

Naprowadzanie: trajektoria nominalna i śledzenie odchylek

Sterowanie z lekcji 11 trzyma rakietę na zadanej orientacji. Naprowadzanie decyduje, jaka ta orientacja ma być, tak żeby po wyłączeniu silnika rakietę znalazła się na właściwej orbicie. Ta lekcja zamyka kurs dynamiki lotu na drugim stopniu rakiety modelowej: wyprowadzamy optymalny program pochylenia z zasady maksimum, sprawdzamy, co się dzieje, gdy silnik daje 3% mniej ciągu, i porównujemy dwa sposoby korekty: śledzenie odchylek od planu (LQR) i jawne naprowadzanie, które w locie co kilka sekund rozwiązuje zadanie od nowa.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

A. Tewari,
*Atmospheric and
Space Flight
Dynamics*,
rozdziały o
sterowaniu
optymalnym i
naprowadzaniu;
A. E. Bryson, Y.-C.
Ho, *Applied
Optimal Control*,
rozdz. 2

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Apollo 13 traci silnik w drodze na orbitę
- 1 Trajektoria nominalna: prawo tangensa liniowego
- 2 Program otwarty i jego wrażliwość
- 3 Śledzenie odchyłek: LQR
- 4 Naprowadzanie jawne: rozwiązać od nowa
- 5 Porównanie i awaria silnika
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i koniec kursu

Prolog: Apollo 13 traci silnik w drodze na orbitę

Zanim Apollo 13 stał się znany z awarii w drodze na Księżyc, miał kłopot już przy starcie. Na drugim stopniu Saturna V środkowy z pięciu silników wyłączył się ok. dwie minuty za wcześnie (przez drgania podłużne). Komputer naprowadzania nie miał tego zapisanego w planie i nie musiał: jego algorytm (Iterative Guidance Mode) w każdym cyklu liczył od nowa, jak dolecieć z bieżącego stanu do docelowej orbity. Pozostałe silniki drugiego stopnia pracowały dłużej, trzeci stopień też, i statek wszedł na orbitę bliską planowanej.

Ta lekcja pokazuje, dlaczego to zadziałało i dlaczego prostsze podejścia by zawiodły. Model: drugi stopień rakiety modelowej z lekcji astronautyki 4 Rakietą na orbitę: równanie raketowe, stopniowanie i zakręt grawitacyjny, ruch w płaszczyźnie orbity nad kulistą Ziemią bez atmosfery, cel: orbita kołowa 200 km.

Trajektoria nominalna: prawo tangensa liniowego

Drugi stopień zaczyna na wysokości 76 km z prędkością 2555 m/s pod kątem $29,6^\circ$ do horyzontu. Sterujemy kątem ciągu θ nad lokalnym horyzontem; silnik wyłącza się, gdy prędkość pozioma osiągnie prędkość kołową 7784 m/s. Trzeba trafić w dwa warunki końcowe: wysokość 200 km i zerową prędkość pionową.

Jaki program $\theta(t)$ jest najlepszy? Dla płaskiej Ziemi i stałej grawitacji zasada maksimum Pontriagina (automatyka, lekcja 5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasoptymalne i metoda strzałów) daje odpowiedź w zamkniętej postaci. Stan (x, y, v_x, v_y) , przyspieszenie od ciągu $a(t)$:

$$H = \lambda_x v_x + \lambda_y v_y + \lambda_{v_x} a \cos \theta + \lambda_{v_y} (a \sin \theta - g).$$

Równania sprzężone: $\dot{\lambda}_x = \dot{\lambda}_y = 0$, $\dot{\lambda}_{v_x} = -\lambda_x$, $\dot{\lambda}_{v_y} = -\lambda_y$, więc λ_{v_x} i λ_{v_y} są liniowe w czasie. Gdy pozycja pozioma końcowa jest dowolna, $\lambda_x = 0$ i λ_{v_x} jest stałe. Maksimum H względem θ (albo minimum, zależnie od konwencji) daje $\tan \theta = \lambda_{v_y} / \lambda_{v_x}$:

PRAWO TANGENSA LINIOWEGO

$$\tan \theta(t) = a - b t.$$

Dwa parametry dobiera się tak, żeby trafić w dwa warunki końcowe (wysokość i prędkość pionowa) metodą strzałów. Nad kulistą Ziemią prawo nie jest już dokładnie optymalne, ale jest bardzo bliskie optimum i dlatego stoi u podstaw rzeczywistych algorytmów.

