkt, względem którego moment nie zależy od kąta natarcia; dla profilu ok. ćwierć cięciwy.

- 3 **Dlaczego samolot potrzebuje usterzenia poziomego?**

Samo skrzydło o profilu wygiętym ma $C_{m0} < 0$: stateczne skrzydło trzymowałoby się przy ujemnej sile nośnej. Usterzenie daje dodatni C_{m0} i dużą część stateczności.

- 4 **Co to jest punkt neutralny i zapas stateczności?**

Położenie środka ciężkości, przy którym $C_{m\alpha} = 0$; zapas $K_n = h_n - h$, $C_{m\alpha} = -aK_n$.

5 Co wyznacza przednią, a co tylną granicę środka ciężkości?

Przednią: siła steru wysokości przy małej prędkości. Tylną: punkt neutralny minus wymagany zapas.

6 Jakie znaki mają $C_{n\beta}$ i $C_{l\beta}$ w samolocie statecznym?

$C_{n\beta} > 0$ (wiatrowskaz, statecznik pionowy), $C_{l\beta} < 0$ (wznios, górnopłat, skos).

STATECZNOŚĆ PODŁUŻNA

$$M = \bar{q} S \bar{c} C_m, C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta} \delta$$

$$C_m = C_{m,ac} + (h - h_{ac}) C_L - \eta V_H C_{L,H},$$

$$V_H = \frac{S_H l_H}{S \bar{c}}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} \approx \frac{2a_w}{\pi AR}$$

$$h_n = h_{ac} + \eta V_H \frac{a_w}{a} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right), C_{m\alpha} = -a(h_n - h)$$

TRYM I RUCH BOCZNY

$$a\alpha + C_{L\delta}\delta = C_L^{\text{wym}} - C_{L0}, C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta = -C_{m0}$$

$$d\delta/dC_L \propto K_n$$

$$C_{n\beta} > 0 \text{ (statecznik pionowy, } V_V = S_V l_V / (Sb))$$

$$C_{l\beta} < 0 \text{ (wznios, górnopłat, skos)}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** D. J. Newman, *Interactive Aerospace Engineering and Design*, rozdz. 7.2–7.5 (kryteria stateczności, usterzenie, punkt neutralny, przykład 7.1).
- **Dla chętnych:** E. H. J. Pallett, S. Coyle, *Automatic Flight Control*, rozdz. 1A (stateczność statyczna i dynamiczna, rys. 1.10–1.14), opis bez wzorów, z perspektywy pilota i układów automatyki.

Statyka powiedziała nam, gdzie są punkty równowagi i w którą stronę samolot do nich ciągnie. Teraz potrzebujemy równań ruchu: jak szybko i jakim torem wraca. Następną lekcję zapisze ruch w płaszczyźnie symetrii jako układ czterech równań, zlinearyzuje go wokół trymu i pokaże, że każda pochodna stateczności to sprężyna albo tłumik o konkretnym znaczeniu fizycznym.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Przyrost działa w środku aerodynamicznym, $0,05\bar{c}$ za środkiem ciężkości: moment $-0,05\bar{c} \Delta L$ opuszcza nos i zmniejsza kąt natarcia. Skrzydło w tym położeniu jest stateczne.
2. Przeniesienie momentu o $x\bar{c}$ do tyłu dodaje $x C_L$: $C_m(x) = C_{m,ac} - C_L/4 + x C_L$, czyli dla $x = 1/4$ zostaje $C_{m,ac}$. Przy $C_L = 0,36$: $C_{m,LE} = -0,05 - 0,09 = -0,14$.
3. $C_{m\alpha} = 4,94 \cdot (0,20 - 0,25) = -0,25/\text{rad}$ (stateczne). $C_m = -0,05 - 0,05 C_L = 0$ daje $C_L = -1$: równowaga przy dużej ujemnej sile nośnej. Lot do góry nogami, i to przy kącie bliskim przeciągnięcia. Przy normalnym locie nie.

