

LQG i odporność

LQR ma gwarantowany zapas fazy 60° . Filtr Kalmana jest optymalnym estymatorem. Zasada separacji mówi, że można je połączyć. W 1978 r. John Doyle pokazał prosty przykład, w którym to połączenie, regulator LQG, traci stabilność przy błędzie wzmocnienia rzędu kilku procent. Ta ostatnia lekcja kursu wyjaśnia, dlaczego „optymalny” nie znaczy „odporny”, jak odzyskać zapasy i od czego zaczyna się nowoczesna teoria sterowania odpornego. Kończy się przewodnikiem po tym, co dalej.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2,5 h zadań

ZADANIA

12 zadań w treści
+ 4 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

J. C. Doyle,
„Guaranteed
margins for LQG
regulators”
(1978); A. Tewari,
*Advanced Control
of Aircraft,
Spacecraft and
Rockets*, rozdz.
2.12; S. Skogestad,
I. Postlethwaite,
*Multivariable
Feedback Control*,
rozdz. 2, 7, 9; S. A.
Frank, *Control
Theory Tutorial*,
rozdz. 7

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: „There are none”
- 1 Regulator LQG
- 2 Kontrprzykład Doyle’a
- 3 Jak mierzyć odporność
- 4 Odzyskiwanie pętli (LTR)
- 5 H_∞ : odporność wprost w kryterium
- 6 Przewodnik: Tewari 2.12 i co dalej
- 7 Metoda i przykłady rozwiązane
- 8 Błędne intuicje
- 9 Zadania do przemyślenia
- 10 Sprawdź się
- 11 Karta wzorów i co dalej

Prolog: „There are none”

W latach 60. i 70. teoria sterowania optymalnego święciła triumfy. Filtr Kalmana prowadził nawigację Apollo, LQR stał się standardem projektowania, a pod koniec dekady regulator LQG (ang. *linear-quadratic-Gaussian*) uchodził za ostateczną odpowiedź na pytanie, jak sterować układem liniowym z szumami. Klasyczne zapasy fazy i wzmocnienia uważano za przeżytek inżynierów z epoki wzmacniaczy.

W 1978 r. w IEEE Transactions on Automatic Control ukazała się dwustronicowa notatka Johna Doyle'a „Guaranteed margins for LQG regulators”. Jej streszczenie składało się z trzech słów: „There are none”, czyli „Nie ma żadnych”. Doyle podał prosty układ drugiego rzędu, w którym LQG ma dowolnie małe zapasy stabilności. To otrzeźwienie skierowało automatykę lat 80. ku sterowaniu odpornemu: metodom, które projektują pętlę z myślą o błędach modelu.

Pytanie na start. LQR dla pewnego obiektu dopuszcza dowolny wzrost wzmocnienia i spadek do 0,16. Kalman dla tego obiektu jest optymalny. O ile może się zmienić wzmocnienie obiektu, zanim LQG z tymi dwoma składnikami straci stabilność? Odpowiedź w części 2.

Regulator LQG

Obiekt z szumami: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ (szumy białe, gaussowskie, kowariancje $\mathbf{W}$ i $\mathbf{V}$). Szukamy regulatora, który minimalizuje oczekiwany koszt kwadratowy $E \left[\int (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \right]$, mając tylko pomiary $\mathbf{y}$. Tewari 2.12

Odpowiedź (twierdzenie o separacji w wersji stochastycznej): optymalny jest LQR z lekcji 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów sterowany estymatą z filtru Kalmana z lekcji 4.4 Filtr Kalmana:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}.$$

$\mathbf{K}$ zależy tylko od $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ (równanie Riccatiego regulatora), $\mathbf{L}$ tylko od $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ (dualne równanie filtru). Bieguny całości to bieguny LQR i filtru (lekcja 4.2 Obserwator stanu i obserwowalność). Całość to regulator dynamiczny rzędu n o transmitancji od $\mathbf{y}$ do $-\mathbf{u}$:

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{K} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{L}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{L}.$$

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 15 min

1 Wyprowadź transmitancję regulatora LQG $\mathbf{C}(s)$ z równań obserwatora i $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$.