Dla rakiety modelowej: $\tan \theta = 0,1434 - 3,88 \cdot 10^{-4} t$, kąt ciągu maleje od $8,2^\circ$ do $2,2^\circ$, praca trwa 272 s, zostaje 3,47 t paliwa. Kąt ciągu nad horyzontem jest mały, mimo że rakietę jeszcze się

wznosi: prędkość pionową z pierwszego stopnia wytraca grawitacja, a ciąg idzie prawie w całości w prędkość poziomą.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 25 min

1 Wyprowadź z H warunek $\tan \theta = \lambda_{v_y} / \lambda_{v_x}$, jeśli H ma być maksymalne względem θ .

2 Dla $\tan \theta = 0,1434 - 3,88 \cdot 10^{-4}t$ policz kąt na początku, po 136 s i po 272 s.

3 Dlaczego do wyznaczenia a i b potrzebna jest metoda strzałów, a nie wzór?

□□ podstawowe ▣▣ średnie ▤▤▤ feynmanowskie

2 Program otwarty i jego wrażliwość

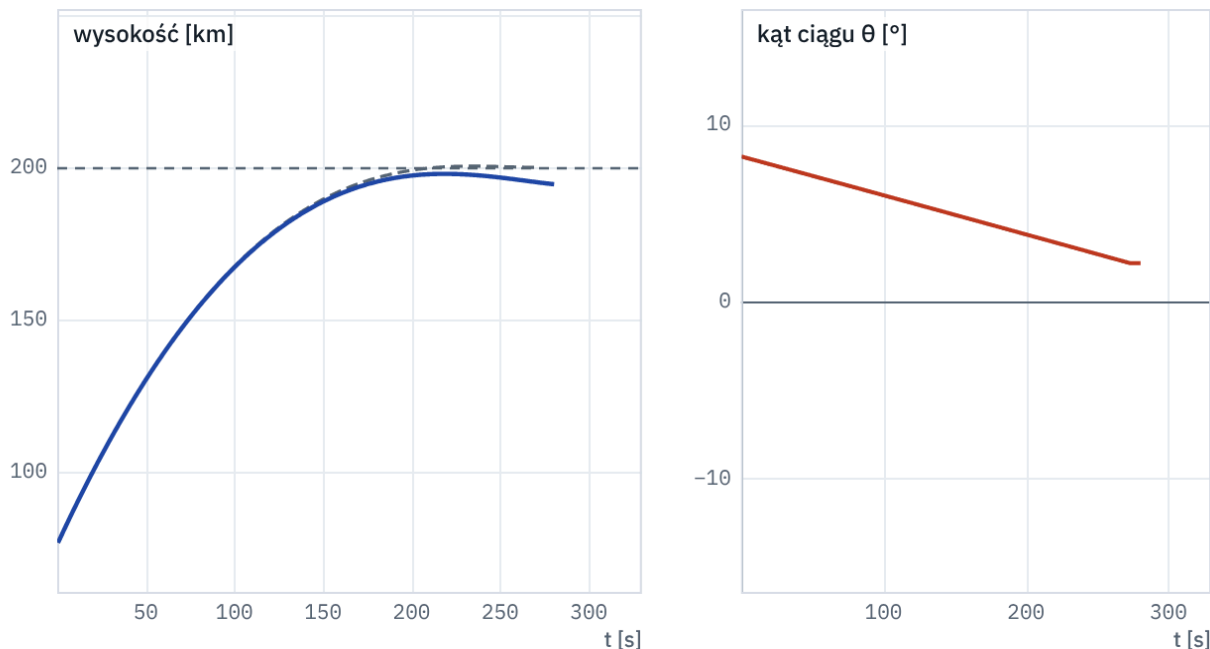
Najprostsze naprowadzanie: zapisać $\theta(t)$ z planu i odtwarzać je w locie, a silnik wyłączyć przy prędkości orbitalnej. Działa, dopóki wszystko idzie zgodnie z planem. Rakieta ma jednak rozrzut parametrów (ciąg i impuls właściwy znane z dokładnością rzędu procenta), a pierwszy stopień zostawia ją w nieco innym stanie, niż zakładano.

