

Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów

LQR dał optymalny regulator dla jednego rodzaju zadania: obiekt liniowy, koszt kwadratowy, sterowanie bez ograniczeń. Rakieta wchodząca na orbitę, samolot wznoszący się najszybciej, jak może, czy dron, który ma dolecieć na miejsce w najkrótszym czasie, nie mieszczą się w tych ramach. Ta lekcja przedstawia ogólne narzędzie, czyli zasadę maksimum (w konwencji Tewariego: minimum) Pontriagina. Pokazuje, że LQR jest jej przypadkiem szczególnym, a sterowanie „gaz do dechy, potem hamulec do dechy” innym. Kończy się tym, jak takie zadania rozwiązuje się numerycznie. To most do rozdziału 2 podręcznika Tewariego.

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3 h zadań

ZADANIA

13 zadań w treści
+ 5 do
przemyslenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

A. Tewari,
*Advanced Control
of Aircraft,
Spacecraft and
Rockets* (Wiley
2011), rozdz. 2.4–
2.7; A. E. Bryson,
Y.-C. Ho, *Applied
Optimal Control*;
D. E. Kirk,
*Optimal Control
Theory: An
Introduction*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: rakietę, która ma zdążyć
- 1 Ogólne zadanie sterowania optymalnego
- 2 Hamiltonian i zasada minimum
- 3 LQR jako przypadek szczególny
- 4 Sterowanie czasooptymalne: bang-bang
- 5 Zadanie brzegowe i metoda strzałów
- 6 Przewodnik po rozdziale 2 Twariego
- 7 Metoda i przykłady rozwiązane
- 8 Błędne intuicje
- 9 Zadania do przemyślenia
- 10 Sprawdź się
- 11 Karta wzorów i co dalej

Prolog: rakietą, która ma zdążyć

W połowie lat 50. w Moskwie Lew Pontriagin, matematyk, który w wieku 14 lat stracił wzrok, zajął się z kolegami (Bołtianski, Gamkrelidze, Miszczenko) zadaniami, które przyniesli mu inżynierowie lotnictwa: jak sterować, żeby samolot przechwytyjący dotarł do celu najszybciej, przy ograniczonym ciągu i wychyleniu sterów? Rachunek wariacyjny z lekcji 6.1 Rachunek wariacyjny zawodził, bo optymalne sterowanie często siedziało na granicy dozwolonego zakresu, a tam warunek „pochodna równa zero” nie obowiązuje.

Wynikiem była zasada maksimum, opublikowana w pełni w 1961 r. w książce „Matematyczna teoria procesów optymalnych” (po angielsku w 1962 r.). W tym samym czasie Richard Bellman w USA rozwijał programowanie dynamiczne. Oba podejścia stały się fundamentem projektowania trajektorii rakiet, samolotów i statków kosmicznych.

Pytanie na start. Dron (bez oporu) może przyspieszać w pionie najwyżej g w górę i g w dół. Jak najszybciej wznieść się o 5 m i zatrzymać? Ile to trwa? Odpowiedź w części 4.

1

Ogólne zadanie sterowania optymalnego

Dany jest obiekt (dowolnie nieliniowy) i kryterium: Tewari 2.4

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad J = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}.$$

L to koszt bieżący (Tewari nazywa go lagranżjanem), φ to koszt końcowy, $\mathcal{U}$ to dopuszczalne sterowania, np. $|u| \leq U$. Do tego warunki brzegowe: znany stan początkowy i (czasem) zadany stan końcowy. Przykłady:

- LQR: $L = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u})$, $t_f = \infty$, bez ograniczeń;
- czas minimalny: $L = 1$ (koszt to po prostu t_f), $|u| \leq U$, zadany stan końcowy;
- minimalne zużycie paliwa: $L = |u|$ (ciąg rakiety), zadany stan końcowy.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 10 min

1 Zapisz f , L , $\mathcal{U}$ i warunki brzegowe dla zadania z prologu.

2 Dlaczego w zadaniu minimalnego zużycia paliwa koszt to $|u|$, a nie u^2 ?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

Hamiltonian i zasada minimum

Jak w rachunku wariacyjnym z więzami, dołączamy równanie ruchu do kryterium mnożnikami Lagrange'a $\lambda(t)$, które tu nazywają się **kostanem** (ang. *co-state*). Kluczowy obiekt to **hamiltonian**:

Tewari 2.5

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

🔑 ZASADA MINIMUM PONTRIAGINA (WARUNKI KONIECZNE)

Optymalne $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$ i kostan $\boldsymbol{\lambda}^*$ spełniają:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^*(t) = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^*, t),$$

z warunkami brzegowymi: $\mathbf{x}(0)$ dane; dla wolnego stanu końcowego $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \partial \varphi / \partial \mathbf{x}$ (warunek transversalności); dla wolnego t_f i H niezależnego od czasu: $H \equiv 0$ wzdłuż trajektorii.