2 Ile stanów ma regulator LQG dla drona w płaszczyźnie (4 stany)? A klasyczny PID?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Kontrprzykład Doyle'a

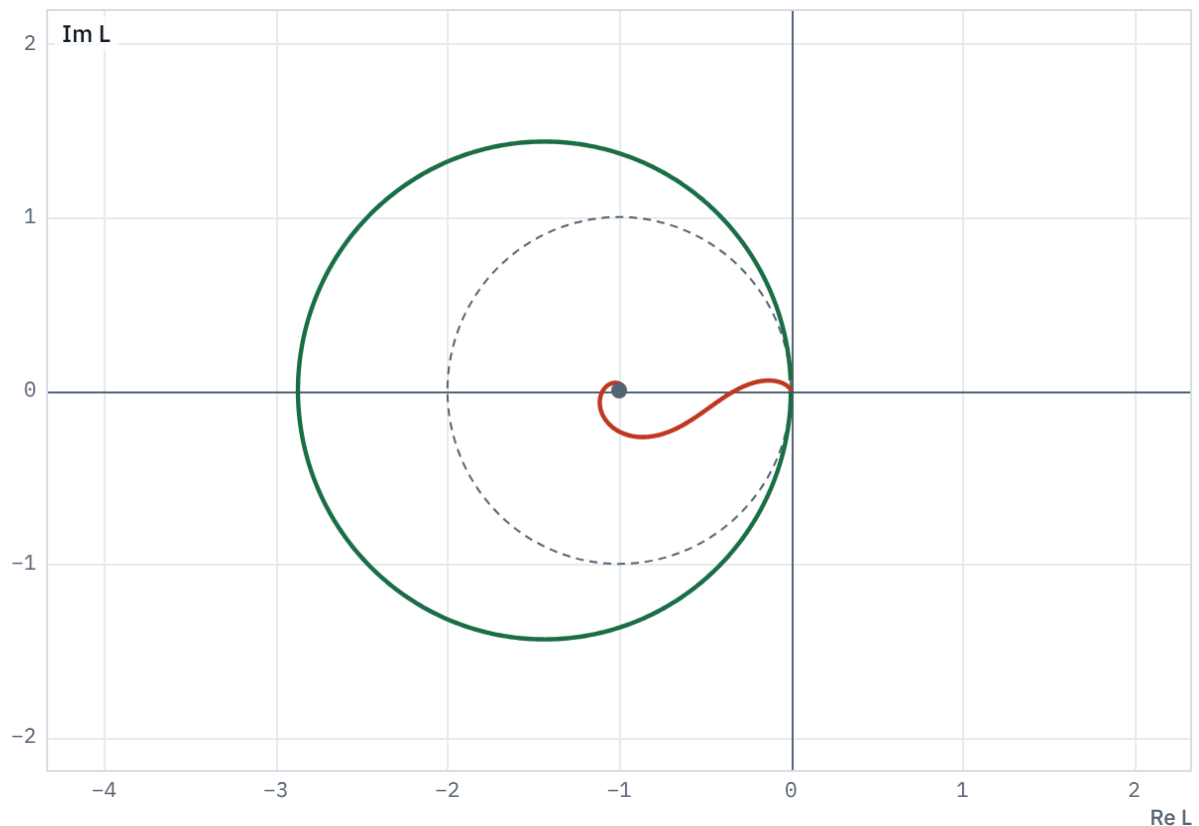
Obiekt Doyle'a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad Q = q \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad W = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = 1.$$

Obiekt jest niestabilny (podwójny biegun w $+1$), ale sterowalny i obserwowalny. Sam LQR ma klasyczne gwarancje: przy $q = 100$ pętla przecięta na wejściu obiektu dopuszcza wzmocnienie od 0,16 do nieskończoności, $\max |S| = 1$. LQG z $q = \sigma = 100$ dopuszcza wzmocnienie tylko od 0,938 do 1,007, a $\max |S| \approx 150$: wykres Nyquista przechodzi w odległości 0,007 od punktu -1 .

Odpowiedź na pytanie z prologu: o mniej niż 1% w górę i ok. 6% w dół. Przy $q = \sigma = 1000$ wystarczy wzrost o 0,09%. Gwarancje LQR obowiązują tylko przy pełnym, dokładnym stanie. Filtr Kalmana potrzebuje wiedzieć, jakie sterowanie trafia do obiektu ($B\mathbf{u}$ w predykcji). Gdy wzmocnienie obiektu się zmienia, model w filtrze i obiekt rozjeżdżają się dokładnie w tym kierunku, na który pętla jest najbardziej wrażliwa.

