

# Symulacja 6 stopni swobody: składamy samolot

Dziewięć lekcji opisywało samolot kawałkami: orientację, bryłę sztywną, aerodynamikę ruchu podłużnego i boczno, tłumiki, autopilota. Prawie zawsze w postaci liniowej, przy małych zaburzeniach. Ta lekcja jest projektem: składamy wszystko w jeden nieliniowy symulator sześciu stopni swobody, trzymujemy go, sprawdzamy na modelach liniowych, a potem lecimy tam, gdzie modele liniowe przestają działać: w przeciągnięcie, w ciasny zakręt i w powolną spiralę.

## CZAS

ok. 2 h teorii + ok.  
3 h projektu i  
zadań

## ZADANIA

14 zadań w treści  
+ 5 do  
przemyślenia, z  
odpowiedziami

## ŹRÓDŁA

P. H. Zipfel,  
*Modeling and  
Simulation of  
Aerospace Vehicle  
Dynamics*; B. L.  
Stevens, F. L.  
Lewis, E. N.  
Johnson, *Aircraft  
Control and  
Simulation*, rozdz.  
2-3; lekcje 1-9 tej  
części

## W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: niebieskie pudło Edwina Linka
- 1 Równania ruchu: 13 stanów
- 2 Model aerodynamiczny: współczynniki, przeciągnięcie, opóźnienie
- 3 Architektura symulatora: trym, całkowanie, linearyzacja
- 4 Walidacja i manewry nieliniowe
- 5 Monte Carlo i projekt
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

## Prolog: niebieskie pudło Edwina Linka

Pod koniec lat dwudziestych Edwin Link, syn producenta organów, zbudował z mieszkań organowych i pomp kabinę, która przechylała się i pochylała w odpowiedzi na drzątek. Lotnicy traktowali ją jak atrakcję wesołego miasteczka, dopóki w 1934 roku armia amerykańska, po serii wypadków pilotów wożących pocztę w chmurach, nie kupiła pierwszych trenażerów do nauki lotu według przyrządów. W czasie wojny przez „niebieskie pudła” przeszły setki tysięcy pilotów.

Trenażer Linka nie liczył żadnych równań: odtwarzał tylko, z grubsza, odczucia i wskazania przyrządów. Dzisiejszy symulator to program, który całkuje równania ruchu bryły sztywnej z siłami aerodynamicznymi i jest podstawowym narzędziem projektanta: na nim testuje się autopilota, zanim samolot oderwie się od ziemi. Ta lekcja buduje taki program od zera, z elementów, które już znamy.

**Pytanie na start.** Model liniowy z lekcji 4–5 i symulacja nieliniowa dają dla małego podmuchu prawie ten sam przebieg. Po co więc symulacja nieliniowa? Wymień trzy sytuacje, w których model liniowy na pewno zawiedzie. Odpowiedź w części 4.

## Równania ruchu: 13 stanów

Samolot to bryła sztywna (lekcja 2 Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia) o masie  $m$  i tensorze bezwładności  $I$ . Jej stan opisuje 13 liczb:

### STAN SYMULATORA 6 DOF

$\mathbf{v}_b = [u; v; w]$  – prędkość w osiach ciała (x w nos, y w prawe skrzydło, z w dół), m/s;

$\boldsymbol{\omega} = [p; q; r]$  – prędkość kątowna w osiach ciała, rad/s;

$\mathbf{q} = [q_0; q_1; q_2; q_3]$  – kwaternion orientacji ciało  $\rightarrow$  NED (lekcja 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony),  $|\mathbf{q}| = 1$ ;

$\mathbf{p} = [x_N; y_E; z_D]$  – położenie w układzie NED, m (wysokość  $h = -z_D$ ).

Równania ruchu to cztery wektorowe równania pierwszego rzędu:

$$\dot{\mathbf{v}}_b = \frac{\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_T}{m} + R^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = I^{-1}(\mathbf{M}_a - \boldsymbol{\omega} \times I \boldsymbol{\omega}),$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes (0, \boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\mathbf{p}} = R(\mathbf{q}) \mathbf{v}_b.$$

Pierwsze równanie to druga zasada dynamiki zapisana w obracającym się układzie ciała: człon  $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b$  pojawia się dlatego, że osie, w których mierzymy prędkość, same się obracają (lekcja 2

Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia). Grawitacja jest prosta w NED, więc przenosimy ją do osi ciała macierzą  $R^T$ . Drugie równanie to równania Eulera bryły sztywnej. Trzecie to kinematyka kwaternionu z lekcji 1, czwarte zamienia prędkość w osiach ciała na ruch po mapie.

Dlaczego kwaternion, a nie kąty Eulera? Kąty Eulera mają osobliwość przy  $\theta = \pm 90^\circ$  (lekcja 1): symulacja pętli albo pionowego wznoszenia by się wysypała. Kwaternion nie ma osobliwości, kosztem jednej nadmiarowej liczby i więzu  $|\mathbf{q}| = 1$ , który po każdym kroku przywracamy, dzieląc przez normę. Kąty  $\psi, \theta, \varphi$  liczymy z kwaternionu tylko do wyświetlania i dla autopilota.

#### DLACZEGO ZAŁOŻENIE PŁASKIEJ, NIERUCHOMEJ ZIEMI WYSTARCZA

NED traktujemy tu jak układ inercjalny, a Ziemię jak płaską. Pomijamy przyspieszenie Coriolisa od obrotu Ziemi:  $2\Omega_E V \approx 2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 55 = 0,008 \text{ m/s}^2$ , ok. tysięczna część  $g$ . Dla samolotu lekkiego w locie trwającym minuty to dużo mniej niż niepewność aerodynamiki. Dla pocisku dalekiego zasięgu albo rakiety nośnej trzeba już układu związanego z Ziemią, z jej obrotem i krzywizną; Zipfel opisuje takie symulacje i do tego wrócimy w części o rakiecie.

#### ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Bryła sztywna ma 6 stopni swobody. Dlaczego symulator ma 13 stanów, a nie 12?  

- 2 Samolot leci poziomo, bez przechylenia, z pochyleniem  $\theta = 4,26^\circ$  (równym kątowi natarcia). Ile wynosi składowa siły ciężkości wzdłuż osi  $x$  ciała przy  $m = 1100 \text{ kg}$ ? Co musi ją zrównoważyć?  

- 3 Samolot leci z prędkością  $u = 55 \text{ m/s}$  i zaczyna podnosić nos z  $q = 0,1 \text{ rad/s}$ , przy stałych  $v = 0$  i  $w$ . Jakie przyspieszenie wzdłuż osi  $z$  ciała musi wytworzyć siła aerodynamiczna (ponad ciężar), i co to oznacza fizycznie?  


 podstawowe    średnie    feynmanowskie

## 2 Model aerodynamiczny: współczynniki, przeciągnięcie, opóźnienie

Całą fizykę samolotu zawierają siły  $\mathbf{F}_a$  i momenty  $\mathbf{M}_a$ . Symulator liczy je w każdym kroku z bieżącego stanu: najpierw prędkość  $V = |\mathbf{v}_b|$ , kąt natarcia  $\alpha = \text{atan2}(w, u)$ , kąt ślizgu  $\beta = \arcsin(v/V)$  i ciśnienie dynamiczne  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2$  z gęstością z atmosfery wzorcowej, a potem

współczynniki. Używamy dokładnie samolotu z lekcji 4 Stateczność statyczna i trym: dlaczego samolot ma ogon-7 Ruch boczny: przechylenie, spirala i holendrowanie:

#### ✈ MODEL AERODYNAMICZNY SYMULATORA

**Skrzydło:**  $C_{L,w} = a_w \alpha$  do  $\alpha_s = 14^\circ$ , dalej spada z nachyleniem  $-1,5/\text{rad}$  (przeciągnięcie).

