

Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i ką, kwaterniony

Pozycję samolotu opisują trzy liczby i nikt się nad tym nie zastanawia. Z orientacją jest gorzej: trzy kąty, którymi posługuje się pilot, w pewnym położeniu przestają działać, a obrotów nie da się dodawać jak wektorów. Ta lekcja zestawia cztery sposoby zapisu orientacji, pokazuje, gdzie każdy z nich się psuje, i kończy na tym, którego używa prawie każdy kontroler lotu, od drona po stację kosmiczną: kwaternionie. To czysta kinematyka. Siły i momenty, które orientację zmieniają, przyjdą w następnej lekcji.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2,5 h zadań

ZADANIA

15 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. Schaub, J. L.
Junkins,
*Analytical
Mechanics of
Aerospace Systems*,
rozdz. 3.1–3.4; F.
L. Markley, J. L.
Crassidis,
*Fundamentals of
Spacecraft Attitude
Determination and
Control*, rozdz.
2.7–2.9 i 3.1–3.2

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: czwarty przegub na Gwiazdkę
- 1 Układy odniesienia i macierz orientacji
- 2 Kąty Eulera i blokada przegubu
- 3 Twierdzenie Eulera: oś i kąt
- 4 Kwaterniony
- 5 Kinematyka: jak orientacja zmienia się w czasie
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: czwarty przegub na Gwiazdkę

Statek Apollo wiedział, jak jest zorientowany, dzięki platformie żyroskopowej zawieszanej w trzech pierścieniach kardanowych. Platforma trzymała stały kierunek w przestrzeni, a kąty między pierścieniami odczytywane z czujników to były wprost trzy kąty orientacji statku. Inżynierowie wiedzieli, że przy jednym ustawieniu dwa pierścienie układają się w jednej płaszczyźnie i platforma traci jeden stopień swobody. Zamiast dodawać czwarty pierścień, woleli prostszy i lżejszy układ z ostrzeżeniem: komputer sygnalizował zbliżanie się do tego położenia, a dalej zamrażał platformę i trzeba ją było ustawiać na nowo według gwiazd. Michael Collins, który w czasie pobytu modułu księżycowego Apollo 11 na Księżycu krążył samotnie po orbicie i sam pilnował orientacji statku, zażartował w rozmowie z Houston, czy ktoś nie przysłałby mu czwartego przegubu na Gwiazdkę.

Ta sama osobliwość siedzi w trzech kątach, którymi opisujemy orientację samolotu na co dzień. Nie jest wadą konkretnego urządzenia, tylko geometrii: żaden zapis orientacji trzema liczbami nie działa wszędzie. Dlatego kontrolery lotu liczą na czterech liczbach.

Pytanie na start. Obracasz książkę o 90° wokół osi północ-południe, a potem o 90° wokół pionu. Czy da się ją przeprowadzić z położenia wyjściowego do końcowego jednym obrotem? Jeśli tak, wokół jakiej osi i o jaki kąt? Odpowiedź w części 3 i w przykładzie 6.2.

Układy odniesienia i macierz orientacji

Potrzebujemy dwóch układów osi.

- **Układ nawigacyjny NED** (ang. *north, east, down*): oś x na północ, y na wschód, z w dół. Przy lotach blisko Ziemi i na krótkich odcinkach traktujemy go jak układ inercjalny. Oś z w dół wygląda dziwnie, ale ma zalety: wysokość to $-z$, a dodatni kąt pochylenia oznacza nos do góry.
- **Układ ciała**, sztywno związany z samolotem: x do przodu przez nos, y wzdłuż prawego skrzydła, z w dół przez podłogę kabiny. Prędkość kątową samolotu zapisujemy w tych osiach jako $\omega = (p, q, r)$: przechylenie, pochylenie, odchylenie. To mierzą żyroskopy przykręcone do kadłuba.

Orientacja to położenie układu ciała względem układu nawigacyjnego. Najpełniejszy jej opis to macierz, która przelicza składowe dowolnego wektora z osi ciała na osie NED. W lekcji 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza widzieliśmy, że macierz przekształcenia ma w kolumnach obrazy wektorów bazy. Tu oznacza to coś bardzo konkretnego:

MACIERZ ORIENTACJI (MACIERZ KOSINUSÓW KIERUNKOWYCH)

$$\mathbf{v}^n = R \mathbf{v}^b, \quad R = [\mathbf{x}_b^n \quad \mathbf{y}_b^n \quad \mathbf{z}_b^n], \quad R^T R = I, \quad \det R = 1.$$

Kolumny R to osie samolotu zapisane w osiach NED. Pierwsza kolumna mówi, gdzie wskazuje nos. Przeliczenie w drugą stronę to transpozycja: $\mathbf{v}^b = R^T \mathbf{v}^n$.

Każdy element R_{ij} to iloczyn skalarny dwóch wektorów jednostkowych, czyli kosinus kąta między osią i układu NED a osią j układu ciała. Stąd druga nazwa: **macierz kosinusów kierunkowych** (ang. *direction cosine matrix*, DCM).

Macierz ma 9 liczb, ale nie są niezależne. Warunek $R^T R = I$ to 6 równań (trzy kolumny mają długość 1, trzy pary kolumn są prostopadłe). Zostają 3 stopnie swobody, tyle co w intuicji: orientację wyznaczają trzy liczby. Macierz jest zapisem nadmiarowym, ale bez żadnych osłowności i z prostym składaniem: obrót R_1 , a po nim obrót R_2 (oba opisane w osiach stałych) to $R_2 R_1$.

PUŁAPKA: KTO OBRACA KOGO

W literaturze występują dwie macierze dla tej samej orientacji: nasza R (z ciała do NED) i jej transpozycja $C = R^T$ (z NED do ciała). Schaub i Junkins piszą o $[BN]$, Markley i Crassidis o macierzy orientacji A ; obie te macierze przeliczają z układu odniesienia do układu ciała, czyli są naszym R^T . Przed użyciem cudzego wzoru zawsze sprawdź na jednym przykładzie, np. samym odchyleniu o 90° : nos ma wskazywać wschód, czyli $R[1; 0; 0] = [0; 1; 0]$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Pierwsza kolumna macierzy orientacji samolotu to $[0,814; 0,470; -0,342]$. W którą stronę świata leci samolot i czy nos jest uniesiony?
- 2 Ile niezależnych równań daje warunek $R^T R = I$ dla macierzy 3×3 ? Dlaczego nie 9?
- 3 W osiach NED przyspieszenie grawitacyjne to $[0; 0; g]$. Jakie składowe ma w osiach ciała? Policz dla pochylenia 20° i przechylenia 10° (macierz z przykładu 6.1, trzeci wiersz $[-0,342; 0,163; 0,925]$).

podstawowe średnie feynmanowskie

Kąty Eulera i blokada przegubu

Pilot nie myśli macierzą. Myśli trzema kątami: kurs, pochylenie, przechylenie. W lotnictwie to **kąty Eulera w kolejności 3-2-1** (oś z , potem y , potem x). Zaczynamy od samolotu ustawionego osiami zgodnie z NED i obracamy go kolejno:

1. o kąt odchylenia ψ wokół pionu (kurs);
2. o kąt pochylenia θ wokół nowej osi skrzydeł;
3. o kąt przechylenia φ wokół nowej osi nosa.