SYMULACJA 1 Wykres Nyquista pętli przeciętej na wejściu obiektu: LQR (zielony) i LQG (czerwony), z kołem $|1 + L| = 1$ wokół -1 . W trybie Doyle'a zwiększaj q : LQR zostaje poza kołem, LQG przechodzi coraz bliżej -1 . W trybie „dron” zobacz, jak zwiększanie fikcyjnego szumu na wejściu obiektu (LTR, część 4) przywraca zapasy.



— LQR (pełny stan) — LQG (LQR + filtr Kalmana) - - - koło $|1 + L| = 1$ wokół -1

LQR: dopuszczalne wzmocnienie 0,348 ... ∞

LQR: max $|S|$ 1,00

LQG: dopuszczalne wzmocnienie 0,914 ... 1,030

LQG: max $|S|$ 33,97

LQR omija koło wokół -1 , jak gwarantuje teoria. LQG, czyli ten sam LQR sterowany estymatą z optymalnego filtra, przechodzi tuż obok -1 : wystarczy kilka procent błędu wzmocnienia, żeby pętla straciła stabilność. Im większe q , tym gorzej.

Stan na rysunku: Doyle (1978): $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = W = q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $R = V = 1$, $q = 10,0$; pętla przecięta na wejściu obiektu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 W symulacji 1 (tryb Doyle'a) odczytaj zakres dopuszczalnego wzmocnienia LQG dla $q = 1, 10, 100, 1000$.

- 2 Dlaczego zapas LQR dotyczy pętli przeciętej na wejściu obiektu, a nie gdzie indziej?

- 3 Zasada separacji (lekcja 4.2) mówi, że bieguny LQG to bieguny LQR i filtru. Jak to pogodzić z utratą stabilności przy małym błędzie?

podstawowe średnie feynmanowskie

3 Jak mierzyć odporność

Zapasy fazy i wzmocnienia z lekcji 2.4 mierzą odporność na jeden rodzaj błędu naraz. Ogólniejszy opis: prawdziwy obiekt to $G(1 + \Delta)$, gdzie $\Delta(s)$ to nieznany względny błąd modelu, o którym wiemy tylko, że $|\Delta(j\omega)| \leq \ell(\omega)$ (zwykle mały przy niskich częstotliwościach, duży przy wysokich). Z kryterium Nyquista (a ogólniej z twierdzenia o małym wzmocnieniu) wynika **warunek odpornej stabilności** dla nominalnie stabilnej pętli i każdego stabilnego Δ z $|\Delta(j\omega)| \leq \ell(\omega)$: Frank 7

$$\text{pętla odporne stabilna} \iff |T(j\omega)| \ell(\omega) < 1 \quad \text{dla każdego } \omega.$$

Dlatego w lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli chcieliśmy małego $|T|$ przy wysokich częstotliwościach. Druga miara, $\max |S|$, to odwrotność najmniejszej odległości Nyquista od -1 : obejmuje jednocześnie błąd wzmocnienia i fazy.

Dla układów o wielu wejściach i wyjściach (MIMO) transmitancja jest macierzą, a „wzmocnienie” zależy od kierunku sygnału. Rolę modułu przejmują **wartości osobliwe** macierzy $G(j\omega)$: największa $\bar{\sigma}$ to największe wzmocnienie po wszystkich kierunkach, najmniejsza $\underline{\sigma}$ najmniejsze. Kryteria odporności MIMO wyglądają tak samo jak SISO, tylko z $\bar{\sigma}$ zamiast modułu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Błąd modelu drona: do 10% przy niskich częstotliwościach, do 200% powyżej 50 rad/s (niemodelowane drgania ramy). Jakie $|T|$ wolno mieć przy 1 rad/s i przy 50 rad/s?

- 2 Pokaż, że $\max |S| = 2$ gwarantuje zapas wzmocnienia co najmniej 2 (w górę) i zapas fazy co najmniej 29° .