Program otwarty: wynik przy odchyłkach (model, l12.py)

Odchyłka	błąd wysokości	prędkość pionowa	perygeum / apogeum
brak	0,1 km	1 m/s	199 / 201 km
ciąg -3%	-5,5 km	-62 m/s	137 / 242 km
ciąg +3%	+4,9 km	+61 m/s	158 / 262 km
I_{sp} -1%	+0,7 km	+10 m/s	193 / 210 km
kąt toru +1°	+10 km	+35 m/s	189 / 252 km
kąt toru +3°	+30 km	+104 m/s	168 / 356 km

Ciąg mniejszy o 3% to dla programu otwartego dłuższa praca silnika przy tych samych kątach w tych samych sekundach: grawitacja działa dłużej, rakieta kończy niżej i opada z prędkością 62 m/s. Perygeum 137 km to orbita, która w ciągu kilku obiegów wejdzie w atmosferę.

SYMULACJA 1 Drugi stopień rakiety modelowej w drodze na orbitę 200 km. Lewy panel: wysokość (przerzywana: plan). Prawy panel: kąt ciągu nad horyzontem. Wprowadź odchyłki ciągu, impulsu właściwego i stanu po pierwszym stopniu, włącz spadek ciągu w 100. sekundzie i porównaj trzy sposoby naprowadzania.



— lot z odchyłkami — trajektoria nominalna — kąt ciągu nad horyzontem

błąd wysokości **-5,53 km**

prędkość pionowa **-62,0 m/s**

perygeum / apogeum **137 / 242 km**

zapas paliwa **3,51 t** (nominalnie 3,47)

Program otwarty powtarza kąty z planu, nie wiedząc, że rakieta jest gdzie indziej. Odchyłki ciągu albo stanu po 1. stopniu przenoszą się wprost na orbitę.

Stan na rysunku: 2. stopień rakiety modelowej (astro 4), orbita kołowa 200 km, wyłączenie przy prędkości poziomej 7784 m/s; ciąg -3,0 %, I_{sp} 0,0 %, kąt toru 0,0°; plan: $\tan \theta = 0,1434 - 3,884 \cdot 10^{-4} \cdot t$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Przy ciągu -3% silnik pracuje 280 s zamiast 272 s. Skąd różnica i dlaczego rakieta kończy niżej, z ujemną prędkością pionową?
- 2 Dlaczego błąd I_{sp} o 1% szkodzi programowi otwartemu znacznie mniej niż błąd ciągu o 3%?

3 Orbita 137×242 km: ile wynosi mimośród? (promień Ziemi 6378 km)

podstawowe średnie feynmanowskie

3 Śledzenie odchyłek: LQR

Pierwszy pomysł na korektę: mierzyć odchyłkę od trajektorii nominalnej i ją usuwać. Dwie decyzje projektowe. **Względem czego mierzyć odchyłkę?** Nie względem czasu: rakieta ze słabszym silnikiem jest „spóźniona” i porównanie z planem w tej samej sekundzie daje fałszywe błędy. Lepiej indeksować plan wielkością, która rośnie monotonicznie, tu prędkością poziomą v_t . **Jak dobrać wzmocnienia?** Mała zmiana kąta ciągu $\delta\theta$ zmienia przyspieszenie pionowe o $a \cos \theta \delta\theta$, więc odchyłki wysokości są w przybliżeniu podwójnym całkowaniem:

$$\delta\ddot{h} \approx u, \quad u = a \cos \theta_n \delta\theta.$$

LQR DLA PODWÓJNEGO CAŁKOWANIA (AUTOMATYKA, LEKCJA 4.3 LQR: KOSZT ZAMIAST BIEGUNÓW)