✎ KĄTY EULERA 3-2-1 (ODCHYLENIE, POCHYLENIE, PRZECHYLENIE)

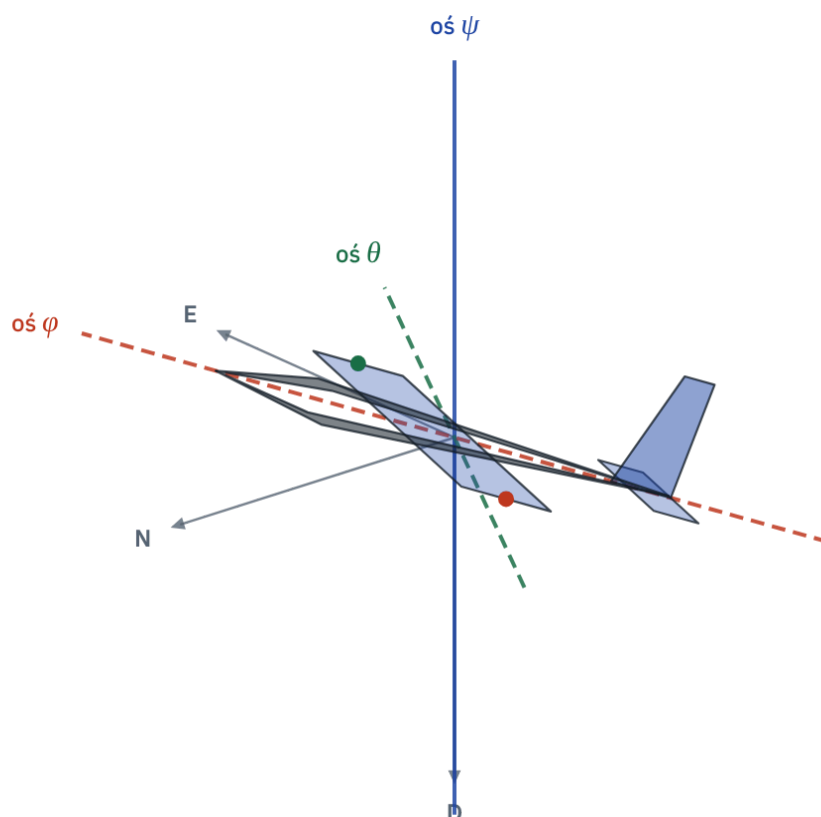
$$R = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi \\ -s_\theta & s_\varphi c_\theta & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}$$

($c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$ itd.) Kąty z macierzy: $\theta = -\arcsin R_{31}$, $\varphi = \text{atan2}(R_{32}, R_{33})$, $\psi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11})$. Zakresy: $\psi, \varphi \in (-180^\circ, 180^\circ]$, $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

Dlaczego macierze w tej kolejności? Obroty „wokół nowych osi” można zastąpić obrotami wokół osi stałych wykonanymi w odwrotnej kolejności: najpierw φ wokół x , potem θ wokół y , na końcu ψ wokół z , wszystkie wokół osi NED. Obrót wykonany jako pierwszy stoi w iloczynie po prawej, stąd $R_z R_y R_x$. Tę zamianę warto sprawdzić samemu na dwóch obrotach o 90° (zadanie 2.1).

Gdzie się psuje? Przy $\theta = \pm 90^\circ$ nos wskazuje pion, czyli oś pierwszego obrotu (ψ) i oś ostatniego (φ) się pokrywają. Zmiana ψ i zmiana φ dają wtedy ten sam obrót wokół pionu, a macierz zależy tylko od różnicy $\psi - \varphi$ (zadanie 2.2). Mamy trzy liczby, ale tylko dwa niezależne kierunki obrotu. To jest **blokada przegubu** (ang. *gimbal lock*). W platformie Apollo trzy kąty były fizycznymi kątami pierścieni, więc blokada oznaczała prawdziwą utratę stopnia swobody mechanizmu. W komputerze nic się nie blokuje, ale wzory na pochodne kątów dzielą przez $\cos \theta$ (część 5).

SYMULACJA 1 Samolot ustawiony kątami Eulera, z trzema osiami, wokół których te kąty obracają. Pełna oś to pion (oś ψ), przerywane to oś skrzydeł po odchyleniu (oś θ) i oś nosa (oś φ). Ustaw $\theta = 90^\circ$ i porównaj działanie suwaków ψ i φ .



— oś obrotu ψ (pion) — oś obrotu θ (skrzydła po odchyleniu) — oś obrotu φ (nos)

macierz R (ciało $\rightarrow$ NED) $\begin{bmatrix} 0,814 & -0,441 & 0,379 \\ 0,470 & 0,883 & 0,018 \\ -0,342 & 0,163 & 0,925 \end{bmatrix}$

kąt między osiami ψ i φ 70°

mnożnik $1/\cos \theta$ w kinematyce $1,06$

Trzy obroty w ustalonej kolejności: najpierw ψ wokół pionu, potem θ wokół nowej osi skrzydeł, na końcu φ wokół nosa. Pozycje świateł: lewe skrzydło czerwone, prawe zielone.

Stan na rysunku: $\psi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\varphi = 10^\circ$; $R = \begin{bmatrix} 0,814 & -0,441 & 0,379 \\ 0,470 & 0,883 & 0,018 \\ -0,342 & 0,163 & 0,925 \end{bmatrix}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 35 min

- 1 Sprawdź na książce albo telefonie: obrót o 90° wokół osi z , a potem o 90° wokół *nowej* osi y daje to samo położenie co obrót o 90° wokół *stałej* osi y , a potem o 90° wokół stałej osi z .

2 Wstaw $\theta = 90^\circ$ do macierzy z ramki i pokaż, że zależy ona tylko od $\psi - \varphi$.

3 Odczytaj kąty Eulera z macierzy $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4 Samolot jest w ustalonym zakręcie: przechylenie $\varphi = 30^\circ$, pochylenie 0, kurs zmienia się o $\dot{\psi} = 0,1$ rad/s. Jakie prędkości kątowe p, q, r mierzą żyroskopy na kadłubie? (Wzory na p, q, r w części 5.)