- 3 Macierz $G = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ (statycznie). Policz wartości osobliwe. Co to znaczy dla regulatora?

podstawowe średnie feynmanowskie

Odzyskiwanie pętli (LTR)

Doyle i Stein (1979) zaproponowali lekarstwo, które nazwali **odzyskiwaniem pętli** (ang. *loop transfer recovery*, LTR). Projektujemy filtr Kalmana tak, jakby na wejściu obiektu działał dodatkowy, coraz silniejszy szum:

$$W = W_0 + q^2 B B^T, \quad q \rightarrow \infty.$$

Filtr „widzi”, że sterowanie może być dowolnie zaburzone, przestaje polegać na Bu w modelu i coraz bardziej ufa pomiarom. Dla obiektów minimalnofazowych (bez zer w prawej półpłaszczyźnie) pętla LQG przecięta na wejściu dąży do pętli LQR i odzyskuje jej zapasy. Cena: szybki filtr przepuszcza więcej szumu pomiaru, więc q dobiera się jako kompromis.

Dla wysokości drona (LQR z $Q = \text{diag}(100, 0)$, barometr 0,1 m): sam LQR ma zapas fazy 67° , LQG bez LTR 39° i $\max |S| = 1,87$. Z $q = 100$: 58° , $\max |S| = 1,18$. Z $q = 1000$: 64° , $\max |S| = 1,06$, prawie jak LQR.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 15 min

- 1 W symulacji 1 (tryb „dron”) porównaj bieguny filtru dla $q = 0, 10, 100, 1000$ (z pliku weryfikacyjnego: $\omega_0 \approx 3,2; 10; 32; 100$ rad/s). Dlaczego szybki filtr jest ceną za odporność?

- 2 Dlaczego LTR nie działa dla obiektów z zerem w prawej półpłaszczyźnie?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

H_∞ : odporność wprost w kryterium

LQG minimalizuje średni koszt przy znanych szumach. Kryterium H_∞ (George Zames, 1981; rozwiązanie w przestrzeni stanów: Doyle, Glover, Khargonekar i Francis, 1989) minimalizuje najgorszy przypadek: największe wzmocnienie od zakłóceń i błędów modelu do uchybów, po wszystkich częstotliwościach i kierunkach,

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)).$$

W praktyce projektant wybiera wagi częstotliwościowe: „ $|S|$ ma być mały poniżej 1 rad/s”, „ $|T|$ ma być mały powyżej 50 rad/s”, „sterowanie nie może być duże powyżej 20 rad/s”. Algorytm znajduje regulator, który spełnia wszystkie te wymagania naraz albo mówi, że to niemożliwe. To kształtowanie pętli z lekcji 2.5, tylko dla wielu wejść i wyjść i z gwarancją. Regulator wynika

znowu z dwóch równań Riccatiego. Tewari omawia H_2 i H_∞ w podrozdziale 2.12.2, a pełny wykład daje podręcznik Skogestada i Postlethwaite'a.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 15 min

1 Co oznacza $\|S\|_\infty = 1,5$ dla pętli SISO?

2 Dlaczego normę H_2 (LQG) nazywa się „średnią”, a H_∞ „najgorszym przypadkiem”?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

6 Przewodnik: Tewari 2.12 i co dalej

Podrozdział 2.12 Tewariego („Robust Linear Time-Invariant Control”) streszcza tę lekcję: LQG/LTR (2.12.1) i metody H_2/H_∞ (2.12.2), z zapasami MIMO opartymi na wartościach osobliwych. Po tej lekcji rozdział 2 Tewariego da się czytać w całości. Kolejne rozdziały stosują te narzędzia do samolotów (rozdz. 3), rakiet (rozdz. 4–5: naprowadzanie i orientacja) oraz statków kosmicznych (rozdz. 6–7).

Gdzie dalej w naszym kursie:

- **Dynamika lotu:** orientacja w 3D i fuzja na kwaternionach (lekcja 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach), stateczność i mody samolotu, augmentacja i autopilot (lekcje 8 Augmentacja stateczności: tłumik odchylenia i pochylenia i 9 Autopilot: pętle wewnętrzne i zewnętrzne), rakietą z ciągiem wektorowanym (lekcja 11 Rakietą: orientacja i ciąg wektorowany) i naprowadzanie (lekcja 12 Naprowadzanie: trajektoria nominalna i śledzenie odchyłek), gdzie wraca zasada maksimum z lekcji 5.1.
- **Astronautyka:** manewry orbitalne jako zadania optymalne (impulsy, bang-off-bang), wyznaczanie i sterowanie orientacją.