**Usterzenie:**  $\alpha_H = \alpha(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}) + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_H}{V} + i' + \tau \delta_e + q \frac{l_H}{V}$ ,  $C_{L,H} = a_H \alpha_H$ .

**Całość:**  $C_L = C_{L,w} + \eta \frac{S_H}{S} C_{L,H}$ ,  $C_m = C_{m,ac} + (h - h_{ac}) C_L - \eta V_H C_{L,H}$ .

**Opór:**  $C_D = C_{D0} + \frac{C_{L,w}^2}{\pi e A} + 1,0 \cdot \max(0, |\alpha| - \alpha_s)$ .

**Ruch boczny:**  $C_Y, C_l, C_n$  liniowe w  $\beta, \hat{p}, \hat{r}, \delta_a, \delta_r$  z pochodnymi z lekcji 7 (np.  $C_{n_p} = -C_L/8$ ,  $C_{l_r} = C_L/4 + \dots$ ).

**Siły w osiach ciała:**  $X = L \sin \alpha - D \cos \alpha + T$ ,  $Z = -L \cos \alpha - D \sin \alpha$ ,  $Y = \bar{q} S C_Y$ .

Trzy rzeczy w tym modelu są nowe w porównaniu z modelami liniowymi. Po pierwsze, **przeciągnięcie**: powyżej  $14^\circ$  siła nośna skrzydła maleje, a opór gwałtownie rośnie. To bardzo uproszczony model (prawdziwe przeciągnięcie ma histerezę, zależy od  $\dot{\alpha}$ , jest niesymetryczne i potrafi przejść w korkociąg), ale wystarcza, żeby zobaczyć granicę obszaru, w którym działa linearyzacja. Po drugie, **prędkość wpływa przez  $\bar{q}$  i  $V$  w mianownikach** dokładnie, a nie przez pochodne  $X_u, Z_u$ . Po trzecie, ruch podłużny i boczny są w jednych równaniach: w przechyleniu siła nośna nie jest pionowa, a to sprzęga oba ruchy.

Człon z  $\dot{\alpha}$  wymaga uwagi. Strumień odchylony przez skrzydło dociera do usterzenia po czasie  $l_H/V$  (lekcja 5 Lot w płaszczyźnie symetrii: model podłużny i pochodne stateczności: pochodna  $M_{\dot{\alpha}}$ ). W symulatorze  $\dot{\alpha}$  zależy od  $\dot{w}$ , a  $\dot{w}$  od sił, które zależą od  $\dot{\alpha}$ : pętla algebraiczna. Najprostsze wyjście, stosowane w wielu symulatorach, to wziąć  $\dot{\alpha}$  z poprzedniego kroku, z różnicy wstecznej  $(\alpha_k - \alpha_{k-1})/\Delta t$ . Przy kroku 0,01 s opóźnienie o jeden krok jest pomijalne wobec stałej czasowej  $l_H/V = 0,08$  s.

#### ⚠ PUŁAPKA: STAŁE Z LEKCJI LINIOWYCH TO NIE DANE

Model ma postać jawnych współczynników, ale ich wartości dla ruchu bocznego oszacowaliśmy w lekcji 7 z geometrii (porównując z wykładem dla Cessny 172), a geometrię usterzenia przyjęliśmy. Symulator dokładnie całkuje równania, ale nie wie więcej o samolocie niż ten model. Prawdziwe symulatory używają tablic współczynników z tunelu i prób w locie, często z setkami punktów w  $\alpha, \beta$ , liczbie Macha i wychyleniach.

- 1 Ile wynosi największy współczynnik siły nośnej skrzydła w modelu ( $a_w = 4,94/\text{rad}$ )?  
 ■■ Oszacuj prędkość przeciągnięcia samolotu o masie 1100 kg i powierzchni 16,2 m<sup>2</sup> na poziomie morza, pomijając siłę na usterzeniu.
- 2 Dlaczego symulator nie może po prostu policzyć  $\dot{\alpha}$  z bieżącego  $\dot{w}$  w tym samym wywołaniu funkcji prawej strony? Podaj dwa sposoby rozwiązania problemu inne niż „ $\dot{\alpha}$  z poprzedniego kroku”.
- 3 Policz współczynnik oporu w trymie ( $\alpha = 4,26^\circ$ ) i przy  $\alpha = 19,4^\circ$  (największy kąt w symulacji silnego wyrwania). Przyjmij  $C_{D0} = 0,03$ ,  $\pi e A = 18,4$ .

■■■ podstawowe   ■■■ średnie   ■■■ feynmanowskie

3

## Architektura symulatora: trym, całkowanie, linearyzacja

Symulator ma cztery części, które warto pisać osobno i testować osobno (tak radzi też Zipfel):

### ELEMENTY SYMULATORA

1. **Prawa strona  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ :** model aerodynamiczny, atmosfera, równania ruchu. Funkcja bez pamięci.
2. **Trym:** szukamy  $\alpha$ ,  $\delta_e$ ,  $T$ , przy których  $\dot{u} = \dot{w} = \dot{q} = 0$  w locie poziomym. Trzy niewiadome, trzy równania, metoda Newtona (lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++) z jacobianem z różnic skończonych.
3. **Całkowanie:** RK4 ze stałym krokiem  $\Delta t = 0,01$  s, normalizacja kwaternionu po każdym kroku.
4. **Pętla symulacji:** co krok odczyt stanu, regulatory (autopilot) liczą sterowanie, sterowanie stoi przez cały krok (próbkiwanie z podtrzymaniem), zapis wyników.

Trym daje dla naszego samolotu przy 55 m/s:  $\alpha = 4,261^\circ$ ,  $\delta_e = -2,639^\circ$ ,  $T = 1123$  N. Model liniowy z lekcji 4 dawał  $4,292^\circ$  i  $-2,672^\circ$ . Różnica jest prawdziwa i ma prosty powód: w symulatorze ciąg działa wzdłuż osi kadłuba, więc ma składową pionową  $T \sin \alpha = 83$  N, która odciąża skrzydło (przykład 6.1).