Kostan ma interpretację: λ_i mówi, o ile wzrośnie optymalny koszt, gdy w danej chwili zwiększymy x_i o jednostkę (wrażliwość kosztu na stan). Gdy $\mathcal{U}$ nie ogranicza, minimum H to $\partial H / \partial \mathbf{u} = 0$ i dostajemy równania Eulera–Lagrange'a z lekcji math 6.1. Gdy ogranicza, minimum może leżeć na brzegu $\mathcal{U}$, i to jest nowość Pontriagina.

⚠️ MAKSIMUM CZY MINIMUM?

Pontriagin definiował hamiltonian z przeciwnym znakiem (maksymalizował $-L + \boldsymbol{\lambda}^T f$), stąd nazwa „zasada maksimum”. Tewari i większość książek inżynierskich minimalizuje $H = L + \boldsymbol{\lambda}^T f$ i mówi o „zasadzie minimum”. Treść jest ta sama, różni się tylko znak kostanu.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Napisz H i równania kostanu dla $\dot{x} = v$, $\dot{v} = u$, $L = \frac{1}{2}u^2$.

2 W zadaniu 2.1 kostan λ_1 jest stały, a λ_2 liniowy w czasie. Jakiego kształtu jest więc optymalne $u(t)$ i $x(t)$?

- 3 Pokaż, że dla H niezależnego jawnie od czasu H jest stałe wzdłuż optymalnej trajektorii (bez ograniczeń sterowania).

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 LQR jako przypadek szczególny

Dla $f = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, $L = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u})$:

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (A\mathbf{x} + B\mathbf{u}), \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u} + B^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = -R^{-1} B^T \boldsymbol{\lambda},$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T \boldsymbol{\lambda}.$$

Zgadujemy, że kosztan jest liniowy w stanie: $\boldsymbol{\lambda} = P(t)\mathbf{x}$. Podstawiając do obu równań i żądając, żeby wynik zachodził dla każdego $\mathbf{x}$, dostajemy różniczkowe równanie Riccatiego

$$-\dot{P} = A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q,$$

a dla $t_f \rightarrow \infty$ jego stan ustalony, czyli algebraiczne równanie Riccatiego z lekcji 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów. Szkic z tamtej lekcji (przez funkcję wartości $V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$) i ten (przez kosztan) dają ten sam wynik: kosztan to gradient funkcji wartości, $\boldsymbol{\lambda} = \nabla V$ (w skali $\frac{1}{2}$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Wyprowadź różniczkowe równanie Riccatiego z $\boldsymbol{\lambda} = P\mathbf{x}$.
- 2 Dla skończonego horyzontu bez kosztu końcowego jaki jest warunek końcowy dla P ? Co z tego wynika dla wzmocnienia pod koniec?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Sterowanie czasooptymalne: bang-bang

Podwójny integrator $\dot{x} = v$, $\dot{v} = u$, $|u| \leq U$, koszt $L = 1$. Hamiltonian:

$$H = 1 + \lambda_1 v + \lambda_2 u, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1.$$

H jest liniowy w u , więc minimum leży na brzegu: $u^* = -U \operatorname{sign} \lambda_2$. Sterowanie zawsze pełne, tylko kierunek się zmienia: **bang-bang**. A ponieważ $\lambda_2(t)$ jest liniowe, zmienia znak najwyżej raz: **co najwyżej jedno przełączenie**. Ostatni odcinek musi trafić w cel pełnym hamowaniem, więc przełączenie następuje na **krzywej przełączeń**