☰ METODA: REGULATOR ZE SPRZĘŻENIEM OD ESTYMATY, KTÓRY PRZETRWA RZECZYWISTOŚĆ

1. **Projekt nominalny:** LQR + Kalman (LQG).
2. **Sprawdzenie odporności** pętli przeciętej na wejściu (i na wyjściu): zakres wzmocnienia, $\max |S|, |T| \ell < 1$.
3. **Jeśli za mało:** LTR (fikcyjny szum $q^2 B B^T$), kompromis z szumem pomiaru.
4. **Jeśli wymagania są częstotliwościowe i MIMO:** H^∞ z wagami.
5. **Zawsze:** symulacja z błędami parametrów (masa, ciąg, opóźnienie) i z szumem.

Przykład 7.1

Doyle liczbami

Obiekt Doyle'a, $q = \sigma = 100$. Porównaj odporność LQR i LQG.

- 1 $K = [12,2; 12,2]$, $L = [12,2; 12,2]^T$ (z symetrii zadania).
- 2 LQR: wzmocnienie dopuszczalne od 0,16 do ∞ , $\max |S| = 1,00$.
- 3 LQG: od 0,938 do 1,007, $\max |S| \approx 150$.

Wynik: silnik, który daje 0,7% więcej siły niż w modelu, destabilizuje pętlę LQG.

Sprawdzenie: python-control i symulacja 1 dają te same liczby ✓; przy $q = \sigma = 1$ przedział jest szerszy (0,92–1,06), ale wciąż bez porównania z LQR.

Przykład 7.2

LTR dla wysokości drona

LQR $Q = \text{diag}(100, 0)$, $R = 1$ ($K = [10; 4]$); barometr $V = 0,01 \text{ m}^2$; filtr z $W = \text{diag}(0, 1 + q^2)$.

- 1 LQR: zapas fazy 67° przy $\omega_c = 4,5 \text{ rad/s}$, $\max |S| = 1$.
- 2 LQG, $q = 0$: 39° , $\max |S| = 1,87$, wzmacnienie do 3,3.
- 3 $q = 100$: 58° , $\max |S| = 1,18$, wzmacnienie do 12. $q = 1000$: 64° , 1,06, do 36.

Wynik: LTR przywraca prawie całe zapasy LQR; filtr ma wtedy bieguny ok. 100 rad/s.

Sprawdzenie: dron jest minimalnofazowy (brak zer), więc LTR musi działać ✓.

8 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Złożenie dwóch optymalnych elementów daje odporny regulator.”

Daje regulator optymalny dla nominalnego modelu. Odporność trzeba sprawdzić osobno.

× „Duży zapas fazy LQR przenosi się na LQG.”

Nie: gwarancja dotyczy pełnego stanu. Z estymatorem zapasy mogą być dowolnie małe.

× „Klasyczne zapasy to przeżytek.”

Lekcja Doyle’a jest odwrotna: każdy projekt, nawet najbardziej nowoczesny, trzeba sprawdzić kryteriami z części II (Nyquist, $\max |S|$, $|T|$ przy wysokich częstotliwościach).

× „ H_∞ zastępuje wszystkie wcześniejsze metody.”

To narzędzie do jasno sformułowanych wymagań odporności. W praktyce PID, kaskady i LQR z harmonogramem wciąż dominują, a H_∞ stosuje się tam, gdzie się opłaca (samoloty, układy MIMO o silnych sprzężeniach).

9 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

- 1 **Gdzie przeciąć pętlę?** Dron ma cztery silniki (4 wejścia) i mierzy 6 wielkości. Gdzie sprawdzałbyś zapasy i dlaczego jeden zapas na jednym kanale nie wystarcza?
- 2 **Dlaczego Doyle'owi wystarczyły duże q i σ ?** Co w jego przykładzie sprawia, że im „lepszy” regulator i filtr, tym gorsza odporność?
- 3 **Odporność a opóźnienie.** Do drona z LQG dochodzi opóźnienie 20 ms (obliczenia, ESC). Jak oszacować, czy pętla to wytrzyma?
- 4 **Podsumowanie kursu.** Wypisz trzy narzędzia z części II i trzy z części IV, które opisują ten sam kompromis „szybkość kontra odporność i szum”.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

10 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Czym jest LQG?

LQR sterowany estymatą z filtru Kalmana; optymalny dla szumów gaussowskich i kosztu kwadratowego.

2 Co pokazał Doyle w 1978 r.?

Że LQG może mieć dowolnie małe zapasy stabilności, mimo gwarancji LQR.