Ostatni element to **linearyzacja numeryczna**: macierz  $A = \partial f / \partial \mathbf{x}$  w punkcie trymu z różnic centralnych, kolumna po kolumnie. To pozwala porównać symulator z modelami liniowymi z lekcji 4–7. Jest jedna pułapka:  $f$  zależy też od  $\dot{\alpha}$ . Linearyzacja, która to pomija, dostaje dla modu krótkookresowego  $-3,81 \pm 5,05i$  ( $\zeta = 0,60$ ), a lekcja 4 miała  $-4,92 \pm 4,11i$  ( $\zeta = 0,77$ ). Brakuje tłumienia od  $M_{\dot{\alpha}}$ . Poprawnie:  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}\dot{\alpha}$ , gdzie  $\dot{\alpha} = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}}$ , więc

$$\dot{\mathbf{x}} = (I - \mathbf{b}\mathbf{c}^T)^{-1} A\mathbf{x}, \quad \mathbf{b} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\alpha}}, \quad \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}} = \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2 + w^2}.$$

Z tym poprawionym wzorem: mod krótkookresowy  $-4,80 \pm 4,05i$ , fugoida  $-0,0166 \pm 0,208i$ ; lekcja 4:  $-4,92 \pm 4,11i$  i  $-0,0165 \pm 0,206i$ . Fugoida zgadza się prawie dokładnie, mod krótkookresowy do 2–3%; resztę wyjaśniają uproszczenia lekcji 4 (np. opór liczony z całkowitego  $C_L$ , inny kierunek ciągu).

Druga pułapka linearyzacji dotyczy kwaternionu. Żeby porównać bieguny z lekcjami 4–7, sprowadzamy 13 stanów do zmiennych fizycznych  $(u, w, q, \theta)$  i  $(v, p, r, \varphi)$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + T\mathbf{z}$ , gdzie kolumny  $T$  to pochodne stanu po  $\theta, \varphi$  itd., i  $A_z = T^+ A T$ . Wybranie z macierzy samych wierszy i kolumn  $q_1$  albo  $q_2$  jest błędem: przy  $\theta_0 \neq 0$  zmiana przechylenia porusza kilka składowych kwaternionu naraz. Co więcej, w ruchu bocznym trzeba dołączyć do  $T$  także kierunek  $\psi$  (i potem go odrzucić, bo kurs nie wpływa na dynamikę): przy  $\theta_0 \neq 0$  kierunki „zmiana  $\varphi$ ” i „zmiana  $\psi$ ” w przestrzeni kwaternionów nie są prostopadłe, a rzut na samo  $\varphi$  myli zmianę kursu ze zmianą przechylenia. Pierwsza wersja skryptu do tej lekcji popełniła ten błąd i dostała mod spiralny trzy razy za szybki. Najpewniejszy test: wartości własne całej macierzy  $13 \times 13$  (pięć z nich to zera od położenia, kursu i normy kwaternionu) muszą zawierać wszystkie bieguny modeli zredukowanych.

## Python · szkielek symulatora (pełna wersja: tools/verify/l10.py)

```
import numpy as np

def f(x, u, ald):
    """Prawa strona: x = [u v w p q r q0 q1 q2 q3 xN yE zD], u = [de da dr T]."""
    vb, w, q, pos = x[0:3], x[3:6], x[6:10], x[10:13]
    F, M = aero(x, u, ald) # model z części 2, osie ciała
    R = q2R(q) # ciało -> NED (lekcja 1)
    vdot = (F + R.T @ [0, 0, m*g]) / m - np.cross(w, vb)
    wdot = np.linalg.solve(I, M - np.cross(w, I @ w))
    qdot = 0.5 * qmul(q, np.r_[0, w])
    return np.r_[vdot, wdot, qdot, R @ vb]

def rk4(x, u, dt, ald):
    k1 = f(x, u, ald); k2 = f(x + dt/2*k1, u, ald)
    k3 = f(x + dt/2*k2, u, ald); k4 = f(x + dt*k3, u, ald)
    x = x + dt/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
    x[6:10] /= np.linalg.norm(x[6:10]) # więz |q| = 1
    return x

def simulate(x0, ctrl, TF, dt=0.01):
    x, st, out = x0.copy(), {}, []
    al_prev, ald = np.arctan2(x[2], x[0]), 0.0
    for k in range(int(round(TF/dt)) + 1):
        u = ctrl(k*dt, x, st, dt) # autopilot: próbkowanie co krok
        out.append(np.r_[k*dt, x, u])
        x = rk4(x, u, dt, ald)
        al = np.arctan2(x[2], x[0]); ald = (al - al_prev)/dt; al_prev = al
    return np.array(out)
```

## ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- Trym szuka trzech niewiadomych z trzech równań  $\dot{u} = \dot{w} = \dot{q} = 0$ . Dlaczego nie trzeba sprawdzać pozostałych trzech równań dynamiki ( $\dot{v}, \dot{p}, \dot{r}$ )?
- Najszybszy mod naszego samolotu to przechylenie z  $\lambda = -12,5/s$ . Obszar stateczności RK4 na osi rzeczywistej sięga  $\lambda\Delta t \approx -2,79$ . Jaki największy krok jest jeszcze stateczny? Dlaczego używamy dużo mniejszego?
- Linearyzacja bez członu  $\dot{\alpha}$  daje mod krótkookresowy  $-3,81 \pm 5,05i$ , z członem  $-4,80 \pm 4,05i$ . Oblicz  $\omega_n$  i  $\zeta$  w obu przypadkach. Który parametr zmienia się bardziej i dlaczego?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

## 4 Walidacja i manewry nieliniowe

Symulator, który nie został sprawdzony, to generator przekonujących wykresów. Kolejność sprawdzania: najpierw testy bez aerodynamiki (bryła swobodna zachowuje energię i moment

pędu, lekcja 2), potem trym ( $f = 0$  w trymie; u nas reszta  $2 \cdot 10^{-15}$ ), potem zgodność z modelem liniowym dla małych zaburzeń, a dopiero potem manewry, których model liniowy nie opisuje.

**Mały podmuch.** Pionowy podmuch zwiększa kąt natarcia skokowo o  $2^\circ$ . Symulacja nieliniowa i model liniowy z lekcji 4 różnią się najwyżej o  $0,010^\circ$ . Przy  $8^\circ$  różnica rośnie do  $0,038^\circ$ , prawie dokładnie czterokrotnie. To ważna wskazówka: gdyby różnica pochodziła z nieliniowości, rosłaby jak kwadrat amplitudy (szesnastokrotnie). Rośnie liniowo, więc pochodzi z drobnych różnic między modelami (ciąg wzdłuż kadłuba, opór), a nie z nieliniowości.