Minimalizacja $J = \int (q \delta h^2 + r u^2) dt$ daje

$$u = -\sqrt{q/r} \delta h - \sqrt{2\sqrt{q/r}} \delta \dot{h}, \quad \omega_n = (q/r)^{1/4}, \quad \zeta = 1/\sqrt{2}.$$

Prawo naprowadzania: $\theta = \theta_n(v_t) - \frac{\omega_n^2 \delta h + 2\zeta\omega_n \delta v_r}{a \cos \theta_n}$, z $\omega_n = 0,05$ rad/s (stała czasowa ok. 20 s, wolno w porównaniu z pętlą orientacji, szybko w porównaniu z czasem lotu).

Wyniki: przy ciągu -3% błąd wysokości spada z 5,5 km do 50 m, prędkość pionowa z 62 do 1,2 m/s, orbita 199×201 km. Przy kącie toru $+3^\circ$ śledzenie trafia (199×202 km), ale zapas paliwa spada z 2,92 t (program otwarty, który chybił) do 2,51 t: rakieta zużywa paliwo na powrót do planu, który dla nowego stanu początkowego nie jest już najlepszy.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

1 Sprawdź, że $u = -k_1 x - k_2 \dot{x}$ z $k_1 = \sqrt{q/r}$, $k_2 = \sqrt{2k_1}$ daje $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

2 Jakie q/r odpowiada $\omega_n = 0,05$ rad/s? Jaki kąt korekty daje odchyłka wysokości 1 km przy $a = 15$ m/s²?

3 Dlaczego śledzenie indeksowane czasem gorzej radzi sobie z ciągiem -3% ?

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Naprowadzanie jawne: rozwiązać od nowa

Drugi pomysł: zapomnieć o planie. Co kilka sekund wziąć bieżący stan (z nawigacji) i bieżącą masę, rozwiązać zadanie brzegowe od nowa (te same dwa parametry a , b prawa tangensa liniowego, metoda strzałów) i lecieć według nowego rozwiązania do następnej aktualizacji. To naprowadzanie jawne (explicit guidance): rakietę wie, dokąd leci, a nie tylko którądy miała lecieć. Tak działały Iterative Guidance Mode Saturna V i Powered Explicit Guidance promu kosmicznego, a w zmodyfikowanej postaci działa większość współczesnych rakiet nośnych.

W modelu, z aktualizacją co 5 s: przy ciągu -3% i $+3\%$, $I_{sp} -1\%$ i kącie toru $+1^\circ$ wysokość w chwili wyłączenia trafia z dokładnością do metrów, a orbita jest 200×200 km z dokładnością ok. 1 km. Przy kącie toru $+3^\circ$ zapas paliwa 3,12 t wobec 2,51 t przy śledzeniu: nowy plan wykorzystuje to, że rakietę jest już wyżej, zamiast ją ściągać z powrotem. Ceną jest obliczenie: w każdym cyklu kilka całkowań trajektorii do końca lotu. Komputer Saturna V nie miał na to mocy, więc IGM używał przybliżonych wzorów analitycznych; dziś to ułamek sekundy.

Słaby punkt: im bliżej wyłączenia, tym bardziej zadanie staje się źle uwarunkowane (mało czasu na poprawki, czułe parametry). Rzeczywiste algorytmy w ostatnich sekundach zamrażają parametry i lecą według ostatniego rozwiązania.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Dlaczego naprowadzanie jawne nie potrzebuje znać przyczyny odchyłki (np. że ciąg jest o 3% mniejszy)?

2 Zapas paliwa przy kącie toru $+3^\circ$: program otwarty 2,92 t (chybia), śledzenie 2,51 t, jawne 3,12 t. Wyjaśnij kolejność.