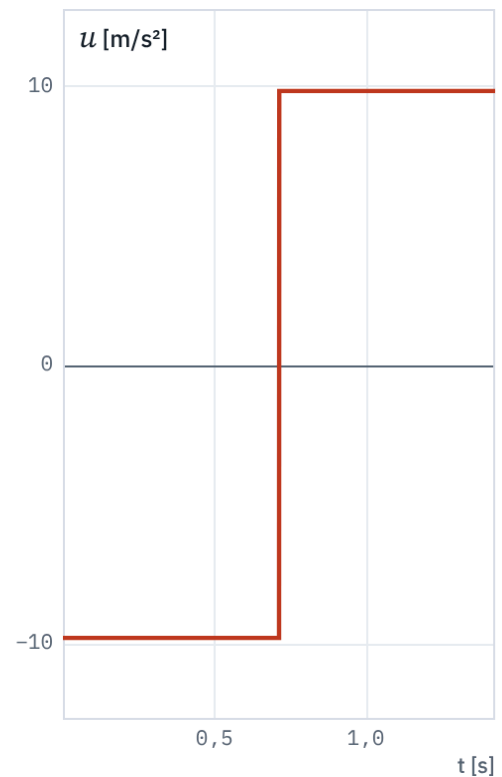
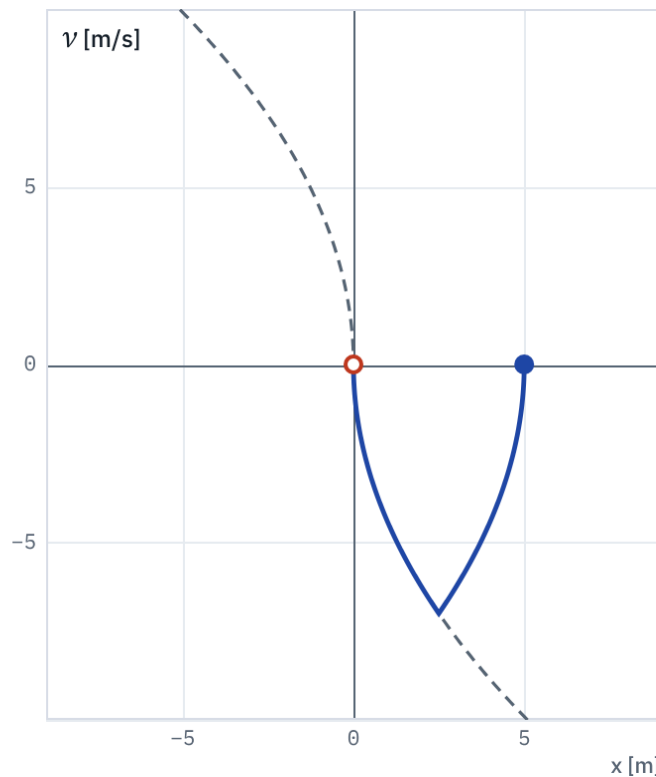
$$x = -\frac{v|v|}{2U}.$$

Powyżej krzywej sterujemy $-U$, poniżej $+U$, a na niej przełączamy. To regulator w postaci sprzężenia od stanu, tyle że nieliniowego: $u = -U \operatorname{sign} \left(x + \frac{v|v|}{2U} \right)$.

Odpowiedź na pytanie z prologu. Start w spoczynku, cel 5 m wyżej, też w spoczynku, $U = g$. Z symetrii: połowę czasu pełnym ciągiem w górę, połowę w dół. Każda połowa pokonuje 2,5 m: $\frac{1}{2}gt_1^2 = 2,5$, $t_1 = 0,714$ s. Razem $T^* = 2\sqrt{h/U} = 1,43$ s, prędkość maksymalna 7,0 m/s. Dla porównania gładka trajektoria z lekcji 3.3 trwała 3 s przy przyspieszeniu do 3,2 m/s².

SYMULACJA 1

Płaszczyzna fazowa podwójnego integratora z krzywą przełączeń (przerywana) i trajektorią czasooptymalną do zera. Zmieniaj stan początkowy i ograniczenie U . Zwróć uwagę: trajektorie to parabole, a przełączenie zawsze wypada na krzywej.



— krzywa przełączeń — trajektoria optymalna — $u(t) = \pm U$

czas minimalny $T^* \ 1,428 \text{ s}$

przełączenie w $t = 0,714 \text{ s}$

najpierw $-U$ (w dół)

Najszybciej jest pełnym sterowaniem w jedną stronę, a potem pełnym w drugą. Przełączenie następuje dokładnie na krzywej $x = -v|v|/(2U)$: stamtąd hamowanie pełną siłą trafia w cel. Co najwyżej jedno przełączenie, bo $\lambda_2(t)$ jest liniowe.

Stan na rysunku: $\ddot{x} = u$, $|u| \leq 9,81 \text{ m/s}^2$, start $x_0 = 5,0 \text{ m}$, $v_0 = 0,0 \text{ m/s}$, cel: spoczynek w zerze.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- Ile trwa czasooptymalne wzniesienie o 20 m (spoczynek–spoczynek) przy $U = g$? Jaka prędkość maksymalna?
- Wyprowadź krzywą przełączeń: z jakich stanów hamowanie pełną siłą $\pm U$ kończy się dokładnie w zerze?

- 3 Dlaczego regulator bang-bang z krzywej przełączeń jest w praktyce zawodny i czym się go zastępuje?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Zadanie brzegowe i metoda strzałów

Zasada minimum zamienia zadanie optymalizacji w układ równań różniczkowych na $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$.