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Twierdzenie Eulera: oś i kąt

Euler udowodnił w 1775 roku coś, co wcale nie jest oczywiste: **każdą zmianę orientacji bryły można wykonać jednym obrotem wokół pewnej osi**. Niezależnie od tego, ile obrotów i w jakiej kolejności wykonaliśmy po drodze. Dowód jest krótki, jeśli znamy wartości własne (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne).

- R zachowuje długości, więc każda wartość własna ma moduł 1: $|\lambda| = 1$.
- Wielomian charakterystyczny jest stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych, więc ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, a zespolone występują w parach sprzężonych.
- Iloczyn wartości własnych to $\det R = 1$. Możliwości: $\{1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$ albo $\{1, -1, -1\}$ (to drugie to szczególny przypadek $\alpha = 180^\circ$). W obu jest $\lambda = 1$.
- Wektor własny $\mathbf{n}$ dla $\lambda = 1$ spełnia $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$: ten kierunek nie zmienia się przy obrocie. To **oś obrotu**. W płaszczyźnie prostopadłej do niej R działa jak obrót płaski o kąt α .

🔧 OŚ I KĄT (WZÓR RODRIGUESA)

$$R = I + \sin \alpha [\mathbf{n}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{n}]_{\times}^2, \quad [\mathbf{n}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W drugą stronę: $\text{tr } R = 1 + 2 \cos \alpha$, a dla $0 < \alpha < 180^\circ$: $\mathbf{n} = \frac{1}{2 \sin \alpha} [R_{32} - R_{23}; R_{13} - R_{31}; R_{21} - R_{12}]$.

Macierz $[\mathbf{n}]_{\times}$ zapisuje iloczyn wektorowy: $[\mathbf{n}]_{\times} \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$. Wzór Rodriguesa rozkłada wektor na część wzdłuż osi (nie zmienia się) i część prostopadłą (obraca się o α w płaszczyźnie). Ślad wynika wprost z wartości własnych: $1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 1 + 2 \cos \alpha$.

Oś i kąt to cztery liczby z jednym więzem ($|\mathbf{n}| = 1$) albo trzy, jeśli zapiszemy je jako jeden wektor $\alpha \mathbf{n}$ (wektor obrotu). Ten zapis jest najbardziej naturalny dla człowieka, ale ma kłopoty: przy $\alpha = 0$ oś jest nieokreślona, a przy $\alpha = 180^\circ$ wektory $\alpha \mathbf{n}$ i $-\alpha \mathbf{n}$ dają tę samą orientację. Składanie dwóch obrotów w tym zapisie jest uciążliwe. Wszystkie te kłopoty usuwa jedna sztuczka: zamiast kąta używać *połowy* kąta.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Ślad macierzy orientacji wynosi 2,62. O jaki kąt trzeba obrócić samolot jednym obrotem, żeby przejść do tej orientacji z położenia zerowego?
- 2 Znajdź oś i kąt dla $R = R_x(90^\circ) R_z(90^\circ)$ (najpierw 90° wokół stałej osi z , potem wokół stałej osi x).
- 3 Dlaczego wzór na $\mathbf{n}$ z ramki zawodzi przy $\alpha = 180^\circ$? Jak wtedy znaleźć oś?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Kwaterniony

Hamilton przez lata szukał liczb, które robią w przestrzeni to, co liczby zespolone robią na płaszczyźnie (lekcja 1.7 Liczby zespolone i fazory: obrót o θ to mnożenie przez $e^{i\theta}$). Znalazł je w 1843 roku, w czterech wymiarach: $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$, gdzie $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. Dla nas wygodniejszy jest zapis „skalar plus wektor”: $q = (q_0, \mathbf{q})$.

🏰 KWATERNION JEDNOSTKOWY JAKO OBRÓT

$$q = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 = 1.$$

Iloczyn: $p \otimes q = (p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})$. **Sprzężenie:** $q^* = (q_0, -\mathbf{q})$.

Obrót wektora: $(0, \mathbf{v}^n) = q \otimes (0, \mathbf{v}^b) \otimes q^*$. **Składanie** (osie stałe, najpierw q_1 , potem q_2):
 $q = q_2 \otimes q_1$, dokładnie jak $R = R_2 R_1$.

Macierz: $R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}.$

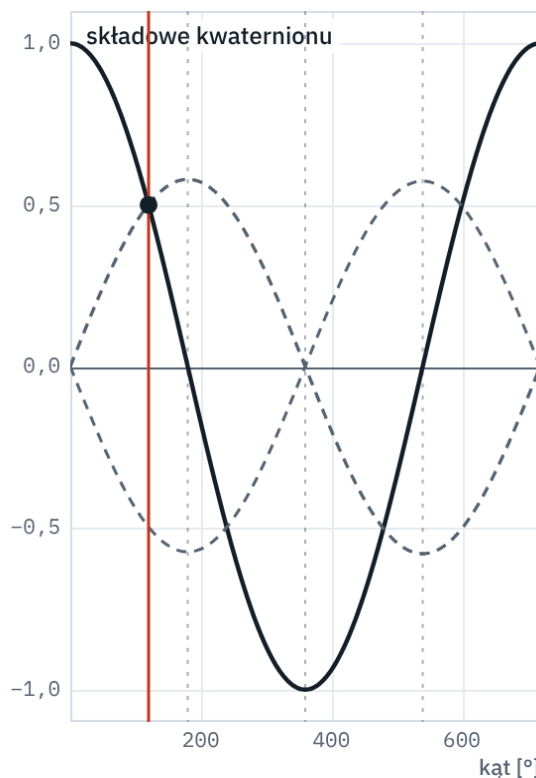
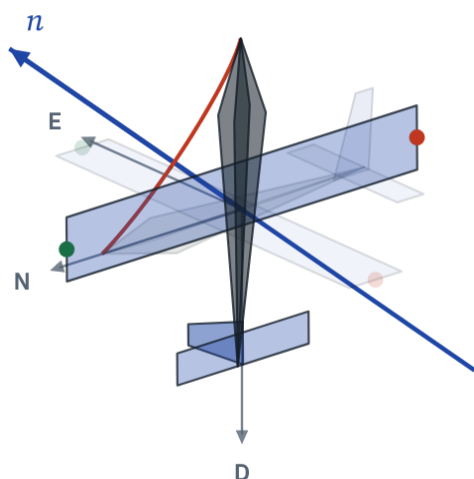
Co zyskujemy?

- **Brak osobliwości.** Każda orientacja ma kwaternion i każdy kwaternion jednostkowy jest orientacją. Przy $\alpha = 0$ kwaternion to po prostu $(1, \mathbf{0})$, bez nieokreślonej osi.
- **Tanie składanie.** Iloczyn kwaternionów to 16 mnożeń, iloczyn macierzy 27.
- **Jeden więc zamiast sześciu.** Błędy numeryczne usuwa się, dzieląc przez normę.
- **Prosta kinematyka,** liniowa w q (część 5).