3 Ile rozwiązań zadania brzegowego wykonuje naprowadzanie jawne w ciągu 272 s przy aktualizacji co 5 s? Ile całkowań trajektorii, jeśli każde wymaga 3 iteracji Newtona po 3 całkowania?

podstawowe średnie feynmanowskie

Porównanie i awaria silnika

Test na wzór Apollo 13: od 100. sekundy ciąg spada o 20%. Program otwarty kończy z perygeum -47 km (powrót do atmosfery w pierwszym obiegu). Śledzenie odchyłek: 191×208 km, bo duża odchyłka wychodzi poza zakres liniowy i korekta jest ograniczona. Naprowadzanie jawne: 199×201 km, praca dłuższa o 44 s, zapas paliwa 3,31 t.

Perygeum / apogeum [km] i zapas paliwa [t] dla trzech sposobów naprowadzania

Odchyłka	program otwarty	śledzenie (LQR)	jawne
ciąg -3%	137 / 242; 3,51	199 / 201; 3,44	199 / 201; 3,45
kąt toru +3°	168 / 356; 2,92	199 / 202; 2,51	200 / 200; 3,12
ciąg -20% od 100 s	-47 / 371; 3,63	191 / 208; 3,29	199 / 201; 3,31

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Przy spadku ciągu o 20% od 100. sekundy praca trwa 316 s zamiast 272 s. Sprawdź zgrubnie z równania Ciołkowskiego, że dodatkowy czas jest rzędu 40 s.

- 2 Kiedy śledzenie odchyłek wystarczy i jest lepsze od naprowadzania jawnego?

 podstawowe
  średnie
  feynmanowskie

☰ METODA: NAPROWADZANIE FAZY NAPĘDOWEJ

1. **Plan:** zasada maksimum → postać prawa (tangens liniowy) → parametry metodą strzałów.
2. **Wrażliwość:** program otwarty przy odchyłkach ciągu, I_{sp} , stanu początkowego.
3. **Korekta:** śledzenie (LQR, plan indeksowany prędkością) albo jawne (ponowne strzały co kilka sekund).
4. **Sprawdzenie:** Monte Carlo odchyłek; zapas paliwa i dokładność orbity; zachowanie w ostatnich sekundach.

Przykład 6.1

Plan dla rakiety modelowej

Znajdź parametry prawa tangensa liniowego dla orbity 200 km.

- 1 Zgadujemy $a = 0,15$, $b = 4 \cdot 10^{-4}$ 1/s; całkujemy do $v_t = 7784$ m/s; błędy wysokości i prędkości pionowej.
- 2 Newton z jacobianem z różnic skończonych; po kilku iteracjach $a = 0,1434$, $b = 3,88 \cdot 10^{-4}$ 1/s.

Wynik: 272 s pracy, kąt od $8,2^\circ$ do $2,2^\circ$, zapas 3,47 t.

Sprawdzenie: zużyte paliwo 96,5 t daje $\Delta v = 345 \cdot 9,81 \cdot \ln(119/22,5) = 5640$ m/s: to prawie dokładnie przyrost prędkości poziomej (5562 m/s) plus mała strata na nachylenie ciągu. Prędkość pionową (1262 m/s) wytraca grawitacja, nie silnik. Pozostałe 3,47 t paliwa to ok. 570 m/s zapasu z 6207 m/s idealnego Δv stopnia (lekcja astro 4) ✓.

Przykład 6.2

Słabszy silnik

Ciąg o 3% mniejszy. Porównaj trzy sposoby naprowadzania.

- 1 Program otwarty: 137×242 km, orbita nietrwała.
- 2 Śledzenie: 199×201 km; jawne: 199×201 km; zapasy 3,44 i 3,45 t.

Wynik: przy małych odchyłkach śledzenie i jawne są równoważne.

Sprawdzenie: Symulacja 1 z ciągiem -3% ✓.

