

Stabilność Lapunowa i sterowanie nieliniowe

Lekcja dla chętnych. Wszystko, co dotąd robiliśmy, opierało się na linearyzacji: bieguny, transmitancje, LQR i filtr Kalmana opisują układ w okolicy punktu pracy. Ta lekcja wychodzi poza tę okolicę. Pokazuje, jak udowodnić stabilność bez rozwiązywania równań, jak skasować nieliniowość sprzężeniem zwrotnym i jak zbudować regulator, któremu nieznane zakłócenie nie przeszkadza. To przegląd. Każdy z tematów ma osobne podręczniki, a celem jest rozpoznanie ich w literaturze, choćby u Tewariego.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

11 zadań w treści
+ 4 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. K. Khalil,
Nonlinear Systems,
rozdz. 4, 13, 14; J.-
J. Slotine, W. Li,
*Applied Nonlinear
Control*, rozdz. 3,
6, 7; A. Tewari,
*Advanced Control
of Aircraft,
Spacecraft and
Rockets*, dodatek B

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: stabilność bez rozwiązywania
- 1 Funkcja Lapunowa
- 2 Lapunow dla układów liniowych
- 3 Linearyzacja przez sprzężenie
- 4 Sterowanie ślizgowe
- 5 Metoda i przykłady rozwiązane
- 6 Błędne intuicje
- 7 Zadania do przemyślenia
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Prolog: stabilność bez rozwiązywania

W 1892 r. Aleksandr Lapunow obronił w Moskwie rozprawę „Ogólny problem stateczności ruchu”. Wyszedł od obserwacji z mechaniki: jeśli energia układu ciągle maleje, a jest najmniejsza w punkcie równowagi, to układ musi do tej równowagi zmierzać, jakkolwiek skomplikowane byłyby jego równania. Nie trzeba znać trajektorii, wystarczy znaleźć funkcję podobną do energii i sprawdzić, że maleje.

Przez pół wieku praca była prawie nieznana na Zachodzie. Gdy w latach 50. i 60. automatyka zderzyła się z nieliniowymi problemami rakiet i statków kosmicznych, metoda Lapunowa stała się podstawą całej teorii sterowania nieliniowego.

Pytanie na start. Wahadło z tarciem puszczane z kąta 143° . Wiadomo, że kiedyś się zatrzyma na dole. Czy da się to udowodnić bez rozwiązywania równania $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - c\dot{\theta}$, którego nie da się rozwiązać w funkcjach elementarnych? Odpowiedź w części 1.

Funkcja Lapunowa

🔧 TWIERDZENIE LAPUNOWA (WERSJA PRAKTYCZNA)

Punkt równowagi $\mathbf{x} = 0$ układu $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Jeśli istnieje funkcja $V(\mathbf{x})$ taka, że $V(0) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq 0$ (w pewnym otoczeniu) oraz

$$\dot{V} = \nabla V \cdot f(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{dla } \mathbf{x} \neq 0,$$

to równowaga jest asymptotycznie stabilna. Gdy $\dot{V} \leq 0$, jest stabilna (trajektorie nie uciekają).