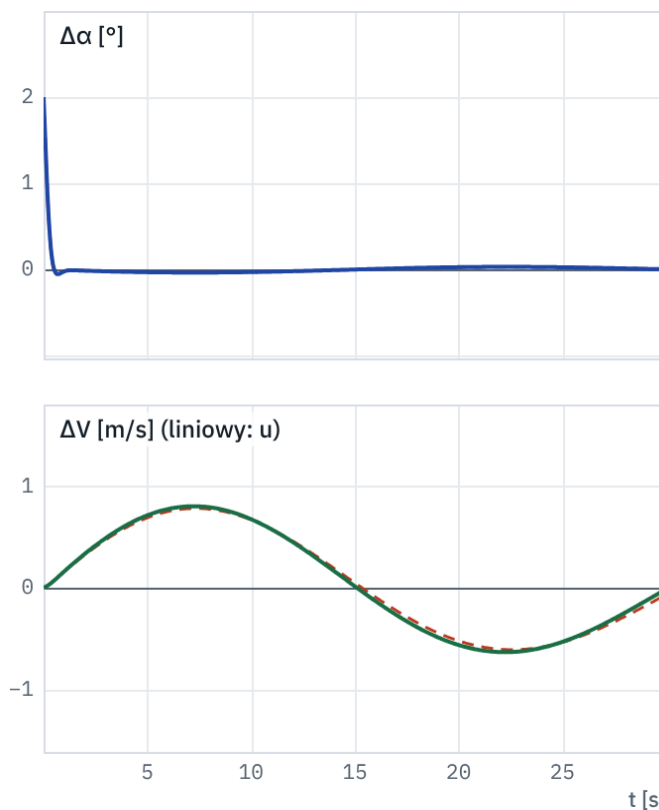
**Wyrwanie.** Ster w górę o  $\Delta\delta_e$  przez 3 s, potem z powrotem. Przy  $4^\circ$ : największy kąt natarcia  $7,1^\circ$ , prędkość spada do 40,9 m/s, wysokość rośnie o 73 m. Przy  $8^\circ$ :  $9,9^\circ$ , 27,6 m/s, 116 m. Przy  $12^\circ$ :  $19,4^\circ$ , czyli przeciągnięcie, prędkość 15,8 m/s. Model liniowy (z  $u$  jako małym zaburzeniem) już przy  $4^\circ$  rozjeżdża się w prędkości: spadek o 14 m/s to nie jest małe zaburzenie prędkości 55 m/s.

**Ciasny zakręt.** Autopilot z lekcji 9 Autopilot: pętle wewnętrzne i zewnętrzne zadaje przechylenie i trzyma wysokość, z kompensacją  $q$  w zakręcie: w ustalonym zakręcie samolot obraca się w pochyleniu z  $q = (g/V) \tan \varphi \sin \varphi$ , i pętla tłumienia nie może z tym walczyć. Przy  $30^\circ$  wszystko jest łagodne: samolot traci najwyżej 19,5 m. Przy  $60^\circ$  przeciążenie wynosi  $1/\cos 60^\circ = 2$  g; siła nośna musi się podwoić, więc opór indukowany rośnie czterokrotnie. Z automatem ciągu: ciąg chwilowo do 2458 N, strata wysokości najwyżej 39 m; całka automatu ciągu ustala się powoli i dopiero po ok. 200 s zakręt jest naprawdę ustalony: ciąg 1790 N, kąt natarcia  $8,5^\circ$ . Bez automatu ciągu ten sam autopilot ciągnie coraz mocniej, aż do kąta natarcia  $20^\circ$ , za przeciągnięciem: samolot traci 610 m. Modele liniowe, osobne dla ruchu podłużnego i boczego, nie widzą tego sprzężenia w ogóle.

**Puszczone stery.** Samolot wytrzymowany, przechylony o  $20^\circ$ , stery puszczone. Spirala z lekcji 7 Ruch boczny: przechylenie, spirala i holendrowanie jest stateczna, więc przechylenie maleje: w symulacji do  $16,7^\circ$  po 10 s,  $14,8^\circ$  po 30 s i  $11,7^\circ$  po 60 s. Model liniowy z lekcji 7 daje  $15,8^\circ$ ,  $10,8^\circ$  i  $6,1^\circ$ . Linearyzacja symulatora wyjaśnia różnicę: mod przechylenia  $-12,46/s$  (lekcja 7:  $-12,65$ ) i holendrowanie  $-0,68 \pm 3,05i$  ( $-0,58 \pm 3,04i$ ) zgadzają się nieźle, ale mod spiralny ma  $-0,0067/s$ , czyli stałą czasową 149 s zamiast 52 s. Przyczyna: lekcja 7 liczy w osiach stateczności (z zerowym  $I_{xz}$  w tych osiach), a symulator przykłada te same pochodne do prędkości kątowych w osiach ciała, nachylonych o  $\alpha_0 = 4,3^\circ$ , z zerowym  $I_{xz}$  w osiach ciała. To dwa trochę różne samoloty. Sprawdzenie numeryczne: gdy w symulatorze liczyć momenty boczne z prędkości kątowych w osiach stateczności i przeliczyć tensor bezwładności ( $I_{xz} = -102 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  w osiach ciała), linearyzacja daje  $-12,65$ ,  $-0,58 \pm 3,04i$  i  $-0,0193$ , czyli dokładnie lekcję 7. Spirala, która jest różnicą dwóch małych iloczynów pochodnych (lekcja 7), wychwytuje taką niespójność pierwsza.

**SYMULACJA 1**

Nieliniowy symulator 6 DOF samolotu z lekcji 4–7, liczony w przeglądarce (RK4, krok 0,01 s). Cztery scenariusze: podmuch (porównanie z modelem liniowym), wyrwanie sterem wysokości (do przeciągnięcia), zakręt z autopilotem z lekcji 9 (z automatem ciągu i bez) i puszczone stery w przechyleniu. Suwak czasu przesuwają samolot po torze.



— symulacja nieliniowa    - - model liniowy (lekcje 4–7)    — prędkość albo wysokość (nieliniowo)  
 - - kąt natarcia  $\alpha$  (zakręt)

największa różnica  $\Delta\alpha$ : nieliniowy – liniowy **0,010°**

największy kąt natarcia **6,3°**

najmniejsza prędkość **54,4 m/s**

wysokość: min / max **-6 / 2 m**

Mały podmuch: symulacja nieliniowa i model liniowy z lekcji 4 i 5 pokrywają się z dokładnością setnych części stopnia. To jest test walidacyjny: gdyby się nie pokrywały, błąd jest w jednym z modeli.

Stan na rysunku: scenariusz podmuch, parametr 2°; samolot z lekcji 4–7 (1100 kg, 55 m/s, poziom morza), trym metodą Newtona:  $\alpha = 4,26^\circ$ ,  $\delta_e = -2,64^\circ$ ,  $T = 1123$  N; RK4 z krokiem 0,01 s, przeciągnięcie skrzydła przy 14°.

Odpowiedź na pytanie z prologu: model liniowy zawiedzie wszędzie tam, gdzie zaburzenie nie jest małe (prędkość zmienia się o kilkadziesiąt procent, kąt natarcia dochodzi do przeciągnięcia), gdzie ruch podłużny i boczny się sprzęgają (zakręt z dużym przechyleniem, korkociąg) i gdzie działają ograniczenia (nasycenie sterów i ciągu, logika trybów autopilota). Do tego dochodzą efekty, których nie ma w modelu w ogóle, ale to już kwestia modelu, a nie linearyzacji.