Przykład 6.3

Gorszy pierwszy stopień

Pierwszy stopień zostawia rakietę z kątem toru o 3° większym. Które naprowadzanie?

- 1 Program otwarty: apogeum 356 km, perygeum 168 km.
- 2 Śledzenie: trafia, zapas 2,51 t. Jawne: trafia, zapas 3,12 t.

Wynik: jawne; różnica 0,6 t paliwa to ok. 4% ładunku.

Sprawdzenie: różnica rośnie z wielkością odchyłki: przy $+1^\circ$ to 0,18 t (3,18 i 3,36 t) ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Naprowadzanie to to samo co sterowanie orientacją.”

Naprowadzanie wybiera zadaną orientację (pętla zewnętrzna, sekundy-minuty); sterowanie ją realizuje (pętla wewnętrzna, ułamki sekundy).

× „Dokładny plan wystarczy.”

Program otwarty przenosi każdą odchyłkę wprost na orbitę: 3% ciągu to 60 km różnicy perygeum.

× „Odchyłkę od planu mierzy się w tej samej sekundzie.”

Lepiej w tym samym etapie lotu (np. przy tej samej prędkości): spóźnienie nie jest błędem toru.

× „Powrót na plan jest zawsze najlepszy.”

Plan był optymalny dla innego stanu; po dużej odchyłce lepiej policzyć nowy.

× „Przy kącie ciągu kilku stopni nad horyzontem rakietę przestaje się wznosić.”

Wznosi się siłą rozpędu z pierwszego stopnia; ciąg ma tylko tak sterować wytracaniem prędkości pionowej, żeby skończyła się dokładnie na docelowej wysokości.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 Czas wyłączenia jako niewiadoma. My wyłączamy silnik przy zadanej prędkości poziomej. Jak zmienia się zadanie, gdy celem jest maksymalny ładunek, a czas wyłączenia jest swobodny?

2 Nawigacja. Naprowadzanie jawne potrzebuje dokładnego stanu. Skąd go bierze rakietę i co, jeśli jest błędny?

3 Atmosfera. Dlaczego w locie pierwszego stopnia (w atmosferze) prawie zawsze używa się programu otwartego z odciążeniem, a naprowadzanie jawne włącza się dopiero wyżej?

4 Stabilność śledzenia. Pasma pętli naprowadzania przyjęliśmy 0,05 rad/s. Co ogranicza je od góry i od dołu?

5 Cały kurs. Wypisz, które lekcje kursu są potrzebne do zbudowania układu, który wprowadza raketę na orbitę, i w jakiej pętli każda z nich pracuje.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jaką postać ma optymalny program kąta ciągu nad płaską Ziemią?

$\tan \theta = a - bt$ (prawo tangensa liniowego), z zasady maksimum.

- 2 Czym grozi program otwarty?

Każda odchyłka (ciąg, stan po 1. stopniu) przenosi się wprost na orbitę.

- 3 Względem czego mierzyć odchyłkę przy śledzeniu?

Względem etapu lotu (np. prędkości poziomej), nie czasu.

- 4 Jakie wzmocnienia daje LQR dla podwójnego całkowania?

$\omega_n = (q/r)^{1/4}$, $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

- 5 Na czym polega naprowadzanie jawne?

Co kilka sekund rozwiązuje zadanie brzegowe od bieżącego stanu (strzały).

- 6 Kiedy jawne wyraźnie wygrywa?

Przy dużych odchyłkach i awariach: trafia i oszczędza paliwo, bo nie wraca do nieaktualnego planu.

PLAN

$H = \lambda \cdot f$; λ_v liniowe w czasie

$\tan \theta = a - bt$

a, b : metoda strzałów (Newton)

KOREKTA

$\delta \ddot{h} \approx a \cos \theta_n \delta \theta$

LQR: $\omega_n = (q/r)^{1/4}$, $\zeta = 1/\sqrt{2}$

$\theta = \theta_n(v_t) - (\omega_n^2 \delta h + 2\zeta \omega_n \delta v_r) / (a \cos \theta_n)$

jawne: strzały co Δt od bieżącego stanu

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics* (Birkhäuser), rozdziały o sterowaniu optymalnym i naprowadzaniu rakiety nośnej.
- **Dla chętnych:** A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control* (Hemisphere), rozdz. 2: prawo tangensa liniowego i jego warianty.