Haczyk: warunki brzegowe są rozdzielone. $\mathbf{x}$ znamy na początku, a dla $\boldsymbol{\lambda}$ (albo części $\mathbf{x}$) warunki są na końcu. To **dwupunktowe zadanie brzegowe** (ang. *two-point boundary value problem*), znacznie trudniejsze od zwykłego całkowania. Tewari 2.7

Najprostsza metoda numeryczna to **metoda strzałów**:

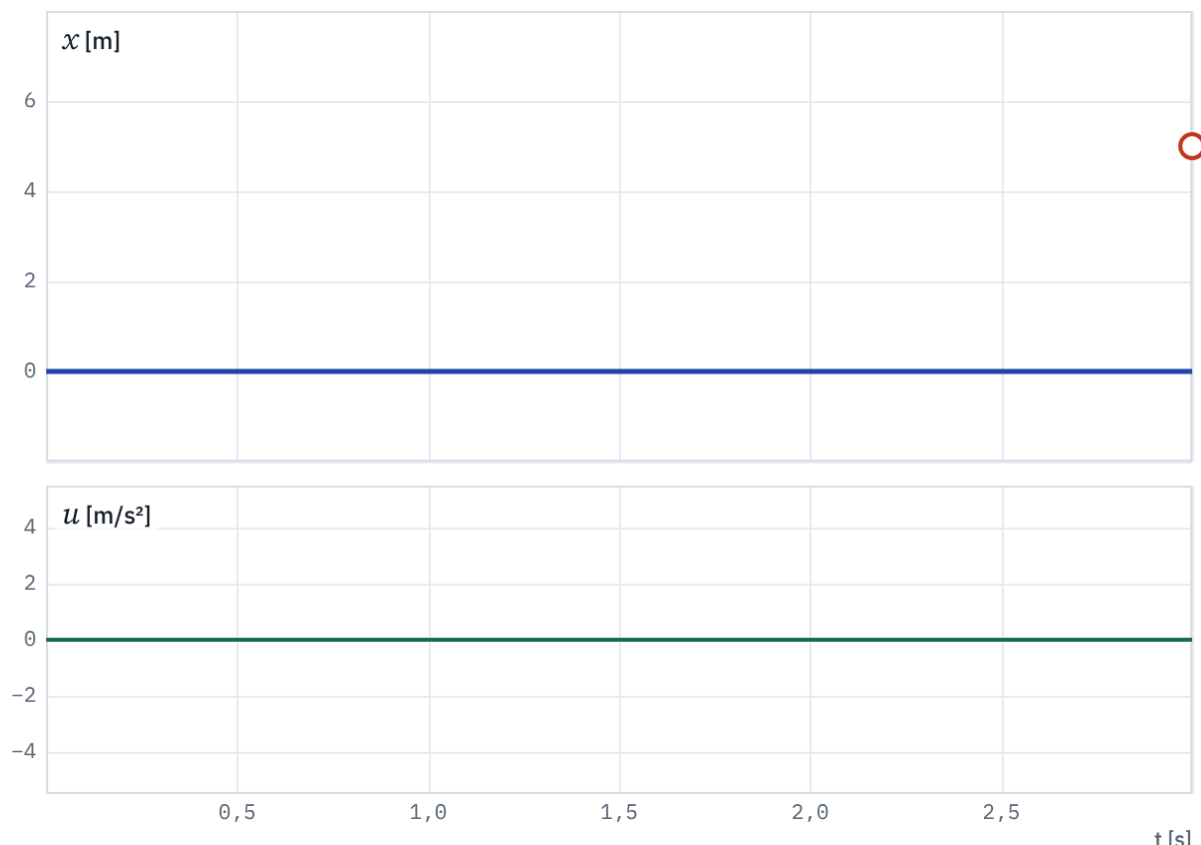
1. zgadnij brakujące wartości początkowe $\boldsymbol{\lambda}(0)$;
2. scałkuj równania stanu i kosztu do t_f (np. RK4, lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++);
3. zmierz chybiecie: różnicę między $\mathbf{x}(t_f)$ a celem;
4. popraw $\boldsymbol{\lambda}(0)$ metodą Newtona (jakobian chybiecia względem $\boldsymbol{\lambda}(0)$ z różnic skończonych) i wróć do 2.

Dla problemów liniowych (bez oporu) chybiecie jest liniową funkcją $\boldsymbol{\lambda}(0)$ i wystarczy jeden krok Newtona. Z oporem kwadratowym ($\dot{v} = u - cv|v|$) potrzeba kilku kroków. Przy większym oporze ($c \gtrsim 0,3$ 1/m w naszym zadaniu) już pierwszy krok Newtona, z zera albo z rozwiązania bez oporu, prowadzi do trajektorii, które eksplodują przed t_f : równania kosztu są niestabilne w przód.

Tewari pisze wprost, że proste strzały mają kłopoty ze zbieżnością. Ratunkiem są kontynuacja (rozwiązuj kolejno dla rosnącego c), strzały wielokrotne (przedział dzielony na kawałki) i metody kolokacyjne.