Ceną jest **podwójne pokrycie**: q i $-q$ dają tę samą macierz, bo R jest kwadratowa w składowych q . Obrót o 360° zmienia kwaternion z $(1, \mathbf{0})$ na $(-1, \mathbf{0})$, a do wartości wyjściowej wraca on dopiero po 720° . To nie jest artefakt rachunku. Obrót o 360° i obrót o 720° są naprawdę różne jako drogi w przestrzeni orientacji: trzymając talerz na płasko na dłoni, możesz obrócić go dwa razy wokół pionu i wrócić z ręką w położeniu wyjściowym, a po jednym obrocie ramię zostaje skręcone (tzw. sztuczka z talerzem). W praktyce sterowania wynika z tego jedna reguła: przed porównaniem dwóch kwaternionów wybierz znak tak, żeby $q_0 \geq 0$, bo inaczej regulator „obróci samolot naokoło” o prawie 360° (więcej w kursie astronautyki, przy sterowaniu orientacją satelity).

SYMULACJA 2

Wybierz oś obrotu i kąt. Rysunek 3D: samolot obrócony wokół tej osi (błady: położenie wyjściowe, czerwona linia: droga nosa). Wykres: składowe kwaternionu w funkcji kąta. Porównaj kąty 120° i 480° : ta sama orientacja, przeciwne znaki kwaternionu.



— oś obrotu n — droga nosa — q_0 - - q_1, q_2, q_3

$q = (q_0; q_1; q_2; q_3)$ (0,500; 0,502; 0,502; -0,497)

$|q|$ 1,0000

ślad $R = 1 + 2 \cos \alpha$ 0,000

$R n - n$ (oś stoi w miejscu) 0,0000

Kwaternion to $(\cos \alpha/2; n \sin \alpha/2)$: oś obrotu razy sinus połowy kąta α . Półkąt jest powodem, dla którego obrót o 360° zmienia znak kwaternionu.

Stan na rysunku: oś $n = (0,579; 0,579; -0,574)$ w NED, kąt 120° , $q = (0,500; 0,502; 0,502; -0,497)$.

⚠️ PUŁAPKA: DWIE KONWENCJE KWATERNIONÓW

Ta lekcja (jak większość literatury lotniczej i robotycznej) stawia składową skalarną na początku i używa iloczynu Hamiltona. Markley i Crassidis, a także wiele tekstów z NASA i JPL, stawiają skalar na końcu (q_4) i definiują iloczyn z przeciwnym znakiem przy $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, tak żeby kwaterniony składały się w tej samej kolejności co ich macierze $A = R^T$. Oba zapisy są poprawne, ale wzory z różnych źródeł nie dają się mieszać. Przy przepisywaniu kodu z książki sprawdź na obrocie o 90° wokół jednej osi.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Zapisz kwaternion obrotu o 90° wokół osi z . Podnieś go do kwadratu (pomnóż przez siebie). Jaki obrót otrzymałeś?
- 2 Obróć wektor $\mathbf{v} = [1; 0; 0]$ kwaternionem $q = (0,707; 0; 0; 0,707)$ ze wzoru $q \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes q^*$.
- 3 Pokaż, że q i $-q$ dają tę samą macierz R . Czy to samo jest prawdą dla wzoru $q \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes q^*$?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

5 Kinematyka: jak orientacja zmienia się w czasie

Żyroskopy mierzą $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ w osiach ciała. Żeby wiedzieć, jak samolot jest zorientowany, trzeba z nich policzyć zmianę orientacji i scałkować. Jak zależy od $\boldsymbol{\omega}$ pochodna każdego z zapisów?

KINEMATYKA ORIENTACJI ($\boldsymbol{\Omega}$ W OSIACH CIAŁA)

Macierz: $\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega}]_\times$.

Kwaternion: $\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes (0, \boldsymbol{\omega})$.

Kąty Eulera 3-2-1:

$$\dot{\varphi} = p + (q \sin \varphi + r \cos \varphi) \tan \theta, \quad \dot{\theta} = q \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{q \sin \varphi + r \cos \varphi}{\cos \theta}.$$

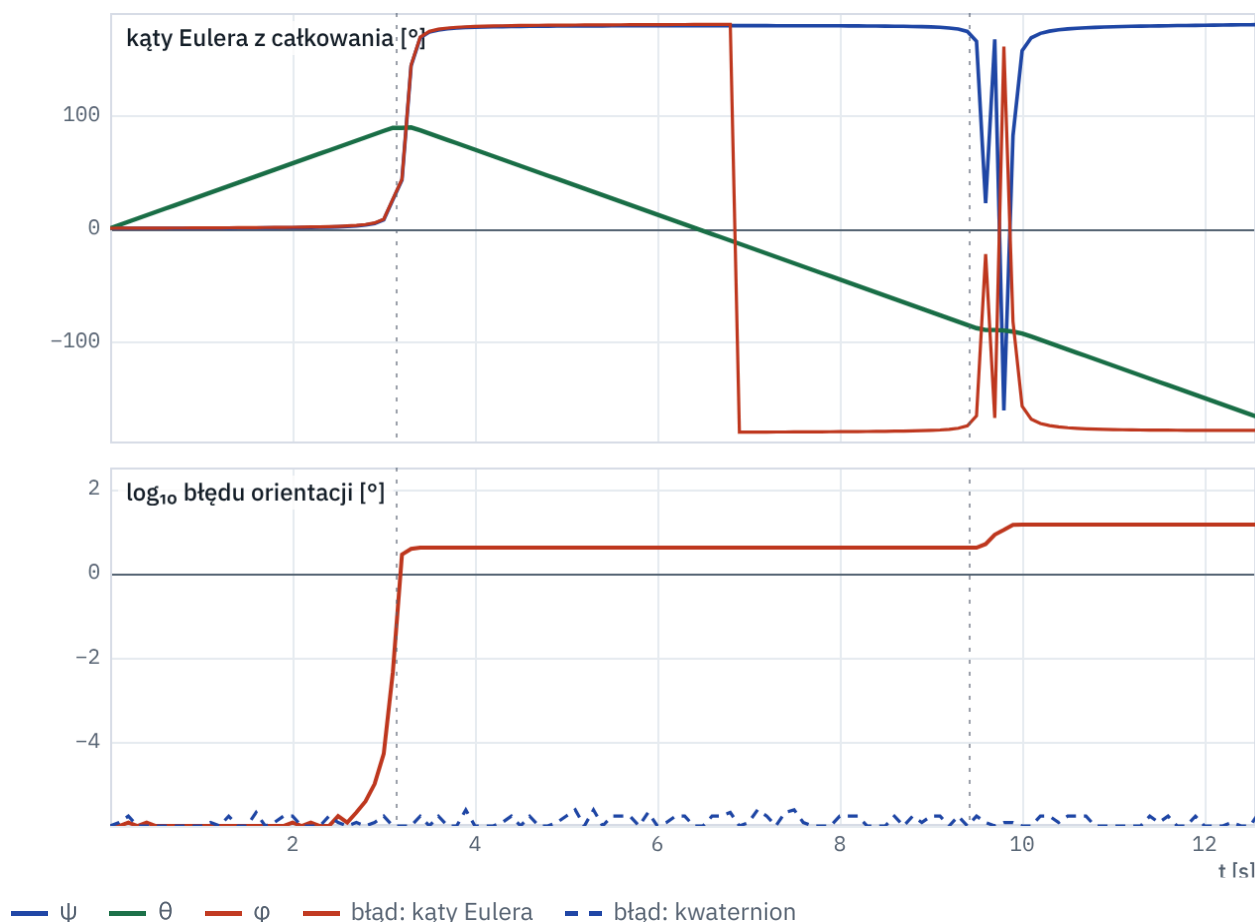
Odwrotnie: $p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta$, $q = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi$, $r = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi$.