- 1 W symulacji wyrwania sterem o  $8^\circ$  prędkość spada z 55 do 27,6 m/s, a wysokość rośnie najwyżej o 115,8 m. Sprawdź bilansem energii, czy te liczby są spójne. Co to mówi o różnicy ciągu i oporu w tym manewrze?
- 2 Oszacuj ciąg potrzebny w ustalonym zakręcie z przechyleniem  $60^\circ$  przy 55 m/s. Przyjmij, że w locie poziomym opór 1123 N składa się z oporu indukowanego ok. 220 N i reszty niezależnej od siły nośnej. Porównaj z symulacją.
- 3 W symulacji z puszczonej sterami przechylenie po 60 s wynosi  $11,7^\circ$ , a w modelu liniowym  $6,1^\circ$ . Spirala ma w linearyzacji symulatora  $-0,0067/s$ , a w lekcji 7  $-0,0191/s$ . Ile wynoszą stałe czasowe spirali w obu modelach i jaki byłby wynik z samego modu spiralnego, startując od  $20^\circ$ ?

▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣▣ feynmanowskie

## 5 Monte Carlo i projekt

Jeden przebieg symulatora odpowiada jednemu samolotowi w jednych warunkach. Prawdziwy samolot lata z różnym załadunkiem, a środek ciężkości przesuwa się z paliwem i pasażerami. Analiza Monte Carlo losuje parametry z ich rozkładów, dla każdego losowania trzymuje i linearyzuje (albo symuluje manewr) i patrzy na rozrzut wyników. W naszym przykładzie: położenie środka ciężkości  $h \sim N(0,30; 0,04^2)$ , masa jednostajnie od 900 do 1250 kg, bezwładności skalowane z masą, 400 losowań (ziarno 7).

### WYNIKI MONTE CARLO (400 LOSOWAŃ)

Wylosowane  $h$  od 0,187 do 0,401; punkt neutralny  $h_n = 0,51$ , więc wszystkie przypadki są statecznie statycznie i żaden mod nie jest niestateczny.

Ster wysokości w trymie od  $-5,4^\circ$  do  $-0,4^\circ$ ; najbardziej ujemny przy przednim środku ciężkości i dużej masie.

Tłumienie modu krótkookresowego  $\zeta_{sp}$ : najmniejsze 0,65 (mediana 0,76). Tłumienie fugoidy: najmniejsze 0,071 (mediana 0,081).

Najgorszy przypadek dla tłumienia krótkookresowego to przedni środek ciężkości ( $h = 0,20$ ) z dużą masą: duża sztywność  $M_\alpha$  przy tym samym tłumieniu  $M_q$  podnosi częstość, a nie tłumienie. Wynik jest spójny z lekcją 6 (wymagania MIL dla  $\zeta_{sp}$  od 0,35 są spełnione z dużym zapasem). Monte Carlo nie dodaje fizyki; dodaje odpowiedź na pytanie „czy w całym zakresie”, którego jeden

przebieg nie daje. Ma dwa ograniczenia: wynik jest tylko tak dobry, jak przyjęte rozkłady, a rzadkie zdarzenia (np. z prawdopodobieństwem  $10^{-4}$ ) wymagają ogromnej liczby losowań.

## Projekt: rozbuduj symulator

1. **Test integratora.** Wyłącz aerodynamikę i grawitację, nadaj bryle obrót wokół osi pośredniej (lekcja 2). Sprawdź zachowanie energii i momentu pędu dla kroków 0,01 i 0,1 s.
2. **Trym w zakręcie.** Rozszerz trym o  $\varphi$ ,  $\delta_a$ ,  $\delta_r$ ,  $\beta$  i warunek  $\dot{\psi} = \text{const}$ . Porównaj ciąg z symulacją z autopilotem.
3. **Wiatr.** Dodaj prędkość wiatru w NED: aerodynamika ma liczyć siły od prędkości względem powietrza  $\mathbf{v}_b - \mathbf{R}^T \mathbf{w}_{NED}$ . Sprawdź, że stały wiatr tylko przesuwają tor.
4. **Turbulencja.** Dodaj podmuchy z filtru pierwszego rzędu sterowanego szumem (lekcja 9) i zbadaj Monte Carlo rozrzut wysokości w zakręcie  $30^\circ$ .
5. **Tłumiki i autopilot.** Dołącz tłumik odchylenia z lekcji 8 i sprawdź ślizg w zakręcie  $60^\circ$ .

### ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1  Położenie środka ciężkości ma rozkład  $N(0,30; 0,04^2)$ , a punkt neutralny jest w  $h_n = 0,51$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowanie da samolot statycznie niestateczny? Czy Monte Carlo z 400 losowaniami może to wykryć?
- 2  Chcesz oszacować metodą Monte Carlo prawdopodobieństwo  $p \approx 1\%$ , że autopilot w turbulencji przekroczy dopuszczalną stratę wysokości, z błędem standardowym 20% wartości. Ile losowań potrzeba?

 podstawowe    średnie    feynmanowskie

### ☰ METODA: BUDOWA I SPRAWDZENIE SYMULATORA

1. **Konwencje na piśmie:** układy (NED, osie ciała), znaki sterów, kolejność stanów, jednostki. Większość błędów symulatorów to błędy znaków.
2. **Prawa strona** jako funkcja bez pamięci; aerodynamika osobno od równań ruchu.
3. **Testy bez aerodynamiki:** spadek swobodny, bryła swobodna (energia, moment pędu).
4. **Trym** i sprawdzenie  $f = 0$ ; porównanie z ręcznym rachunkiem.
5. **Linearyzacja** (z członami zależnymi od pochodnych stanu) i porównanie biegunów z modelami liniowymi.
6. **Małe zaburzenia** nieliniowo kontra liniowo; potem manewry duże, ze sprawdzeniem bilansów energii.

#### Przykład 6.1

### Skąd różnica trymu

Model liniowy z lekcji 4 daje w trymie  $\alpha = 4,292^\circ$ , symulator  $4,261^\circ$ . Wyjaśnij różnicę rachunkiem.

- 1 W lekcji 4 siła nośna równoważy cały ciężar:  $L = mg = 10\,791\text{ N}$ .
- 2 W symulatorze ciąg  $T = 1123\text{ N}$  jest wzdłuż osi kadłuba, nachylonej o  $\alpha$  do toru: jego składowa prostopadła do toru to  $T \sin \alpha = 1123 \cdot 0,0743 = 83\text{ N}$ .
- 3 Siła nośna potrzebna jest mniejsza o 83 N. Przy  $\bar{q}S = 30\,016\text{ N}$  i nachyleniu krzywej nośności całego samolotu  $a = 5,39/\text{rad}$  (lekcja 4) to  $\Delta\alpha = 83/(30\,016 \cdot 5,39) = 5,1 \cdot 10^{-4}\text{ rad} = 0,029^\circ$ .

**Wynik:**  $4,292^\circ - 0,03^\circ \approx 4,26^\circ$ , zgodnie z symulatorem.

**Sprawdzenie:** gdy w symulatorze skierować ciąg wzdłuż prędkości, trym daje dokładnie  $4,292^\circ$  i  $-2,672^\circ$  jak lekcja 4 ✓. Ciąg 1123 N wobec oporu 1111 N z lekcji 4 to już inna sprawa: nachylenie ciągu daje tu tylko ok. 3 N, resztę daje nieco inny model oporu (opór indukowany liczony z siły nośnej skrzydła, a nie całego samolotu).