To koniec kursu dynamiki lotu. Zaczęliśmy od obrotów w trzech wymiarach, przez samolot, jego mody i autopilota, doszliśmy do pełnej symulacji, rakiety i naprowadzania. Każda pętla w rakiecie, od siłownika dyszy po wybór orbity, korzysta z czegoś, co było w tym kursie albo w automatyce i astronautyce.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\partial H / \partial \theta = a(-\lambda_{v_x} \sin \theta + \lambda_{v_y} \cos \theta) = 0$, stąd $\tan \theta = \lambda_{v_y} / \lambda_{v_x}$. (Druga pochodna wybiera, czy to maksimum, czyli znak wektora $(\cos \theta, \sin \theta)$ zgodny z $(\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y})$.)
2. $\arctan 0,1434 = 8,2^\circ$; $\arctan 0,0906 = 5,2^\circ$; $\arctan 0,0379 = 2,2^\circ$.
3. Warunki końcowe (wysokość, prędkość pionowa) zależą od a, b przez całkę równań ruchu ze zmienną masą i grawitacją; nie ma zamkniętej postaci. Zgadujemy a, b , całkujemy do wyłączenia, poprawiamy metodą Newtona z numerycznym jacobianem (lekcja automatyki 5.1).

Zadania · część 2

1. Mniejszy ciąg przy tym samym I_{sp} to mniejszy wydatek masy, więc ten sam przyrost prędkości trwa dłużej. Przez dodatkowe sekundy grawitacja dalej odbiera prędkość pionową, a kąty z planu przypadają na mniejsze prędkości niż w planie, więc składowa pionowa ciągu nie nadrabia tej straty.
2. Przy niższym I_{sp} i tym samym ciągu przyspieszenie w każdej sekundzie jest prawie takie samo (różni się tylko przez nieco szybszy ubytek masy), więc lot przebiega prawie według planu; kończy się tylko mniejszym zapasem paliwa. Ciąg zmienia przyspieszenie od pierwszej sekundy.
3. $r_p = 6515$, $r_a = 6620$ km; $e = (r_a - r_p) / (r_a + r_p) = 105 / 13135 = 0,008$.

Zadania · część 3

1. Zamknięta pętla: $s^2 + k_2 s + k_1 = 0$, $\omega_n = \sqrt{k_1}$, $2\zeta\omega_n = k_2 = \sqrt{2}\sqrt{k_1}$, więc $\zeta = \sqrt{2}/2$.
2. $q/r = 0,05^4 = 6,25 \cdot 10^{-6}$ (1/s⁴). $\delta\theta = 0,0025 \cdot 1000/15 = 0,17$ rad $\approx 9,5^\circ$ (na samym początku; po chwili człon prędkościowy go zmniejsza). W symulacji korekta jest ograniczona do $\pm 0,5$ rad.
3. Rakieta jest w każdej sekundzie wolniejsza niż w planie; regulator widzi to jako błąd wysokości i prędkości, choć rakieta jest na dobrym torze, tylko później. Próbuje „dogonić” plan w wysokości, a na końcu wyłącza się przy innej wysokości niż plan przy tej samej prędkości. Indeksowanie prędkością poziomą porównuje rakietę z planem w tym samym etapie lotu.