Skąd wzór na $\dot{R}$? Wektor $\mathbf{v}$ przyklejony do samolotu ma stałe składowe w osiach ciała, a w osiach NED zmienia się jak punkt bryły obracającej się z prędkością $\boldsymbol{\omega}$: $\dot{\mathbf{v}}^n = \boldsymbol{\omega}^n \times \mathbf{v}^n$ (lekcja Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna). Wstawiając $\mathbf{v}^n = R\mathbf{v}^b$ i $\boldsymbol{\omega}^n = R\boldsymbol{\omega}^b$, dostajemy $\dot{R}\mathbf{v}^b = R(\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{v}^b)$ dla każdego $\mathbf{v}^b$.

Porównajmy trzy wzory.

- **Kąty Eulera:** nieliniowe, z $\cos \theta$ w mianowniku. Przy $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$ pochodne $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$ rosną bez ograniczeń, nawet gdy samolot obraca się powoli. Np. przy $\theta = 85^\circ$ i powolnym odchyłaniu $r = 0,1$ rad/s kurs zmienia się o $66^\circ/\text{s}$, a przy 89° o $328^\circ/\text{s}$.
- **Macierz:** liniowa w R , bez osobliwości, ale 9 równań, a błędy całkowania psują ortogonalność. Prosty schemat Eulera z krokiem 0,01 s przy $\boldsymbol{\omega} = (0,3; 0,5; 0,2)$ rad/s po minucie daje $\det R = 1,26$: „samolot” rozciągnął się o 12% w każdym kierunku prostopadłym do $\boldsymbol{\omega}$ (wzdłuż $\boldsymbol{\omega}$ nie zmienił się).
- **Kwaternion:** liniowy w q , cztery równania, jeden więc łatwy do przywrócenia normalizacją. Bez normalizacji ten sam schemat odchodzi od $|q| = 1$ o 3%, z normalizacją błąd znika.

SYMULACJA 3 Samolot robi pętlę ($q = 0,5 \text{ rad/s}$) i przy okazji lekko się przechyla (p). Prędkość kątowna w osiach ciała jest stała, więc prawdziwą orientację znamy dokładnie. Ten sam integrator (RK4, stały krok) całkuje kąty Eulera i kwaternion. Zmniejsz p do ok. $0,005 \text{ rad/s}$: nos przechodzi bliżej pionu, a błąd kątów Eulera rośnie o rzędy wielkości.



największe $|\psi|$ z kinematyki Eulera $47,2 \text{ rad/s}$

największy błąd: kąty Eulera $13,964^\circ$

największy błąd: kwaternion $0,00000^\circ$

Przy przejściach przez pion ($t \approx 3,1 \text{ s}$ i $9,4 \text{ s}$) ψ i φ skaczą prawie o 180° . Wzory na ψ i φ mają $\cos \theta$ w mianowniku, więc stały krok RK4 nie nadąża i błąd zostaje na zawsze. Kwaternion nie widzi tego miejsca.

Stan na rysunku: stała prędkość kątowna w osiach ciała $\omega = (0,0050; 0,5; 0) \text{ rad/s}$, czas $12,57 \text{ s}$ (jedna pełna pętla; nos w pionie przy $t \approx 3,1 \text{ s}$ i $9,4 \text{ s}$), RK4 z krokiem $0,10 \text{ s}$ dla kątów Eulera i dla kwaternionu (z normalizacją).

Zjawisko w symulacji ma prosty opis: przy $p = 0,005 \text{ rad/s}$ nos mija pion o $0,6^\circ$, kąty ψ i φ w ułamku sekundy przeskakują o 180° , a ich pochodne sięgają dziesiątek radianów na sekundę. RK4 z krokiem $0,1 \text{ s}$ robi na tym odcinku błąd kilkunastu stopni, który zostaje do końca pętli. Kwaternion przy tym samym kroku ma błąd poniżej 10^{-5} stopnia. Dlatego kontroler lotu całkuje kwaternion (albo macierz), a kąty Eulera liczy z niego tylko do wyświetlenia na ekranie.

Twierdzenie Stuelpnagla (1964) mówi, że tak musi być: żaden zapis orientacji trzema liczbami nie jest jednocześnie globalny (jednoznaczny dla wszystkich orientacji) i wszędzie nieosobliwy. Cztery liczby z jednym więzem to najmniejszy zapis bez osobliwości.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1  Samolot startuje z $q = (1, \mathbf{0})$ i obraca się ze stałą prędkością $\omega = (0, 0, r)$. Sprawdź, że $q(t) = (\cos \frac{rt}{2}, 0, 0, \sin \frac{rt}{2})$ spełnia równanie $\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes (0, \omega)$.
- 2  Samolot leci z pochyleniem $\theta = 85^\circ$ (prawie pionowo), $\varphi = 0$, i powoli odchyła się z $r = 0,1$ rad/s. Policz $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$. Co zobaczy pilot na sztucznym horyzoncie?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: PRACA Z ORIENTACJĄ

1. Ustal konwencje: osie (NED czy ENU), kierunek macierzy (ciało $\rightarrow$ NED czy odwrotnie), kolejność kątów, położenie składowa w kwaternionie. Sprawdź na obrocie o 90° .
2. Licz i całkuj na kwaternionie albo macierzy; normalizuj co krok.
3. Składaj obroty mnożeniem ($R_2 R_1$, $q_2 \otimes q_1$); nigdy nie dodawaj kątów.
4. Kąty Eulera licz tylko na wyjściu, dla człowieka. Pamiętaj o osobliwości przy $\theta = \pm 90^\circ$.
5. Sprawdzenie: $R^T R = I$, $\det R = 1$, $|q| = 1$, $\text{tr } R = 1 + 2 \cos \alpha = 4q_0^2 - 1$.