3 Kiedy pętla jest odpornie stabilna przy błędzie względnym modelu $|\Delta| \leq \ell$?

Pętla jest odpornie stabilna, gdy $|T(j\omega)|\ell(\omega) < 1$ dla każdego ω .

4 Jak działa LTR?

Filtr projektuje się z fikcyjnym szumem $q^2 BB^T$ na wejściu; przy dużym q pętla LQG zbliża się do pętli LQR.

5 Czym są wartości osobliwe w MIMO?

Wzmocnieniami w najkorzystniejszym i najgorszym kierunku; zastępują moduł transmitancji.

6 Czym H_∞ różni się od LQG?

Minimalizuje najgorszy przypadek (maksimum po częstotliwościach), a nie średnią.

LQG

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{u} = -K\hat{\mathbf{x}}$$

$$C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

LQR: $|1 + K(sI - A)^{-1}B| \geq 1$; LQG: brak gwarancji

LTR: $W = W_0 + q^2 BB^T, q \rightarrow \infty$ (obiekt minimalnofazowy)

ODPORNOŚĆ

obiekt $G(1 + \Delta)$, $|\Delta| \leq \ell$: $|T|_\ell < 1$

$\max |S| = 1 / \min |1 + L|$; $\max |S| = 2$: $\text{GM} \geq 2$, $\text{PM} \geq 29^\circ$

MIMO: $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ zamiast $|G|$

$$\|T\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(T(j\omega))$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** J. C. Doyle, „Guaranteed margins for LQG regulators”, *IEEE Trans. Automatic Control* 23 (1978), dwie strony; A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, podrozdz. 2.12.
- **Dla chętnych:** S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control* (Wiley), standardowy podręcznik sterowania odpornego; S. A. Frank, *Control Theory Tutorial*, rozdz. 7 (odporność, w otwartym dostępie).

To koniec kursu automatyki. Zaczęliśmy od wzmacniacza Blacka i prysznica z długą rurą, a skończyliśmy na granicach teorii optymalnej. Wszystko, co po drodze, od sprzężenia zwrotnego i wykresów Bodego po filtr Kalmana i zasadę maksimum, wraca w kursach dynamiki lotu i astronautyki, tym razem na samolotach, rakietach i satelitach.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Podstawiając $u = -K\hat{x}$: $\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly$. Stąd $\hat{x} = (sI - A + BK + LC)^{-1}Ly$ i $-u = K\hat{x} = C(s)y$.
2. LQG: 4 (tyle co obiekt). PID: 1-2 (całka i filtr D). LQG jest regulatorem wyższego rzędu „z modelem w środku”, co jest jego siłą (wykorzystuje wiedzę o obiekcie) i słabością (zależy od tego, czy model jest dobry).

Zadania · część 2

1. Ok. 0,92–1,06; 0,91–1,03; 0,94–1,007; 0,973–1,001. Przedział kurczy się do zera wokół 1. (Symulacja sprawdza wzmocnienia na siatce, więc ostatnia cyfra może się różnić.)
2. Gwarancja $|1 + L| \geq 1$ wynika z równania Riccatiego dla $L(s) = K(sI - A)^{-1}B$, czyli pętli „sterowanie $\rightarrow$ obiekt $\rightarrow$ stan $\rightarrow K \rightarrow$ sterowanie”. W innym miejscu (np. na wyjściu) pętla to inna transmitancja i gwarancji nie ma. Błędy elementu wykonawczego (siła silnika) działają właśnie na wejściu.
3. Separacja zakłada dokładny model. Błąd wzmocnienia psuje trójkątną strukturę macierzy układu: bieguny przestają być sumą obu zestawów i mogą przejść na prawą stronę. Separacja to wynik o nominalnym modelu, a nie o odporności.