### Przykład 6.2

## Zakręt 60° bez automatu ciągu

Autopilot zadaje przechylenie 60° i trzyma wysokość sterem wysokości, przepustnica stoi na 1123 N. Przewidź, co się stanie, i porównaj z symulacją.

- 1 W zakręcie  $n = 2$ : potrzeba ok. 1600–1800 N ciągu (zadanie 4.2), jest 1123 N. Brakuje ok. 660 N, czyli  $\dot{E}/(mg) = -\Delta T V/(mg) \approx -660 \cdot 55/10\,791 \approx -3,4$  m/s.
- 2 Pętla wysokości podnosi nos, żeby nie tracić wysokości. Samolot zwalnia, przy mniejszej prędkości potrzeba większego  $C_L$ , opór indukowany rośnie dalej: sprzężenie zwrotne dodatnie.
- 3 Kąt natarcia rośnie do przeciągnięcia, siła nośna przestaje rosnąć, samolot opada mimo nosa w górę.

**Wynik:** symulacja: kąt natarcia do 20,1°, prędkość do 41 m/s, strata 610 m w 80 s.

**Sprawdzenie:** średnio  $610/80 = 7,6$  m/s opadania, ponad dwa razy więcej niż oszacowane 3,4 m/s, bo za przeciągnięciem opór jest kilkukrotnie większy (zadanie 2.3) ✓. To jest scenariusz „drugiej strony krzywej oporu” z lekcji 9.

## Jak dużo daje człon

$\dot{\alpha}$

## w podmuchu

Po skokowym podmuchu  $\Delta\alpha = 2^\circ$  symulator i model liniowy dają po 0,3 s  $\Delta\alpha = 0,394^\circ$  i  $0,384^\circ$ . Czy pominięcie  $M_{\dot{\alpha}}$  zmieniłoby ten wynik bardziej niż różnica modeli?

- 1 Bez  $\dot{\alpha}$  mod krótkookresowy ma  $-3,81 \pm 5,05i$  zamiast  $-4,80 \pm 4,05i$ : słabsze tłumienie, ale też wyższa częstość tłumiona.
- 2 Prosty rachunek z samej obwiedni  $e^{-\zeta\omega_n t}$  sugerowałby, że bez  $\dot{\alpha}$  odpowiedź po 0,3 s będzie *większa* (0,32 wobec 0,24). To mylący skrót: po 0,3 s jesteśmy w okolicy pierwszego przejścia przez zero, a o wartości decyduje faza drgań, czyli częstość tłumiona.
- 3 Symulacja z  $\dot{\alpha}$  wymuszonym na zero daje po 0,3 s  $\Delta\alpha = 0,175^\circ$  zamiast  $0,394^\circ$ : różnica  $0,22^\circ$ .

**Wynik:** pominięcie członu  $\dot{\alpha}$  zmienia odpowiedź ok. dwudziestokrotnie bardziej ( $0,22^\circ$ ) niż różnica między modelem nieliniowym a liniowym ( $0,010^\circ$ ).

**Sprawdzenie:** to dlatego linearyzacja numeryczna musi uwzględniać  $\dot{\alpha}$ : bez tego „walidacja” porównywałaby dwa różne samoloty. Przy okazji: oszacowanie z obwiedni pomyliło się co do znaku efektu, więc liczby, które dają się policzyć, lepiej policzyć ✓.

7

## Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

### × „Symulacja nieliniowa jest dokładniejsza niż model liniowy.”

Dokładniej całkuje równania, ale model sił może być tak samo niepewny. Dla małych zaburzeń oba modele dają to samo; różnica w spirali (część 4) pochodzi z drobnej niespójności modelu, a nie z nieliniowości.

### × „Skoro symulacja daje gładkie wykresy, jest poprawna.”

Błąd znaku albo zamienione osie dają gładkie, przekonujące i całkowicie fałszywe wyniki. Poprawność pokazują testy: trym, bilanse energii, zgodność z modelem liniowym.

× „Mniejszy krok zawsze daje lepszy wynik.”

Po pewnym progu błąd całkowania jest dużo mniejszy niż błąd modelu i niczego już nie zmienia, a przy bardzo małym kroku rosną błędy zaokrągleń i czas obliczeń. Krok dobiera się do najszybszych modów i do częstotliwości regulatorów.

× „Kwaternion nie wymaga normalizacji, bo RK4 jest dokładny.”

Każdy integrator powoli wyprowadza kwaternion z jednostkowej sfery. Normalizacja po kroku jest tania i konieczna.

× „Monte Carlo znajdzie każdy groźny przypadek.”

Znajdzie typowe przypadki z przyjętych rozkładów. Zdarzenia rzadkie wymagają ogromnej liczby losowań albo analizy najgorszego przypadku; zdarzenia spoza modelu nie pojawią się wcale.

## 8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

### ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 Dwa samoloty pod jedną nazwą.** Lekcja 7 i symulator mają te same pochodne boczne, a różne mody spiralne ( $-0,0191$  i  $-0,0067/s$ ). Zaproponuj eksperyment numeryczny, który rozstrzygnie, czy przyczyną jest wybór osi, i przewidź jego wynik.
- 2 Przeciągnięcie w modelu.** Nasz model przeciągnięcia jest symetryczny i bez histerezy. Wymień trzy zjawiska z rzeczywistego przeciągnięcia, których symulator nie pokaże, i jak można by je przybliżyć.
- 3 Dlaczego autopilot bez automatu ciągu ciągnie do przeciągnięcia.** Ułóż prosty argument, że w zakręcie  $60^\circ$  przy stałym ciągu pętla wysokości działa jak sprzężenie dodatnie, i wskaż, które ograniczenie w autopilocie by to przerwało.
- 4 Krok symulacji i regulator.** Autopilot w symulatorze liczy sterowanie co  $0,01$  s. Prawdziwy komputer pokładowy pracuje np. z  $50$  Hz, a serwo ma stałą czasową  $0,05$  s. Jak to zamodelować i czego się spodziewać?

- 5 **Weryfikacja a walidacja.** Inżynierowie symulacji odróżniają weryfikację („czy dobrze rozwiązujemy równania”) od walidacji („czy to dobre równania”). Które z testów w tej lekcji są którymi i czego brakuje do walidacji?

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ feynmanowskie

## 9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Jakie 13 stanów ma symulator 6 DOF?**

Prędkość w osiach ciała (3), prędkość kątowna (3), kwaternion orientacji (4), położenie w NED (3).

- 2 **Skąd w równaniu prędkości człon  $-\omega \times v_b$ ?**

Prędkość mierzymy w obracających się osiach ciała; to pochodna wektora w układzie obracającym się.

- 3 **Jak symulator trzyma samolot?**

Newtonem na  $\alpha$ ,  $\delta_e$ ,  $T$  z warunków  $\dot{u} = \dot{w} = \dot{q} = 0$ , z jacobianem z różnic skończonych.

- 4 **Dlaczego linearyzacja musi uwzględniać  $\dot{\alpha}$ ?**

Bo inaczej gubi  $M_{\dot{\alpha}}$ , czyli część tłumienia modu krótkookresowego ( $\zeta$  0,60 zamiast 0,76).