Przykład 6.1

Od kątów Eulera do osi, kąta i kwaternionu

Samolot: kurs $\psi = 30^\circ$, pochylenie $\theta = 20^\circ$, przechylenie $\varphi = 10^\circ$. Policz macierz orientacji, oś i kąt obrotu oraz kwaternion.

1. Z ramki w części 2: $R = \begin{bmatrix} 0,814 & -0,441 & 0,379 \\ 0,470 & 0,883 & 0,018 \\ -0,342 & 0,163 & 0,925 \end{bmatrix}$.
2. Ślad: 2,622, więc $\cos \alpha = 0,811$, $\alpha = 35,8^\circ$.
3. Oś: $\mathbf{n} = \frac{1}{2 \sin \alpha} [0,163 - 0,018; 0,379 + 0,342; 0,470 + 0,441] = [0,124; 0,616; 0,778]$.
4. Kwaternion: $q_0 = \cos 17,9^\circ = 0,9515$, $\mathbf{q} = \sin 17,9^\circ \mathbf{n} = [0,038; 0,189; 0,239]$.

Wynik: $q = (0,9515; 0,038; 0,189; 0,239)$; jeden obrót o $35,8^\circ$ wokół osi skierowanej głównie w dół i na wschód.

Sprawdzenie: $4q_0^2 - 1 = 2,622 = \text{tr } R \checkmark$. Ten sam kwaternion daje iloczyn $q_z(30^\circ) \otimes q_y(20^\circ) \otimes q_x(10^\circ) \checkmark$. Uwaga: kąt $35,8^\circ$ to nie suma $30 + 20 + 10$ ani długość wektora $(30, 20, 10)$, równa $37,4$.

Przykład 6.2

Dwa obroty o 90° , jeden obrót o 120°

Pytanie z prologu: obrót o 90° wokół stałej osi x , a potem o 90° wokół stałej osi z . Jaki jeden obrót daje ten sam efekt?

- 1 $q_x = (0,707; 0,707; 0; 0)$, $q_z = (0,707; 0; 0; 0,707)$.
- 2 $q = q_z \otimes q_x$: skalar $0,5 - 0 = 0,5$; wektor $0,707 \cdot (0,707; 0; 0) + 0,707 \cdot (0; 0; 0,707) + (0; 0; 0,707) \times (0,707; 0; 0) = (0,5; 0,5; 0,5)$.
- 3 $q_0 = 0,5 = \cos(\alpha/2)$, więc $\alpha = 120^\circ$; oś $\propto (0,5; 0,5; 0,5)$, czyli $\mathbf{n} = [1; 1; 1]/\sqrt{3}$.

Wynik: jeden obrót o 120° wokół przekątnej sześcianu. Trzy osie układu zamieniają się cyklicznie miejscami: $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Sprawdzenie: $R_z(90^\circ)R_x(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe:

obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza), ślad $0 = 1 + 2 \cos 120^\circ \checkmark$.

Ile kosztuje osobliwość

W symulacji 3 samolot robi pętlę z $q = 0,5 \text{ rad/s}$ i przechyla się z $p = 0,005 \text{ rad/s}$. Jak blisko pionu przechodzi nos i co dzieje się z kątami Eulera?

- 1 Prędkość kątowa $\omega = (0,005; 0,5; 0)$ jest stała, więc samolot obraca się wokół jednej osi, odchylonej od osi skrzydeł o $\arctan(0,005/0,5) = 0,57^\circ$. Nos zatacza stożek i po $\pi/(2 \cdot 0,5) = 3,1 \text{ s}$ mija pion właśnie o $0,57^\circ$.
- 2 W tym miejscu $\cos \theta$ spada do 0,01, a ψ i φ muszą w kilka setnych sekundy przeskoczyć o prawie 180° (nos przechodzi „przez biegun”). Pochodne sięgają dziesiątek rad/s; w symulacji największe $|\dot{\psi}|$ to 40–70 rad/s, zależnie od tego, gdzie wypadają kroki.
- 3 RK4 z krokiem 0,1 s nie rozdziela tego przeskoku: błąd orientacji po pętli $\approx 15^\circ$ (wynik jest bardzo czuły na dokładną wartość p); z krokiem 0,02 s $\approx 0,004^\circ$. Kwaternion: poniżej 10^{-5} stopnia przy obu krokach.

Wynik: kąty Eulera wymagają tym mniejszego kroku, im dokładniej samolot przechodzi przez pion. Kwaternion nie ma takiego miejsca.

Sprawdzenie: przy $p = 0$ (pętla idealnie w płaszczyźnie) φ i ψ są stale zerowe i kąty Eulera całkują się bezbłędnie; kłopot robi dopiero mała składowa „w bok” ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Kąty Eulera to wektor obrotu.”

Nie da się ich dodawać ani składać po współrzędnych, a ich pochodne nie są prędkością kątową: $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \neq (p, q, r)$. W zakręcie z przechyleniem żyroskop pochylenia pokazuje $q \neq 0$, choć θ się nie zmienia.

× „Blokada przegubu to problem starych platform mechanicznych.”

To własność każdego zapisu trzema liczbami. W oprogramowaniu objawia się dzieleniem przez $\cos \theta$ i skokami kątów, nie zatrzymaniem mechanizmu.

× „Kwaternion to cztery kąty.”

To oś pomnożona przez sinus połowy kąta plus kosinus połowy kąta. Ma jeden więc, więc niesie trzy stopnie swobody, tyle co orientacja.

× „Obrót o 360° to to samo co brak obrotu.”

Dla orientacji tak, dla kwaternionu nie: q zmienia znak. Regulator, który porównuje kwaterniony bez sprawdzenia znaku, może wykonać zbędny pełny obrót.

× „Kolejność obrotów nie ma znaczenia, jeśli kąty są małe.”