SYMULACJA 2

Zadanie minimalnej energii: z $(0, 0)$ do $(5 \text{ m}, 0)$ w 3 s, z oporem kwadratowym c . Zgadnij $\lambda_1(0)$ i $\lambda_2(0)$ suwakami albo naciskaj „Krok Newtona”. Przy $c = 0$ trafia jeden krok. Przy $c = 0,1$ kilka. Ustaw $c = 0,3$ i zacznij od zera: już pierwszy krok Newtona daje trajektorię, która eksploduje. Potem rozwiąż dla $c = 0,2$, a następnie zwiększ c do $0,25$ i kontynuuj.



— położenie $x(t)$ — cel: $x(3) = 5 \text{ m}, v(3) = 0$ — sterowanie $u(t) = -\lambda_2(t)$

chybienie $|x(3) - 5, v(3)|$ 5,000000

kroki Newtona 0

koszt $J = \frac{1}{2} \int u^2 dt$ 0,000

$u(0) = -\lambda_2(0)$ 0,000 m/s²

Zgadujemy brakujące warunki początkowe kostanu $\lambda(0)$, całkujemy w przód i patrzymy, o ile chybiliśmy celu. Newton poprawia zgadnięcie na podstawie tego, jak chybiecie zależy od $\lambda(0)$.

Stan na rysunku: $\dot{x} = v$, $\dot{v} = u - c \cdot v |v|$, $c = 0,10$; koszt $\frac{1}{2} \int u^2 dt$; $\lambda(0) = (0,000; 0,000)$; cel $x(3) = 5 \text{ m}, v(3) = 0$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

3 zadania · ok. 25 min

1 Dla $c = 0$ i celu $(5 \text{ m}, 0)$ w 3 s wyznacz λ_1 i $\lambda_2(0)$ z rozwiązania analitycznego zadania 2.2.

2 Wyprowadź równania kosztu dla $\dot{v} = u - cv|v|$ i $L = \frac{1}{2}u^2$.

3 Dlaczego człon $2c|v|\lambda_2$ w równaniu kosztu może prowadzić do eksplozji przy całkowaniu w przód?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

6 Przewodnik po rozdziale 2 Tewariego

Celem części V jest swobodne czytanie podręcznika A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*. Jego rozdział 2 („Optimal Control Techniques”) streszcza w 70 stronach to, co budowaliśmy przez cały kurs. Mapa:

Tewari	temat	u nas
2.2–2.3	optymalizacja wielu zmiennych, mnożniki Lagrange’a, ograniczenia nierównościowe	math 3.1 (ekstrema, mnożniki Lagrange’a), math 6.1 (wariacje)
2.4	sterowanie optymalne układu dynamicznego, warunki optymalności	ta lekcja, część 1–2
2.5	hamiltonian, zasada minimum, równanie HJB, LQ ze zmiennymi w czasie	części 2–3; lekcja 4.3
2.6	więzy na stan końcowy, równania Eulera–Lagrange’a	części 4–5
2.7	numeryka zadań brzegowych: strzały, kolokacja	część 5
2.10–2.11	procesy stochastyczne, filtr Kalmana	lekcje 4.4–4.5
2.12	odporne sterowanie LTI: LQG/LTR, H_2/H_∞	lekcja 5.2 LQG i odporność

Różnice w zapisie: Tewari pisze L dla kosztu bieżącego i φ dla końcowego, jak my; używa λ dla kosztu; zapisuje kod w MATLAB-ie (odpowiedniki w Pythonie w lekcji 4.3). Rozdział 3 (samolot), 4–5 (rakiety: naprowadzanie i orientacja) i 6–7 (statki kosmiczne) to kontynuacja w kursach dynamiki lotu i astronautyki.

☰ METODA: ZADANIE OPTYMALNE PRZEZ ZASADĘ MINIMUM

1. Sformułuj f , L , φ , $\mathcal{U}$, warunki brzegowe, czy t_f jest wolne.
2. Hamiltonian $H = L + \lambda^T f$; równania kosztu $\dot{\lambda} = -H_x$.
3. Minimalizuj H po u : wewnątrz ($H_u = 0$) albo brzeg $\mathcal{U}$ (bang-bang).
4. Warunki brzegowe dla λ (transwersalność, $H = 0$ przy wolnym t_f).
5. Rozwiąż zadanie brzegowe: analitycznie w prostych przypadkach, numerycznie strzałami lub kolokacją; sprawdź, czy wynik jest minimum (porównaj z innymi trajektoriami).

Przykład 7.1

Najszybciej o 5 m w górę

$\ddot{x} = u$, $|u| \leq 9,81 \text{ m/s}^2$, $z(0, 0)$ do $(5, 0)$. Wyznacz sterowanie i czas.