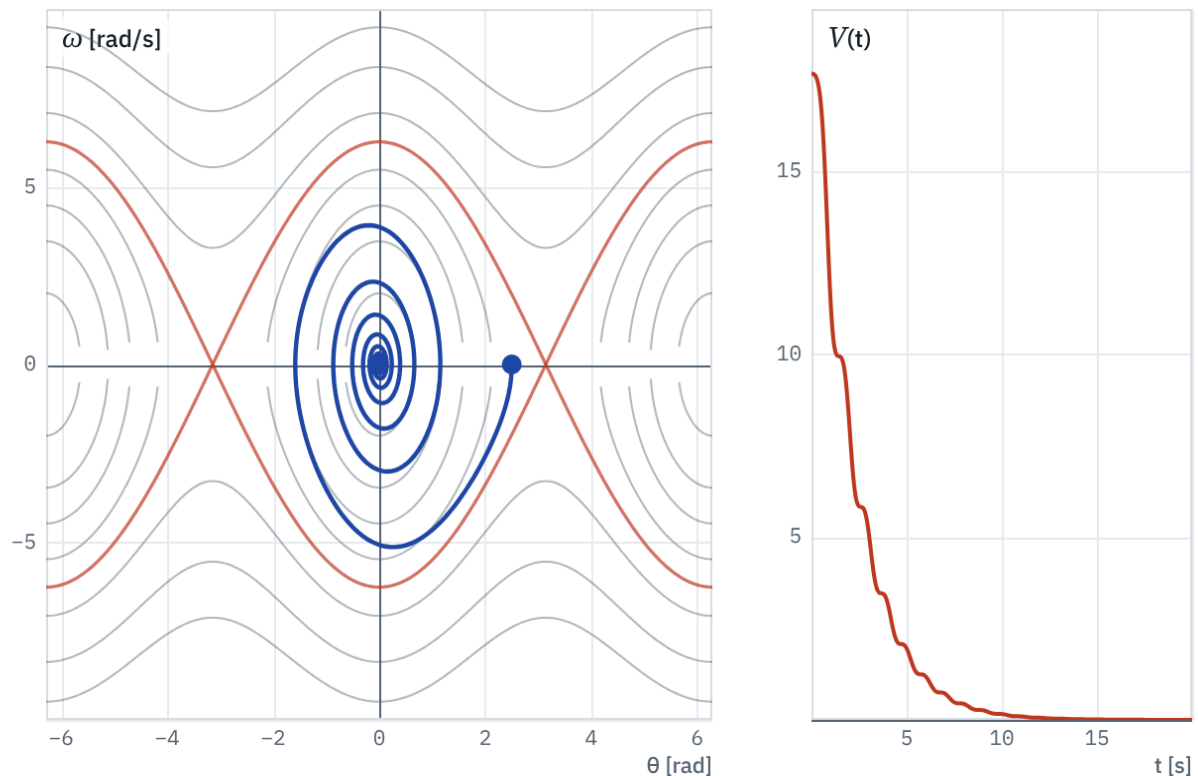
Klucz: $\dot{V}$ liczymy z równania ruchu, bez jego rozwiązywania. Odpowiedź na pytanie z prologu. Dla wahadła z tarciem weźmy energię (na jednostkę mL^2): $V = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos \theta)$. Wtedy

$$\dot{V} = \omega\dot{\omega} + \frac{g}{L} \sin \theta \omega = \omega \left(-\frac{g}{L} \sin \theta - c\omega \right) + \frac{g}{L} \omega \sin \theta = -c\omega^2 \leq 0.$$

Energia nigdy nie rośnie, więc wahadło nie ucieknie z obszaru $V < V(0)$. $\dot{V}$ jest zerowe tylko chwilowo (gdy $\omega = 0$ w punkcie zwrotnym), a jedynym miejscem, gdzie wahadło może zostać na stałe z $\omega = 0$, jest równowaga. Zasada LaSalle'a formalizuje ten krok i daje asymptotyczną stabilność. Z kąta 143° ($V = 17,7$) wahadło nie przejdzie przez górę, bo to wymaga $V > 2g/L = 19,6$: zatrzyma się na dole.

SYMULACJA 1

Portret fazowy wahadła (lekcja 4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność) z poziomiami energii. Czerwona poziomicą to separatrysa $V = 2g/L$. Z tarciem trajektoria przecina poziomice tylko do środka, a $V(t)$ maleje. Wyzeruj tarcie: trajektoria biegnie po jednej poziomicy. Daj dużą prędkość początkową: wahadło przechodzi przez górę i kończy w innym minimum.



— poziomice $V = \frac{1}{2}\omega^2 + (g/L)(1 - \cos \theta)$ — trajektoria — $V(t)$

$V(0)$ 17,67 1/s²

$V(20\text{ s})$ 0,001

próg przejścia przez górę $2g/L$ 19,62

pełnych obrotów 0

Z tarciem $\dot{V} = -c\omega^2 \leq 0$: trajektoria przecina poziomice tylko do środka. Bez rozwiązywania równania wiemy, że wahadło nie ucieknie z obszaru $V < V(0)$.

Stan na rysunku: $\ddot{\theta} = -(g/L) \sin \theta - c\dot{\theta}$; $g/L = 9,81\text{ 1/s}^2$, $c = 0,50\text{ 1/s}$, $\theta_0 = 143^\circ$, $\omega_0 = 0,00\text{ rad/s}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

1 Dla $\dot{x} = -x^3$ pokaż stabilność funkcją $V = x^2$. Dlaczego linearyzacja tu nic nie mówi?

2 Jaka prędkość początkowa na dole wystarcza wahadłu bez tarcia, żeby przejść przez górę ($g/L = 9,81\text{ 1/s}^2$)?

- 3 Dla wahadła bez tarcia $\dot{V} = 0$. Co twierdzenie mówi o stabilności dolnej równowagi? Co o górnej?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Lapunow dla układów liniowych