Zadania · część 3

1. $|T| < 1/0,1 = 10$ przy 1 rad/s (praktycznie bez ograniczenia, typowo $|T| \approx 1$). $|T| < 1/2 = 0,5$ przy 50 rad/s: pętla musi tam już wyraźnie opadać.
2. Nyquist nie wchodzi do koła o promieniu $1/2$ wokół -1 . Przy fazie -180° punkt L leży na prawo od $-1/2$ (między $-1/2$ a 0; przypadek $L \leq -3/2$, czyli pętlę stabilną warunkowo, pomijamy), więc $|L| \leq 1/2$ i wzmocnienie może wzrosnąć dwukrotnie. Przy $|L| = 1$: punkt na okręgu jednostkowym poza kołem o promieniu $0,5$ wokół -1 ma kąt od -1 co najmniej $2 \arcsin(0,25) = 29^\circ$.
3. Macierz symetryczna, więc wartości osobliwe to moduły wartości własnych: $\lambda = 9 \pm \sqrt{82}$, czyli ok. 18,06 i 0,055. W jednym kierunku obiekt wzmacnia 330 razy mocniej niż w drugim (źle uwarunkowany, por. kolumna destylacyjna). Regulator, który „odwraca” obiekt, będzie w słabym kierunku wzmacniał błędy ogromnie.

Zadania · część 4

1. Szybkie bieguny filtru to duże L , czyli silne poprawki z każdego pomiaru barometru: szum 0,1 m jest wzmacniany do estymaty prędkości i dalej do silników (lekcja 4.2). Odporność na błąd wzmocnienia kupujemy wrażliwością na szum.
2. Przy $q \rightarrow \infty$ filtr dąży do odwrócenia dynamiki obiektu (jego bieguny zmierzają do zer obiektu). Odwrócenie prawego zera daje niestabilny biegun w regulatorze, a skasowanie go jest nieodporne. Ograniczenia z lekcji 2.5 (prawo zero ogranicza pasmo) obowiązują każdy regulator, także LQG.

Zadania · część 5

1. $\max_{\omega} |S(j\omega)| = 1,5$: Nyquist nie podchodzi do -1 bliżej niż na $1/1,5 = 0,67$; zakłócenia nie są nigdzie wzmacniane więcej niż 1,5 razy.
2. $\|T\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int |T(j\omega)|^2 d\omega$: całka, czyli suma po wszystkich częstotliwościach (odpowiedź na biały szum). $\|T\|_{\infty}$ to maksimum: odpowiedź na najgorszą możliwą sinusoidę albo najgorszy błąd modelu. Mały $\|T\|_2$ nie wyklucza wąskiego, wysokiego szczytu, który decyduje o odporności (jak u Doyle'a).

Zadania do przemyślenia

1. Na wejściach (każdy silnik może mieć inny błąd ciągu) i na wyjściach (błędy czujników). W MIMO błędy mogą działać jednocześnie w wielu kanałach i w niekorzystnym kierunku.
2. Zapas na jednym kanale (przy pozostałych zamkniętych) nie wykrywa kierunków, w których pętla jest wrażliwa. Właściwa miara to $\bar{\sigma}(S)$ i $\bar{\sigma}(T)$ albo analiza μ (wartość osobliwa strukturalna).
1. Duże q i σ dają duże K i L : regulator i filtr są szybkie i „agresywne”. Regulator LQG ma wtedy duże wzmocnienie w pasmie, w którym model obiektu jest kluczowy.
2. Kierunki wag ($[1 \ 1]$) są dobrane tak, że szum procesu działa wzdłuż kierunku, który zamyka pętlę przez model w filtrze; mały błąd wzmocnienia zmienia tę pętlę dokładnie tam, gdzie jest najbliższej -1 .
1. Zapas opóźnienia: PM/ω_c (lekcja 2.4). Dla LQG bez LTR: $39^\circ = 0,68$ rad przy 2,3 rad/s, czyli ok. 0,3 s; wystarczy.
2. Ale przy dużym q w LTR szybki filtr i wyższe ω_c zmniejszają ten zapas; sprawdza się go dla całej pętli, a nie dla LQR.
1. Część II: zapas fazy a ω_c (2.4), $S + T = 1$ i całka Bodego (2.5), filtr członu D (2.5).
2. Część IV: szybkość obserwatora a szum (4.2), wagi Q , R w LQR (4.3), Q i R w filtrze Kalmana (4.4), LTR (5.2). Wszystkie to ten sam kompromis w różnych językach.

Automatyka · Lekcja 5.2: LQG i odporność · Źródła: J. C. Doyle, *IEEE Trans. Automatic Control* 23 (1978); J. C. Doyle, G. Stein, „Robustness with observers”, *IEEE Trans. Automatic Control* 24 (1979); G. Zames, *IEEE Trans. Automatic Control* 26 (1981); J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, „State-space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems”, *IEEE Trans. Automatic Control* 34 (1989); A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (Wiley 2011); S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control*. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c5_2.py).