- 1 $H = 1 + \lambda_1 v + \lambda_2 u$, $u = -U \text{ sign } \lambda_2$, λ_2 liniowe: jedno przełączenie.
- 2 Start poniżej krzywej przełączeń ($x - 5 < 0$ względem celu): najpierw $+U$.
- 3 Symetria: przełączenie w $t_1 = \sqrt{h/U} = 0,714 \text{ s}$ na wysokości 2,5 m przy $v = 7,0 \text{ m/s}$.

Wynik: $T^* = 1,428 \text{ s}$; $u = +g$ do 0,714 s, potem $-g$.

Sprawdzenie: H ma być równe zero (wolne t_f): λ_1, λ_2 dobrane tak, że $1 + \lambda_1 v + \lambda_2 u = 0$ w każdej chwili ✓ (zadanie do przemyślenia 1); symulacja 1 daje ten sam czas ✓.

Przykład 7.2

Strzały z kontynuacją

Minimalna energia $\frac{1}{2}fu^2$, $0 \rightarrow 5 \text{ m}$ w 3 s , opór $c = 0,2 \text{ 1/m}$. Znajdź $\lambda(0)$.

- 1 $c = 0$: $\lambda(0) = (-2,222; -3,333)$ (analitycznie).
- 2 $c = 0,1$ startując stąd: 3 kroki Newtona (chybienie $0,94 \rightarrow 0,013 \rightarrow 2 \cdot 10^{-6} \rightarrow 10^{-12}$), $\lambda(0) = (-2,411; -3,404)$.
- 3 $c = 0,2$ startując z $c = 0,1$: 5 kroków, $\lambda(0) = (-2,953; -3,600)$.
- 4 $c = 0,3$ bezpośrednio: trajektorie eksplodują już przy pierwszym zgadnięciu; potrzebne mniejsze kroki kontynuacji albo strzały wielokrotne.

Wynik: przy oporze sterowanie startuje mocniej ($u(0) = 3,60$ zamiast $3,33 \text{ m/s}^2$), żeby zrekompensować opór.

Sprawdzenie: zbieżność kwadratowa Newtona (liczba poprawnych cyfr podwaja się w każdym kroku) ✓.

8

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Optymalne sterowanie jest gładkie.”

Przy kosztach liniowych w u (czas, paliwo) optimum leży na granicach: bang-bang.

× „Zasada minimum daje rozwiązanie.”

Daje warunki konieczne i zadanie brzegowe. Rozwiązać je trzeba osobno, często numerycznie, i nie zawsze się udaje.

× „Kostan to sztuczka matematyczna bez znaczenia.”

Kostan to wrażliwość optymalnego kosztu na stan: cena cienia. W LQR $\lambda = P\mathbf{x}$.

× „Metoda strzałów zawsze zbiega, jeśli zadanie ma rozwiązanie.”

Nie: kostan bywa niestabilny w przód, a zgadnięcie musi być bliskie. Kontynuacja i strzały wielokrotne to standard.

× „Sterowanie optymalne zastępuje sprzężenie zwrotne.”

Trajektorię optymalną liczy się zwykle z góry (w pętli otwartej), a regulator ze sprzężeniem prowadzi obiekt wzdłuż niej (Tewari 2.9).

9 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Kostan w zadaniu czasooptymalnym.** Dla przykładu 7.1 wyznacz λ_1 i $\lambda_2(t)$ z warunków $H = 0$ i przełączenia w $t_1 = 0,714$ s.

- 2 **Minimalne paliwo.** $\ddot{x} = u$, $|u| \leq U$, $L = |u|$, zadany czas T dłuższy od minimalnego. Jak wygląda sterowanie?

- 3 **Goddard.** Rakieta pionowa w atmosferze: jak rozłożyć paliwo, żeby osiągnąć maksymalną wysokość? Dlaczego intuicja „pełny ciąg od startu” może być zła?

- 4 **Bellman kontra Pontriagin.** Programowanie dynamiczne daje funkcję wartości $V(\mathbf{x}, t)$ dla każdego stanu, zasada minimum tylko jedną trajektorię. Co jest praktyczniejsze dla drona o 12 stanach?

- 5 **Czas wolny i warunek $H = 0$.** Dlaczego przy wolnym czasie końcowym (i H niezależnym od czasu) H musi być zerem, a nie dowolną stałą?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

10 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jak wygląda hamiltonian?

$$H = L + \lambda^T f.$$

2 Jakie równanie spełnia kosztan?

$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial \mathbf{x}.$$

3 Co mówi zasada minimum o sterowaniu?

W każdej chwili $\mathbf{u}^*$ minimalizuje H po dopuszczalnych sterowaniach.