Dla małych kątów różnica jest małego rzędu drugiego (iloczyn kątów). Dlatego małe obroty można dodawać, i na tym opiera się linearyzacja w lekcjach o samolocie. Dla kątów rzędu dziesiątek stopni różnica jest duża.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Kwaternion z macierzy.** Z ramki: $q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \text{tr } R}$, $\mathbf{q} = \frac{1}{4q_0}[R_{32} - R_{23}; R_{13} - R_{31}; R_{21} - R_{12}]$. Kiedy ten wzór jest numerycznie zły i jak sobie wtedy poradzić?
■■■
- 2 **Małe obroty.** Pokaż, że dla małych kątów $R \approx I + [\boldsymbol{\delta}]_\times$, gdzie $\boldsymbol{\delta} = (\delta\varphi, \delta\theta, \delta\psi)$, a $q \approx (1, \boldsymbol{\delta}/2)$. Dlaczego to ważne dla filtra Kalmana orientacji?
■■■
- 3 **Inna kolejność kątów.** Dla satelitów i błąków używa się często kątów 3-1-3 (precesja, nutacja, obrót własny). Gdzie mają osłabiwość? Dlaczego dla samolotu lepsze są 3-2-1?
■■■
- 4 **Najkrótsza droga.** Regulator orientacji dostaje błąd $q_e = q_{\text{zad}}^* \otimes q$. Prawdziwy błąd to obrót o 350° wokół pewnej osi. Co się stanie, jeśli regulator będzie dążył do $q_e = (1, \mathbf{0})$, a co, jeśli zaakceptuje też $(-1, \mathbf{0})$?
■■■
- 5 **Sprawdzian telefonem.** Telefon z aplikacją pokazującą kąty orientacji (wiele aplikacji z czujnikami ma taki tryb) połóż płasko, a potem podnieś do pionu ekranem do siebie. Co dzieje się z kątem „kursu” i „przechylenia” tuż przy pionie i dlaczego?
■■■

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ feynmanowskie

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co jest w kolumnach macierzy orientacji R (ciało $\rightarrow$ NED)?

Osie samolotu zapisane w osiach NED; pierwsza kolumna to kierunek nosa.

2 Ile stopni swobody ma orientacja i ile liczb ma każdy zapis?

3 stopnie swobody. Macierz: 9 liczb, 6 więzów. Kąty Eulera: 3 (osobliwość). Kwanternion: 4, jeden więz.

3 Gdzie kąty Eulera 3-2-1 mają osobliwość i dlaczego?

Przy $\theta = \pm 90^\circ$: osie obrotów ψ i φ się pokrywają, macierz zależy tylko od $\psi \mp \varphi$, a w kinematyce dzielimy przez $\cos \theta$.

4 Jak z macierzy obrotu odczytać kąt obrotu?

$\text{tr } R = 1 + 2 \cos \alpha$; oś to wektor własny dla $\lambda = 1$.

5 Jak wygląda kwaternion obrotu o α wokół $\mathbf{n}$?

$(\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2})$. Kwaterniony q i $-q$ to ta sama orientacja.

6 Jaka jest kinematyka kwaternionu?

$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes (0, \boldsymbol{\omega})$, z $\boldsymbol{\omega}$ w osiach ciała; liniowa w q , bez osobliwości. Po każdym kroku normalizacja.

MACIERZ I KĄTY EULERA

$$\mathbf{v}^n = R\mathbf{v}^b, R^T R = I, \det R = 1$$

$$R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)$$

$$\theta = -\arcsin R_{31}, \varphi = \operatorname{atan2}(R_{32}, R_{33}), \psi = \operatorname{atan2}(R_{21}, R_{11})$$

$$\dot{\psi} = \frac{qs_\varphi + rc_\varphi}{c_\theta}, \dot{\theta} = qc_\varphi - rs_\varphi, \dot{\varphi} = p + (qs_\varphi + rc_\varphi) \tan \theta$$

$$\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega}]_\times$$

OŚ, KĄT, KWATERNION

$$R = I + \sin \alpha [\mathbf{n}]_\times + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{n}]_\times^2$$

$$\operatorname{tr} R = 1 + 2 \cos \alpha = 4q_0^2 - 1$$

$$q = (\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\alpha}{2}), q \equiv -q$$

$$p \otimes q = (p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q})$$

$$(0, \mathbf{v}^n) = q \otimes (0, \mathbf{v}^b) \otimes q^*; \text{składanie } q_2 \otimes q_1$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes (0, \boldsymbol{\omega})$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. Schaub, J. L. Junkins, *Analytical Mechanics of Aerospace Systems*, rozdz. 3.1–3.4 (macierz kosinusów kierunkowych, kąty Eulera, wektor obrotu, parametry Eulera, czyli kwaterniony).
- **Dla chętnych:** F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, rozdz. 2.7–2.9 (kwaterniony i wszystkie zapisy orientacji, także parametry Rodriguesa) oraz 3.1–3.2 (ich kinematyka, z blokadą przegubu w ogólnej postaci). Uwaga na ich konwencję kwaternionu.

Wiemy już, jak opisać orientację i jak ją całkować, gdy znamy prędkość kątową. Ale skąd się bierze prędkość kąтова? Z momentów sił i z tego, jak masa jest rozłożona w bryle. W następnej lekcji zobaczymy, że w trzech wymiarach moment pędu i prędkość kąтова nie muszą być równoległe, a obrót wokół jednej z trzech osi bryły jest niestabilny. Klucz francuski rzucony w stanie nieważkości to pokazuje.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Nos wskazuje na północny wschód (azymut $\text{atan2}(0,470; 0,814) = 30^\circ$) i do góry, bo składowa „w dół” jest ujemna: $\arcsin 0,342 = 20^\circ$ nad poziomem.
2. 6. Macierz $R^T R$ jest symetryczna, więc równania pod przekątną powtarzają te nad nią: 3 na przekątnej (długości kolumn) i 3 nad nią (prostokątność par). Zostaje $9 - 6 = 3$ stopnie swobody.
3. $\mathbf{g}^b = R^T[0; 0; g]$ to g razy trzecia kolumna R^T , czyli trzeci wiersz R : $g[-0,342; 0,163; 0,925]$. Ogólnie $g[-\sin \theta; \sin \varphi \cos \theta; \cos \varphi \cos \theta]$. Ten wzór zobaczymy jeszcze raz w lekcji 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach: z niego akcelerometr „wie”, gdzie jest dół.

Zadania • część 2

1. Tak. W macierzach oba opisy dają $R_z(90^\circ)R_y(90^\circ)$. Obroty wokół osi związanych z ciałem składa się „od lewej do prawej” w kolejności wykonywania, wokół osi stałych „od prawej do lewej”.
2. $c_\theta = 0, s_\theta = 1$: $R = \begin{bmatrix} 0 & s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\psi & c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ 0 & s_\varphi s_\psi + c_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\psi - s_\varphi c_\psi \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) \\ 0 & \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Np. $(\psi, \varphi) = (40^\circ, 10^\circ)$ i $(50^\circ, 20^\circ)$ dają tę samą macierz. Kąty Eulera nie są tu jednoznaczne.
3. $\theta = -\arcsin 0 = 0, \varphi = \text{atan2}(0, 1) = 0, \psi = \text{atan2}(1, 0) = 90^\circ$. Lot poziomy na wschód.
4. $p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta = 0, q = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi = 0,05 \text{ rad/s}, r = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi = 0,087 \text{ rad/s}$. Obrót wokół pionu widziany z przechylnego samolotu rozkłada się na pochylenie i odchylenie. Dlatego w zakręcie trzeba ściągnąć drążek: samolot musi się stale pochyłać w swoich osiach.