- 5 **Jak odróżnić, czy różnica dwóch modeli pochodzi z nieliniowości?**

Sprawdzić, jak rośnie z amplitudą: nieliniowość daje różnicę rosnącą jak kwadrat amplitudy, niespójność modeli liniowo.

- 6 **Do czego służy Monte Carlo i czego nie potrafi?**

Do rozrzutu wyników przy losowych parametrach w całym zakresie; nie znajdzie zdarzeń bardzo rzadkich ani spoza modelu.

## RÓWNANIA 6 DOF

$$\dot{\mathbf{v}}_b = (\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_T)/m + R^T \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = I^{-1}(\mathbf{M}_a - \boldsymbol{\omega} \times I \boldsymbol{\omega})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes (0, \boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\mathbf{p}} = R \mathbf{v}_b$$

$$\alpha = \text{atan2}(w, u), \beta = \arcsin(v/V), \bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$X = L \sin \alpha - D \cos \alpha + T, Z = -L \cos \alpha - D \sin \alpha$$

## NARZĘDZIA

trym: Newton na  $(\alpha, \delta_e, T)$ ,  $\dot{u} = \dot{w} = \dot{q} = 0$

RK4: stateczny dla  $\lambda \Delta t \gtrsim -2,79$ , błąd  $\propto \Delta t^4$

linearyzacja z  $\dot{\alpha}$ :  $\dot{\mathbf{x}} = (I - \mathbf{bc}^T)^{-1} \mathbf{Ax}$

Monte Carlo: błąd  $\sqrt{p(1-p)/N}$

zakręt:  $n = 1/\cos \varphi$ , opór indukowany  $\propto n^2$

## Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** B. L. Stevens, F. L. Lewis, E. N. Johnson, *Aircraft Control and Simulation* (Wiley, wyd. 3), rozdz. 2-3: model samolotu, trym, linearyzacja i symulacja; wzorcowy przykład w kodzie.
- **Dla chętnych:** P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics* (AIAA): części o symulacjach 5 i 6 DOF, w tym z obracającą się, kulistą Ziemią; tegoż autora *Building Aerospace Simulations in C++* o architekturze symulatorów.

*Samolot jest złożony: od kwaternionu po autopilota, w jednym programie, który umie powiedzieć, kiedy prostsze modele kłamią. Kolejna część zamienia skrzydła na silnik: rakietą nie ma siły nośnej, która by ją stabilizowała, ma za to ciąg, który można obracać. Ta sama bryła sztywna i te same pętle sterowania, ale z masą, która znika w trakcie lotu.*



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1. Sześć stopni swobody to 12 stanów (3 położenia, 3 kąty, 3 prędkości, 3 prędkości kątowe). Orientację opisujemy jednak kwaternionem, czyli czterema liczbami związanymi więzem  $|\mathbf{q}| = 1$ . Stąd 13 liczb przy 12 niezależnych stanach.
2.  $R^T[0; 0; mg]$  ma składową  $x$  równą  $-mg \sin \theta = -1100 \cdot 9,81 \cdot 0,0743 = -802$  N. Nos jest w górę, więc ciężar „ciągnie” samolot do tyłu wzdłuż osi  $x$ . Równoważy ją prawie w całości składowa siły nośnej: siła nośna jest prostopadła do prędkości, a nie do osi  $x$ , więc ma składową  $L \sin \alpha \approx mg \sin \alpha = 802$  N do przodu wzdłuż osi ciała (w locie poziomym  $\theta = \alpha$ ). Ciąg równoważy opór.
3. Składowa  $z$  wyrażenia  $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_b$  to  $-(pv - qu) = qu = 5,5$  m/s<sup>2</sup>. Żeby  $\dot{w} = 0$ , siły muszą dać  $-5,5$  m/s<sup>2</sup>, czyli dodatkową siłę nośną  $0,56 mg$  (w górę, czyli w  $-z$ ). Fizycznie: tor zakrzywia się z prędkością kątową  $q$ , a do tego potrzebna jest siła dośrodkowa  $mUq$ . Przeciążenie wynosi wtedy ok. 1,56 g.

## Zadania • część 2

1.  $C_{L,\max} = 4,94 \cdot 14 \cdot \pi / 180 = 1,21$ .  $V_s = \sqrt{2mg / (\rho S C_{L,\max})} = \sqrt{21\,582 / (1,225 \cdot 16,2 \cdot 1,21)} = 30$  m/s. W lekcji 4 przyjęliśmy  $C_{L,\max} = 1,5$  (z kłapami) i  $V_s = 27$  m/s; nasz model nie ma kłap.
2. Bo  $\dot{w}$  dopiero liczymy z sił, a siły zależą od  $\dot{\alpha}$ , czyli od  $\dot{w}$ : równanie jest uwikłane. Rozwiązania: (1) człon z  $\dot{\alpha}$  jest liniowy, więc można go przenieść na lewą stronę i rozwiązać układ liniowy dla  $\dot{\mathbf{v}}_b$  (tak robi się w linearyzacji w części 3); (2) iteracja: policzyć siły z  $\dot{\alpha} = 0$ , wyznaczyć  $\dot{w}$ , policzyć  $\dot{\alpha}$  i powtórzyć dwa, trzy razy. Trzeci, częsty w praktyce: modelować opóźnienie strumienia jawnie, np. jako dodatkowy stan z filtrem pierwszego rzędu.
3. Trym:  $C_{L,w} = 4,94 \cdot 0,0744 = 0,367$ , opór indukowany  $0,367^2 / 18,4 = 0,0073$ , razem  $C_D = 0,037$ . Przy  $19,4^\circ$ :  $C_{L,w} = 1,21 - 1,5 \cdot 0,094 = 1,07$ , indukowany  $0,062$ , przeciągnięcie  $0,094$ , razem  $C_D = 0,19$ , ok. pięć razy więcej. Samolot w przeciągnięciu szybko traci prędkość.

## Zadania • część 3

1. Lot poziomy bez przechylenia i ślizgu jest symetryczny: przy  $\beta = p = r = 0$  i  $\delta_a = \delta_r = 0$  wszystkie siły i momenty boczne są zerowe z definicji modelu, więc  $\dot{v} = \dot{p} = \dot{r} = 0$  automatycznie. Dla trymu w zakręcie albo z bocznym wiatrem trzeba by dołożyć  $\delta_a$ ,  $\delta_r$ ,  $\varphi$  i te równania.
2.  $\Delta t < 2,79 / 12,5 = 0,22$  s. Stateczność to za mało: błąd RK4 rośnie jak  $\Delta t^4$ , a przy  $\lambda \Delta t = -2$  wynik jest stateczny, ale niedokładny. Krok 0,01 s daje  $\lambda \Delta t = -0,125$ , z błędem na krok rzędu  $10^{-7}$ . Do tego regulatory pracują w tym samym kroku, a regulator cyfrowy z próbkowaniem 100 Hz zachowuje się prawie jak ciągły.
3. Bez:  $\omega_n = 6,32$  rad/s,  $\zeta = 0,60$ . Z:  $\omega_n = 6,28$ ,  $\zeta = 0,76$ . Częstość prawie się nie zmienia, tłumienie rośnie o jedną czwartą. Zgadza się to z lekcją 5:  $M_\alpha$  działa razem z  $M_q$  jak tłumienie, a sztywność  $M_\alpha$  pozostaje ta sama.