4 Skąd LQR w tym języku?

$H_{\mathbf{u}} = 0$ daje $\mathbf{u} = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}$, a $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = P\mathbf{x}$ daje równanie Riccatiego.

5 Dlaczego sterowanie czasooptymalne jest bang-bang?

H jest liniowy w u , więc minimum leży na brzegu $|u| = U$.

6 Ile przełączeń ma czasooptymalny podwójny integrator?

Najwyżej jedno, bo $\lambda_2(t)$ jest liniowe.

7 Na czym polega metoda strzałów?

Zgadnij $\boldsymbol{\lambda}(0)$, scałkuj, zmierz chybiecie celu, popraw Newtonem.

ZASADA MINIMUM

$$J = \varphi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L \, dt, \quad H = L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathcal{U}} H$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \varphi_{\mathbf{x}} \text{ (stan końcowy wolny); } H \equiv 0 \text{ (} t_f \text{ wolne)}$$

$$\text{LQR: } \boldsymbol{\lambda} = P\mathbf{x}, \quad -\dot{P} = A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q$$

BANG-BANG I STRZAŁY

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq U: u = -U \operatorname{sign}\left(x + \frac{v|v|}{2U}\right)$$

$$\text{spoczynek-spoczynek: } T^* = 2\sqrt{h/U}$$

$$\text{min. energia: } x = h(3s^2 - 2s^3), \quad J = 6h^2/T^3$$

$$\text{strzały: } \boldsymbol{\lambda}_0 \leftarrow \boldsymbol{\lambda}_0 - J_F^{-1} F(\boldsymbol{\lambda}_0)$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, rozdz. 2.4–2.7 (teraz da się czytać bez zatrzymywania).
- **Dla chętnych:** D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction* (Dover), bardzo przystępny; A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control*, klasyka z przykładami lotniczymi.

Zostało jedno pytanie, które wisi nad całą częścią IV: LQR ma gwarantowany zapas fazy 60° , filtr Kalmana jest optymalny. Czy ich połączenie, regulator LQG, jest odporny na błędy modelu? Odpowiedź z 1978 r. zaskoczyła wszystkich i zmieniła kierunek rozwoju automatyki. To temat ostatniej lekcji.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\mathbf{x} = [x, v]$, $f = [v, u]$, $L = 1$, $|u| \leq g$; $\mathbf{x}(0) = [0, 0]$, $\mathbf{x}(t_f) = [5, 0]$, t_f wolne (minimalizowane).
2. Zużycie paliwa rakiety jest proporcjonalne do ciągu (wydatek masowy $\dot{m} = T/v_e$), a nie do jego kwadratu. Koszt u^2 (energia) prowadzi do gładkich sterowań, koszt $|u|$ do sterowań typu „pełny ciąg albo nic”.

Zadania • część 2

1. $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 v + \lambda_2 u$. $\dot{\lambda}_1 = -\partial H/\partial x = 0$, $\dot{\lambda}_2 = -\partial H/\partial v = -\lambda_1$. Minimum: $u = -\lambda_2$.
2. $u = -\lambda_2(t)$ jest liniowe w t , więc v jest kwadratowe, a x sześciennne. Przejście z $(0, 0)$ do $(5 \text{ m}, 0)$ w 3 s: $x = 5(3s^2 - 2s^3)$, $s = t/3$, $u = \frac{30}{9}(1 - 2s)$: od 3,33 do -3,33 m/s².
3. $\dot{H} = H_x \dot{\mathbf{x}} + H_\lambda \dot{\boldsymbol{\lambda}} + H_u \dot{\mathbf{u}} = H_x f + f^T(-H_x^T) + 0 = 0$. To odpowiednik zasady zachowania energii w mechanice Hamiltona.

Zadania • część 3

1. $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{P}\mathbf{x} + P\dot{\mathbf{x}} = \dot{P}\mathbf{x} + P(A - BR^{-1}B^T P)\mathbf{x}$. Z drugiej strony $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T P\mathbf{x}$. Porównując: $\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^T P + Q + A^T P = 0$.
2. Stan końcowy wolny, $\varphi = 0$: $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$, więc $P(t_f) = 0$. Wzmocnienie $K = R^{-1}B^T P$ spada do zera pod koniec: regulator „odpuszcza”, bo po t_f nic się nie liczy. Daleko od końca P jest bliskie rozwiązaniu algebraicznemu.