Zadania · część 2

1. $V_H = 3,4 \cdot 4,6 / (16,2 \cdot 1,49) = 0,65$. Typowe wartości dla samolotów lekkich to 0,5–0,7.
2. $2 \cdot 4,94 / (\pi \cdot 7,3) = 0,43$. Usterzenie widzi tylko $0,57^\circ$ zmiany kąta natarcia: odchylenie strumienia przez skrzydło „zjada” 43% stabilizującego działania ogona.
3. $a = 4,94 + 0,9 \cdot 0,21 \cdot 4,19 \cdot 0,57 = 5,39/\text{rad}$. $h_n = 0,25 + 0,9 \cdot 0,65 \cdot \frac{4,19}{5,39} \cdot 0,57 = 0,25 + 0,26 = 0,51$.
4. $C_{m\alpha} = (h - h_{ac}) a - \eta V_H a_H (1 - d\varepsilon/d\alpha)$. Zeruje się dla $h = h_n$ z ramki, więc $C_{m\alpha} = a(h - h_{ac}) - a(h_n - h_{ac}) = -a(h_n - h)$. Dla $h = 0,30$: $-5,39 \cdot 0,21 = -1,13/\text{rad}$.

Zadania · część 3

1. $\bar{q} = 1853 \text{ Pa}$ i 980 Pa ; $C_L = 10\,791 / (1853 \cdot 16,2) = 0,36$ i $10\,791 / (980 \cdot 16,2) = 0,68$. Wolniej trzeba lecieć z większym kątem natarcia, więc z innym wychyleniem steru.
2. Z reguły Cramera $\delta = \frac{-aC_{m0} - C_{m\alpha}(C_L^{\text{wym}} - C_{L0})}{\det}$, więc pochodna to $-C_{m\alpha} / \det$. $\det = 5,39 \cdot (-1,10) - 0,36 \cdot (-1,13) = -5,52$. Ujemny, więc przy $K_n > 0$ większe C_L (mniejsza prędkość) wymaga mniejszego δ , czyli steru bardziej w górę. Zgadza się z intuicją: wolniej, to nos wyżej.
3. Z $h = 0,20$ do ok. $h = 0,26$: mniej steru, mniej miejsca na przesunięcie środka ciężkości do przodu. Przy tylnej granicy w punkcie neutralnym (0,51) i wymaganym zapasie 5% zakres skurczyłby się z 0,26 do 0,20 cięciwy.

Zadania · część 4

1. Ciężki korek jest z przodu, a opór pióra, rozłożony daleko z tyłu, działa za środkiem ciężkości. Każde odchylenie osi od kierunku lotu daje moment obracający lotkę z powrotem: $C_{n\beta} > 0$ i $C_{m\alpha} < 0$ naraz, bo lotka jest osiowo symetryczna.
2. Napływ z prawej ma składową $V \sin \beta$ wzdłuż osi $-y$. Prawe skrzydło, uniesione o Γ , dostaje z tej składowej przepływ od dołu, $\approx V\beta\Gamma$, czyli przyrost kąta natarcia $\beta\Gamma$; lewe tyle samo traci. Prawe skrzydło ma więcej siły nośnej, więc samolot przechyla się w lewo: moment ujemny, $C_{l\beta} < 0$.
3. Przy ślizgu kadłub odchyła opływ: u górnopłata pod skrzydłem od strony napływu powietrze płynie w górę, zwiększając kąt natarcia tego skrzydła, czyli działa jak dodatkowy wznios. U dolnopłata efekt jest przeciwny i trzeba go nadrobić większym wzniosem geometrycznym.