Zadania • część 3

1. $\cos \alpha = (2,62 - 1)/2 = 0,81, \alpha = 35,9^\circ$ (dokładnie, dla macierzy z przykładu 6.1: $35,8^\circ$).
2. $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{tr } R = 0$, więc $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \alpha = 120^\circ$. $\mathbf{n} = \frac{1}{2 \cdot 0,866}[0 - (-1); 0 - 1; 0 - (-1)] = [1; -1; 1]/\sqrt{3}$. Odwrotna kolejność (przykład 6.2) daje inną oś, $[1; 1; 1]/\sqrt{3}$: obroty nie są przemienne.
3. $\sin \alpha = 0$ i R jest symetryczna, więc licznik i mianownik są zerowe. Przy $\alpha = 180^\circ$ wzór Rodriguesa daje $R = I + 2[\mathbf{n}]_\times^2 = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T - I$, więc $\mathbf{n}\mathbf{n}^T = (R + I)/2$: każda niezerowa kolumna $R + I$ jest równoległa do osi. To samo pokazuje wektor własny dla $\lambda = 1$.

Zadania • część 4

1. $\mathbf{q} = (\cos 45^\circ, 0, 0, \sin 45^\circ) = (0,707; 0; 0; 0,707)$. $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = (0,5 - 0,5, 2 \cdot 0,707 \cdot 0,707 \mathbf{k} + \mathbf{0}) = (0, 0, 0, 1)$: obrót o 180° wokół z , bo $\cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1$.
2. $\mathbf{q} \otimes (0, \mathbf{v}) = (-0, 0,707 \mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}) = (0; 0,707; 0,707; 0)$ (bo $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$). Mnożąc przez $\mathbf{q}^* = (0,707; 0; 0; -0,707)$: $(0; 0; 1; 0)$. Wynik $[0; 1; 0]$, zgodnie z obrotem o 90° wokół z .
3. Każdy element R to iloczyn dwóch składowych $\mathbf{q}$; zmiana znaku wszystkich składowych nie zmienia iloczynów. We wzorze z mnożeniem $\mathbf{q}$ występuje dwa razy ($\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}^*$), więc znaki się znoszą: tak, wynik ten sam.

Zadania · część 5

1. $\dot{q} = \frac{r}{2} \left(-\sin \frac{rt}{2}, 0, 0, \cos \frac{rt}{2} \right)$. Prawa strona: $\frac{1}{2} \left(-\sin \frac{rt}{2} \cdot r, \cos \frac{rt}{2} (0, 0, r) + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} \right)$, a $\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, bo oba wektory leżą na osi z . Wyniki się zgadzają.
2. $\dot{\psi} = r / \cos 85^\circ = 1,15 \text{ rad/s} = 66^\circ/\text{s}$, $\dot{\varphi} = r \tan 85^\circ = 1,14 \text{ rad/s}$. Samolot obraca się powoli ($0,1 \text{ rad/s}$), ale kurs i przechylenie wirują. Wskaźnik kursu przy locie w pionie jest bezużyteczny, a przyrządy z mechanicznymi przegubami mogą się „rozkręcić”.

Zadania do przemyslenia

1. Gdy $q_0 \rightarrow 0$ (obróć o prawie 180°): dzielimy małe różnice przez małą liczbę i błędy zaokrągleń rosną.
2. Rozwiązanie (metoda Shepperda): z przekątnej policz kwadraty wszystkich czterech składowych, np. $4q_1^2 = 1 + R_{11} - R_{22} - R_{33}$, wybierz największą i z niej licz pozostałe. Największa składowa ma kwadrat co najmniej $1/4$, więc dzielenie jest bezpieczne.
1. Wzór Rodriguesa z $\sin \alpha \approx \alpha$, $1 - \cos \alpha \approx 0$: $R \approx I + \alpha [\mathbf{n}]_\times = I + [\boldsymbol{\delta}]_\times$, gdzie $\boldsymbol{\delta} = \alpha \mathbf{n}$. Kąty Eulera dla małych obrotów są składowymi $\boldsymbol{\delta}$ (kolejność nie ma znaczenia w pierwszym rzędzie). Kwaternion: $\cos(\alpha/2) \approx 1$, $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$.
2. Filtr Kalmana potrzebuje stanu w przestrzeni wektorowej (dodawanie, kowariancja). Dlatego w lekcji 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach estymujemy nie kwaternion, tylko mały wektor błędu orientacji $\boldsymbol{\delta}$ wokół bieżącej estymaty, i składamy go z kwaternionem mnożeniem.
1. Kąty 3-1-3 mają osobliwość przy nutacji 0 i 180° : wtedy pierwszy i trzeci obrót są wokół tej samej osi z . Dla bąka (lekcja Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna) to rzadki przypadek pionowej osi, a nutacja ma czytelny sens fizyczny.
2. Samolot prawie zawsze lata blisko poziomu ($\theta \approx 0$), a kąty 3-2-1 są tam najdalej od osobliwości i mają sens dla pilota. Kąty 3-1-3 miałyby osobliwość właśnie w locie poziomym.
1. Obrót o 350° to ta sama orientacja co obrót o -10° . Kwaternion q_e ma wtedy $q_0 = \cos 175^\circ < 0$.
2. Regulator dążący tylko do $(1, \mathbf{0})$ „odkręci” 350° naokoło. Zmiana znaku q_e , gdy $q_0 < 0$, daje obrót o 10° w drugą stronę. Markley i Crassidis nazywają niechciany pełny obrót *unwinding*.
1. Przy pionie (pochylenie $\pm 90^\circ$) kąty kursu i przechylenia zaczynają skakać albo zmieniać się gwałtownie przy drobnych ruchach: to osobliwość kątów Eulera.
2. Telefon wewnętrznie liczy na kwaternionie lub macierzy (system Android udostępnia „wektor obrotu” właśnie w tej postaci), a kąty to tylko przeliczenie na wyjściu. Dlatego sam obraz w grach i aplikacjach AR się nie psuje.

Dynamika lotu · Lekcja 1: Orientacja w 3D · Źródła: H. Schaub, J. L. Junkins, *Analytical Mechanics of Aerospace Systems* (rozdz. 3); F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer 2014, rozdz. 2–3); J. Stuelpnagel, „On the parametrization of the three-dimensional rotation group”, *SIAM Review* 6 (1964). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/l1.py).