Zadania · część 4

1. Każde rozwiązanie zaczyna od zmierzonego stanu, więc skutki odchyłki do tej chwili są uwzględnione. Model ciągu w przewidywaniu jest błędny, ale błąd przewidywania maleje w miarę zbliżania się do końca, a rozwiązanie jest odświeżane co 5 s. Lepiej oczywiście, jeśli nawigacja mierzy też przyspieszenie i masa jest szacowana na bieżąco.
2. Program otwarty nie koryguje i chybia orbity, więc jego zapas nic nie znaczy. Śledzenie trafia, ale najpierw ściąga rakietę na stary tor (strata), a potem leci według planu zrobionego dla innego stanu. Jawne liczy optymalny plan z bieżącego stanu, więc z dostępnej energii korzysta najlepiej.
3. Ok. 55 rozwiązań, ok. 500 całkowań; każde z krokiem 1 s ma co najwyżej ok. 270 kroków.

Zadania · część 5

1. Potrzebny przyrost prędkości jest prawie ten sam, więc trzeba spalić prawie tę samą masę. Po 100. sekundzie zostało do spalania ok. $(272 - 100) \cdot 355 = 61$ t przy wydatku zmniejszonym do 284 kg/s: $61\,000/284 = 215$ s zamiast 172 s, czyli o 43 s dłużej (symulacja: 44 s; trochę więcej przez dłuższe działanie grawitacji).
2. Gdy odchyłki są małe (zakres liniowy), komputer słaby albo trzeba zagwarantować przewidywalne zachowanie (certyfikacja, analiza stabilności). Zbiór wzmocnień liczy się na ziemi; w locie to kilka mnożeń. Przy dużych odchyłkach i awariach naprowadzanie jawne.

Zadania do przemyslenia

1. Dochodzi warunek transversalności dla czasu końcowego ($H(t_f) = 0$ dla zadania minimalnego czasu/paliwa) i trzecia niewiadoma t_f .
2. Przy stałym ciągu minimalny czas pracy oznacza minimalne paliwo, więc zadanie to „dolecieć w najkrótszym czasie do zadanego stanu”; parametry (a, b, t_f) dobiera się trzema warunkami (np. wysokość, prędkość pionowa, prędkość pozioma).
1. Z inercjalnego układu nawigacyjnego (żyroskopy i akcelerometry, całkowane), często z poprawkami GNSS; filtr Kalmana łączy je jak w lekcji 3.
2. Błąd nawigacji przenosi się na orbitę bezpośrednio: naprowadzanie trafia w orbitę, na której *myśli*, że jest. Dlatego dokładność nawigacji jest wymaganiem tej samej rangi co naprowadzanie.
1. W atmosferze ograniczeniem jest obciążenie $q\alpha$ (lekcja 11): zmiany kąta wynikające z naprowadzania zwiększałyby kąt natarcia przy max q .
2. Plan pierwszego stopnia jest więc kompromisem obciążeń i strat; odchyłki z tej fazy usuwa naprowadzanie drugiego stopnia, w próżni, gdzie zmiana kierunku ciągu nic nie kosztuje konstrukcyjnie.
1. Od góry: pętla orientacji (ok. 2 rad/s) musi być dużo szybsza, inaczej obie pętle się sprzęgają; szum nawigacji wzmacniany przez duże wzmocnienia; nasycenie kąta korekty.
2. Od dołu: odchyłki muszą zostać usunięte przed końcem pracy (stała czasowa dużo krótsza niż czas pozostały); pod koniec lotu to ograniczenie staje się krytyczne.
1. Pętla wewnętrzna (orientacja): bryła sztywna i kwaterniony (lot 1–2), sterowanie PD, nasycenie, harmonogram (automatyka 3), rakieta i ciąg wektorowany (lot 11).
2. Nawigacja: filtr Kalmana i fuzja czujników (automatyka 4, lot 3). Pętla zewnętrzna (naprowadzanie): ruch orbitalny i rakieta (astro 1, 4), zasada maksimum i strzały (automatyka 5.1), LQR (automatyka 4.3), ta lekcja.

Dynamika lotu · Lekcja 12: Naprowadzanie · Źródła: A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics* (Birkhäuser); A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control* (Hemisphere). Rakieta modelowa z lekcji astronautyki 4; ruch w płaszczyźnie orbity, bez atmosfery i obrotu Ziemi. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l12.py).