Zadania · część 5

1. Statycznie tak: moment -4θ przywraca. Dynamicznie nie: pierwiastki $s = 0,05 \pm 2i$ mają dodatnią część rzeczywistą, wahania rosną jak $e^{0,05t}$. Stateczność statyczna jest warunkiem koniecznym, nie wystarczającym.
2. Przy $h = 0,52$ (12 s) bez trudu, przy 0,55 (4,4 s) z dużym wysiłkiem, przy 0,60 (2 s) praktycznie nie. To ocena orientacyjna; normy jakości pilotażu (np. amerykańska MIL-F-8785C) podają dopuszczalne czasy podwojenia dla modów aperiodycznych (spirali, fugoidy), a do niestateczności w pochyleniu stosuje się podobne kryteria orientacyjnie.

Zadania do przemyslenia

1. Tak: punkt neutralny całości leży wtedy między przednim a głównym skrzydłem, a środek ciężkości musi być przed nim, czyli też przed głównym skrzydłem. Przednie skrzydło niesie dodatnią siłę nośną (oba „niosą”).
2. Gdy przednie skrzydło przeciąga się pierwsze, jego siła nośna spada, nos opada i samolot sam wychodzi z przeciągnięcia. Gdyby pierwsze przeciągało się główne skrzydło, nos poszedłby w górę: groźne przepadnięcie.
1. Plastelina przesuwając środek ciężkości do przodu, przed punkt neutralny: $C_{m\alpha} < 0$.
2. Podjęcie krawędzi spływu działa jak ster wysokości w górę (albo jak profil z odgiętą krawędzią): zwiększa C_{m0} , więc trym przypada przy większym kącie natarcia i mniejszej prędkości. Za mało: nurkowanie. Za dużo: samolot trzyma się blisko przeciągnięcia i „faluje”.
1. Przesunięcie środka ciężkości do tyłu zmniejsza zapas, a tym samym siłę w dół potrzebną na usterzeniu. Skrzydło niesie mniej, opór indukowany i trymu maleje: oszczędność paliwa rzędu procentu (tak robią np. A330, A340 i MD-11 ze zbiornikami w usterzeniu poziomym; Concorde przepompowywał paliwo między zbiornikami w kadłubie, żeby przesuwać środek ciężkości przy przejściu przez prędkość dźwięku).
2. Ryzyko: mniejszy zapas, bliżej punktu neutralnego. Potrzebne są systemy kontroli i, przy małym zapasie, wspomaganie stateczności (lekcja 8 Augmentacja stateczności: tłumik odchylenia i pochylenia).
1. Punkt uzdy to oś obrotu latawca (jak środek ciężkości dla samolotu). Latawiec ustawia się tak, żeby wypadkowa siła aerodynamiczna przechodziła przez uzdę: to jego trym. Środek parcia płaskiej płyty wędruje od ok. 1/4 cięciwy przy małym kącie natarcia do połowy przy 90° , więc przesunięcie uzdy do przodu wymusza środek parcia bliżej nosa, czyli mniejszy kąt natarcia trymu; przesunięcie do tyłu go zwiększa.
2. Ogon dodaje opór daleko za uzdą: przesuwa „punkt neutralny” latawca do tyłu i zwiększa zapas stateczności, jak usterzenie samolotu. Bez ogona latawiec płaski często koziołkuje.
1. Nachylenie jest proporcjonalne do zapasu, więc liniowe w h : zmienia się o 0,06 na każde 0,07 cięciwy.
2. Zero (punkt neutralny) wypada $0,08/0,06 \cdot 0,07 = 0,093$ za ostatnim punktem: $h_n \approx 0,48$. To standardowa metoda prób w locie: ekstrapolacja do zera, bez lotu w samym punkcie neutralnym.

Dynamika lotu · Lekcja 4: Stateczność statyczna i trym · Źródła: D. J. Newman, *Interactive Aerospace Engineering and Design* (McGraw-Hill 2002, rozdz. 7, przykład 7.1); E. H. J. Pallett, S. Coyle, *Automatic Flight Control* (Blackwell 1993, rozdz. 1A); A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (Wiley 2011, rozdz. 3.4–3.5). Geometria usterzenia przyjęta jako typowa dla samolotu lekkiego. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l4.py).