Zadania • część 4

1. $T^* = 2\sqrt{20/9,81} = 2,86 \text{ s}$; $v_{\max} = g \cdot 1,43 = 14,0 \text{ m/s}$. Czterokrotna wysokość, dwukrotny czas.
2. Ze stałym $u = -U \text{ sign } v$ ruch spełnia $v^2 = 2U|x|$ i musi zmierzać do zera: dla $v > 0$ jest $x < 0$ i $x = -v^2/(2U)$, dla $v < 0$ jest $x = v^2/(2U)$. Razem: $x = -v|v|/(2U)$.
3. W idealnym modelu przełącza się raz i trafia. Przy błędach modelu, szumie i próbkowaniu wokół celu przełącza się bardzo często (jak sterowanie ślizgowe z lekcji 4.6), jest wrażliwy na błąd modelu U i na szum. W praktyce stosuje się go daleko od celu, a w pobliżu przełącza na regulator liniowy (tzw. sterowanie dwufazowe), albo „zaokrągła” krzywą (np. regulator PTOS).

Zadania • część 5

1. $u(t) = -\lambda_2(0) + \lambda_1 t = \frac{30}{9} - \frac{60}{27}t$; $\lambda_2(0) = -3,333$, $\lambda_1 = -2,222$. Koszt $J = 6h^2/T^3 = 5,56 \text{ (m}^2/\text{s}^3)$.
2. $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 v + \lambda_2(u - cv|v|)$; $\partial(v|v|)/\partial v = 2|v|$. $\dot{\lambda}_1 = 0$, $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + 2c|v|\lambda_2$, $u = -\lambda_2$.
3. To człon wzrostu wykładniczego z szybkością $2c|v|$. Jeśli zgadnięte λ_2 jest za duże co do modułu, sterowanie $u = -\lambda_2$ rozpędza drona, $|v|$ rośnie, a to przyspiesza wzrost $|\lambda_2|$. Sprzężenie dodatnie kończy się wybuchem w skończonym czasie. Typowe dla kosztów: są „stabilne wstecz”, a niestabilne w przód.

Zadania do przemyślenia

1. 1. $\lambda_2 = \lambda_2(0) - \lambda_1 t$ ma zero w t_1 : $\lambda_2(0) = \lambda_1 t_1$. W $t = 0$: $v = 0, u = U, H = 1 + \lambda_2(0)U = 0$, więc $\lambda_2(0) = -1/U = -0,102$.
2. $\lambda_1 = \lambda_2(0)/t_1 = -0,143$. Sprawdzenie w t_1 : $H = 1 + \lambda_1 v_{\max} + 0 = 1 - 0,143 \cdot 7,0 = 0 \checkmark$.
2. 1. $H = |u| + \lambda_1 v + \lambda_2 u$. Minimum: $u = -U \operatorname{sign} \lambda_2$, gdy $|\lambda_2| > 1$; $u = 0$, gdy $|\lambda_2| < 1$.
2. Wynik: pełny ciąg, swobodny lot (bez ciągu), pełne hamowanie (ang. *bang-off-bang*). Tak wyglądają manewry orbitalne: krótkie impulsy i długie fazy lotu bez napędu (Hohmann w kursie astronautyki).
3. 1. Pełny ciąg przy gęstym powietrzu daje dużą prędkość i ogromny opór (rosnący z v^2), czyli straty energii. Opłaca się czasem lecieć wolniej w gęstej atmosferze.
2. Rozwiązanie optymalne zawiera łuk osobliwy (ang. *singular arc*): pośredni ciąg utrzymujący „optymalną” prędkość, gdy H nie zależy od u (Tewari 2.8.1). To klasyczny problem Goddarda z 1919 r.
4. 1. Programowanie dynamiczne daje gotowe sprzężenie zwrotne $u(\mathbf{x})$, ale wymaga funkcji na przestrzeni 12-wymiarowej: siatka 10 punktów na wymiar to 10^{12} węzłów (przekleństwo wymiarowości).
2. Zasada minimum i metody bezpośrednie liczą jedną trajektorię, tanio, a sprzężenie zwrotne wokół niej daje LQR (linearyzacja wzdłuż trajektorii). Tak robi się to w praktyce, także w MPC (sterowaniu predykcyjnym).
5. 1. Wydłużenie czasu o δt_f zmienia koszt o $H(t_f) \delta t_f$ (o tyle, ile kosztuje bieżąca chwila plus efekt przesunięcia końca). W optimum ta zmiana musi być zerowa dla dowolnego δt_f .
2. Stąd $H(t_f) = 0$, a ponieważ H jest stałe wzdłuż trajektorii (zadanie 2.3), $H \equiv 0$.

Automatyka · Lekcja 5.1: Zasada maksimum i metoda strzałów · Źródła: A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets* (Wiley 2011), rozdz. 2; L. S. Pontriagin, W. G. Bol'tianski, R. W. Gamkrelidze, E. F. Mischenko, *Matematyczna teoria procesów optymalnych* (1961, ang. 1962); D. E. Kirk, *Optimal Control Theory* (1970); A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control* (1975). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c5_1.py).