## Zadania • część 4

1.  $\frac{1}{2}(55^2 - 27,6^2) = 1131$  J/kg, co odpowiada  $1131 / 9,81 = 115,3$  m. Zgodność z 115,8 m oznacza, że praca ciągu i oporu w sumie prawie się znosi: ciąg 1123 N i opór, który przy mniejszej prędkości maleje, ale

przy większym kącie natarcia rośnie. Manewr to w praktyce czysta zamiana energii kinetycznej na potencjalną.

2. Przeciążenie  $n = 2$ , opór indukowany  $\propto C_L^2$  rośnie czterokrotnie:  $4 \cdot 220 = 880$  N, czyli o 660 N. Szacunek:  $1123 + 660 \approx 1780$  N. Ustalony zakręt w symulacji (po ok. 200 s) wymaga 1790 N: szacunek jest bardzo dobry, bo prawie całą dodatkową siłę nośną daje skrzydło. Wartość ok. 1620 N, którą widać w pierwszych 80 s, to jeszcze nieustalony stan: całka automatu ciągu dopiero narasta, a samolot powoli traci energię.
3.  $1/0,0067 = 149$  s i  $1/0,0191 = 52$  s. Sam mod spiralny:  $20^\circ e^{-60/149} = 13,4^\circ$  i  $20^\circ e^{-60/52} = 6,3^\circ$ . Model liniowy prawie dokładnie odtwarza drugi wynik. W symulatorze przechylenie spada najpierw szybciej (do  $16,7^\circ$  w 10 s), bo start z  $\beta = 0$  nie leży na wektorze własnym spirali: przez pierwsze sekundy działa holendrowanie i narasta ślizg. Dalej spada już w tempie spirali:  $16,7^\circ e^{-50/149} = 11,9^\circ$ , wobec  $11,7^\circ$  w symulacji.

## Zadania • część 5

1.  $z = (0,51 - 0,30)/0,04 = 5,25$ ;  $P(Z > 5,25) \approx 8 \cdot 10^{-8}$ . Przy 400 losowaniach spodziewana liczba takich przypadków to  $3 \cdot 10^{-5}$ : praktycznie zero. Monte Carlo nie wykryje zdarzeń tak rzadkich; tu wystarczy rachunek, bo granica jest znana (lekcja 4). Do tego w rzeczywistości położenie środka ciężkości nie ma rozkładu normalnego, tylko ograniczenia z instrukcji załadunku.
2. Błąd standardowy estymatora to  $\sqrt{p(1-p)/N}$ . Warunek  $\sqrt{p(1-p)/N} = 0,2p$  daje  $N = (1-p)/(0,04p) = 0,99/0,0004 \approx 2500$  losowań. Przy  $p = 0,1\%$  już ok. 25 000: koszt rośnie odwrotnie proporcjonalnie do  $p$ .

## Zadania do przemyslenia

1. 1. Pochodne z lekcji 7 dotyczą osi stateczności. W symulatorze trzeba więc: (a) przeliczyć prędkości kątowe ciała na osie stateczności (obrot o  $\alpha_0$  wokół osi  $y$ ), policzyć z nimi  $C_l$ ,  $C_n$  i obrócić momenty z powrotem; (b) przeliczyć tensor bezwładności:  $I_{xz,b} = (I_{xx} - I_{zz}) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = -102 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  (jeśli w osiach stateczności  $I_{xz} = 0$ ).
2. Wynik (sprawdzony): samo (a) przesuw spiralę do  $-0,0193/\text{s}$ , samo (b) poprawia głównie mod przechylenia i holendrowanie; oba razem dają  $-12,65$ ,  $-0,58 \pm 3,04i$ ,  $-0,0193$ , czyli lekcję 7. Wniosek: przyczyną jest niespójność osi, a nie nieliniowość ani sprzężenie z ruchem podłużnym.
2. 1. Histereza: oderwany przepływ przylega z powrotem przy mniejszym kącie niż ten, przy którym się oderwał. Przybliżenie: dodatkowy stan „stopień oderwania” z dynamiką pierwszego rzędu (modele typu Goman-Khrabrov).
2. Asymetria: jedno skrzydło przeciąga się pierwsze (ślizg, obrót), co daje gwałtowne przechylenie i wejście w korkociąg. Przybliżenie: liczyć siłę nośną osobno dla kilku pasków skrzydła z lokalnym kątem natarcia (z  $p$  i  $\beta$ ).
3. Spadek skuteczności sterów i trzęsienie (ang. *buffet*). Przybliżenie: współczynniki sterów zależne od  $\alpha$ , szum w siłach powyżej  $\alpha_s$ .
3. 1. Brak energii (zadanie 4.2) sprawia, że samolot opada. Pętla wysokości podnosi nos: kąt natarcia rośnie, opór indukowany rośnie, deficyt energii się powiększa, samolot zwalnia, potrzeba jeszcze większego  $C_L$ .
2. Przerwałoby to ograniczenie kąta natarcia (ochrona przed przeciągnięciem, jak w układach fly-by-wire z lekcji 8) albo ograniczenie przechylenia zależne od dostępnego ciągu, albo przejście pętli wysokości na pętlę prędkości (tryb zmiany poziomu lotu z lekcji 9): oddać wysokość, zachować prędkość.

4. 1. Regulator wywoływać co 2 kroki symulacji (próbkowanie 50 Hz, podtrzymanie zerowego rzędu), a serwo dodać jako stan z równaniem  $\dot{\delta} = (\delta_{\text{zad}} - \delta)/0,05$ , z ograniczeniem prędkości i wychylenia.  
2. Oba elementy dodają opóźnienie fazowe: próbkowanie ok.  $\Delta t/2 = 0,01$  s, serwo ok. 0,05 s. Przy pętli pochylenia o paśmie kilku rad/s to kilka do kilkunastu stopni zapasu fazy (lekcja 2.4 automatyki): tłumienie pętli wewnętrznych spadnie.
5. 1. Weryfikacja: zachowanie energii bez sił,  $f = 0$  w trymie, zbieżność przy zmniejszaniu kroku, zgodność z modelem liniowym tego samego samolotu (to sprawdza kod, nie fizykę).  
2. Walidacja wymaga porównania z rzeczywistością: z danymi z tunelu i z prób w locie (np. zarejestrowany mod krótkookresowy po impulsie sterem). Tego nasz kurs nie ma: model samolotu jest oszacowany, więc symulator jest zweryfikowany, ale nie zwalidowany.

---

Dynamika lotu · Lekcja 10: Symulacja 6 stopni swobody · Źródła: P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics* (AIAA); B. L. Stevens, F. L. Lewis, E. N. Johnson, *Aircraft Control and Simulation* (Wiley, wyd. 3, rozdz. 2–3); model samolotu z lekcji 4–7, autopilot z lekcji 9. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l10.py).