Dla $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ naturalna jest funkcja kwadratowa $V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ z P dodatnio określonym. Wtedy $\dot{V} = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x}$. Wystarczy, żeby

$$A^T P + P A = -Q, \quad Q \succ 0.$$

To **równanie Lapunowa**: liniowe względem P . Dla stabilnego A ma ono zawsze jedno rozwiązanie, i to dodatnio określone; dla niestabilnego zwykle też ma rozwiązanie, ale nie dodatnio określone. Ta sama macierz pojawiła się w LQR: koszt pętli zamkniętej $\int \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} dt = \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0$ (lekcja 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów). Funkcja Lapunowa jest tu kosztem „od teraz do nieskończoności”.

Praktyczne zastosowanie: funkcja Lapunowa z linearyzacji pozwala oszacować **obszar przyciągania** układu nieliniowego, czyli największą poziomice V , wewnątrz której $\dot{V} < 0$ także dla pełnego, nieliniowego modelu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Pętla PD wysokości: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2,8 \end{bmatrix}$. Rozwiąż $A^T P + P A = -I$.

- 2 Dlaczego dla niestabilnego A równanie Lapunowa nie może mieć rozwiązania $P \succ 0$?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Linearyzacja przez sprzężenie

Linearyzacja w punkcie pracy przybliża model. **Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne** (ang. *feedback linearization*) robi coś mocniejszego: sterowaniem dokładnie kasuje nieliniowość, tak że z punktu widzenia nowego wejścia v obiekt jest liniowy w całym zakresie pracy.

Przykład z każdego kontrolera lotu: dron przechylony o kąt φ ma pionową składową ciągu $T \cos \varphi$. Pionowo: $m\ddot{z} = T \cos \varphi - mg$. Jeśli regulator wysokości liczy żądane przyspieszenie v (np. PID z lekcji 3.1), to ciąg

$$T = \frac{m(g + v)}{\cos \varphi}$$

daje dokładnie $\ddot{z} = v$ przy każdym przechyleniu. Bez tego członu przechylony dron opada: przy 30° pionowe przyspieszenie spada o $g(1 - \cos 30^\circ) = 1,31 \text{ m/s}^2$, a regulator dowiadyuje się o tym dopiero z uchybu.

Warunki i ograniczenia: trzeba znać model (masa, $\cos \varphi$), a podział przez $\cos \varphi$ wymaga $|\varphi| < 90^\circ$ i zapasu ciągu (przy 45° potrzeba 1,41 razy więcej). Przy niedokładnym modelu kasowanie jest niedokładne, a resztę musi poprawić pętla.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Ile razy większy ciąg potrzebny jest do zawisu przy przechyleniu 10° , 30° , 45° ?

- 2 Wahadło sterowane momentem: $mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta + \tau$. Zaproponuj τ , które daje $\ddot{\theta} = v$.

- 3 Dlaczego linearyzacja przez sprzężenie jest ryzykowna, gdy obiekt ma zero w prawej półpłaszczyźnie (lekcja 2.2)?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

4 Sterowanie ślizgowe

Co, jeśli modelu nie znamy dokładnie, ale wiemy, że zakłócenie jest ograniczone: $|d| \leq D$?

Sterowanie ślizgowe (ang. *sliding mode control*) robi dwie rzeczy. Wybiera **powierzchnię ślizgu**, na której ruch jest taki, jak chcemy, np. dla $\ddot{x} = u + d$:

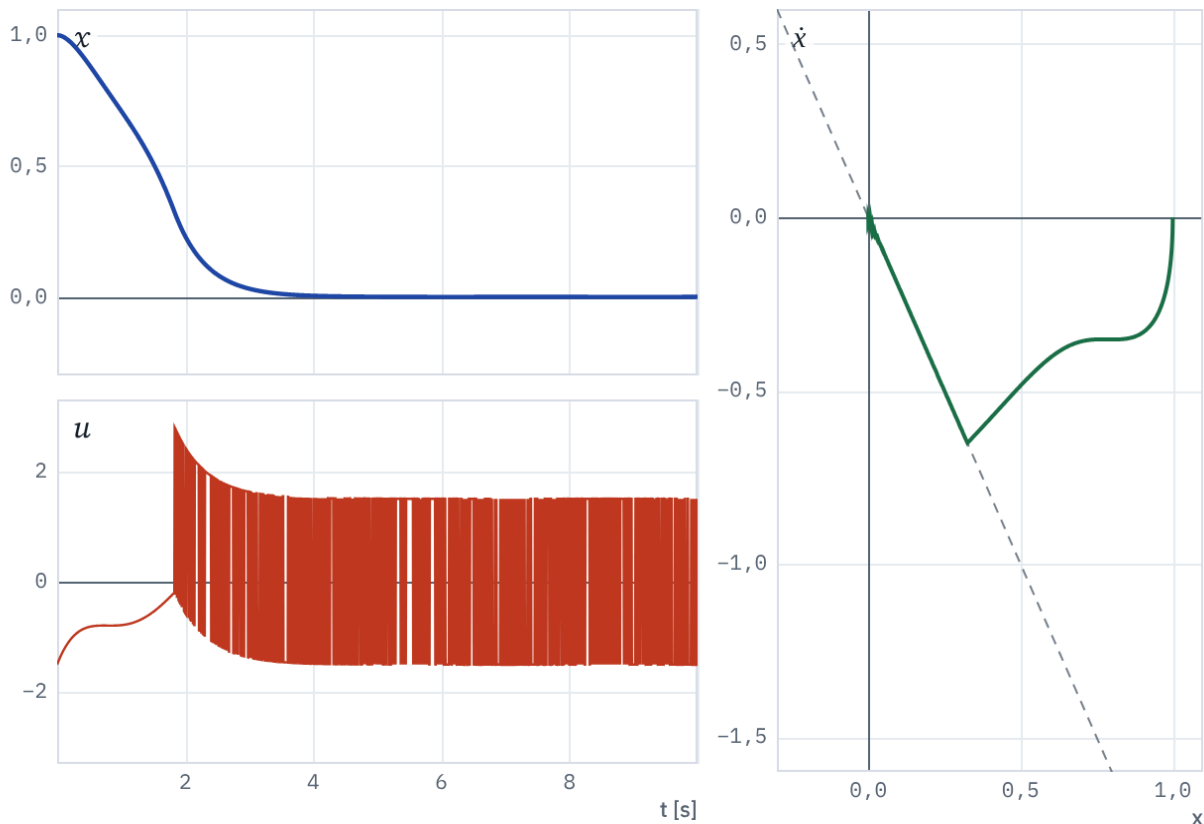
$$s = \dot{x} + \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_r) e^{-\lambda(t-t_r)} \quad (t \geq t_r, t_r \text{ — chwila dojścia do powierzchni}).$$

Potem buduje sterowanie, które sprowadza stan na tę powierzchnię i tam trzyma, cokolwiek robi zakłócenie: $u = -\lambda\dot{x} - k \text{sign}(s)$ z $k > D$. Uzasadnienie przez Lapunowa: dla $V = \frac{1}{2}s^2$ jest $\dot{V} = s\dot{s} = s(d - k \text{sign } s) \leq -(k - D)|s| < 0$. Stąd też oszacowanie czasu dojścia: co najwyżej $|s_0|/(k - D)$.

Na powierzchni sterowanie przełącza się nieskończenie szybko między $\pm k$ i w średniej dokładnie kasuje zakłócenie. W praktyce przełączanie z częstotliwością próbkowania to **drżania sterowania** (ang. *chattering*): niszczą siłowniki i pobudzają niemodelowane rezonanse. Typowe lekarstwo to warstwa przejściowa: $\text{sign}(s) \rightarrow \text{sat}(s/\varepsilon)$. Drżania znikają, a błąd zostaje ograniczony, ale już nie zerowy (rzędu ε/λ).

SYMULACJA 2

Podwójny integrator $\ddot{x} = u + d$ z nieznanym zakłóceniem $d = 0,8 \sin 2t$, start $x = 1$. Porównaj PD (te same bieguny co PD wysokości z lekcji 2.2) ze sterowaniem ślizgowym. Zmniejsz k poniżej amplitudy zakłócenia. Włącz warstwę ε i patrz na sterowanie.



— położenie $x(t)$ — sterowanie $u(t)$ — płaszczyzna fazowa i prosta $s = 0$

największe $|x|$ w 5–10 s 0,0006

przełączeń sterowania na sekundę 1076

warunek $k > \max|d|$ spełniony

Na prostej $s = 0$ ruch to $\dot{x} = -\lambda x$, niezależnie od zakłócenia. Cena: sterowanie przełącza się w każdym kroku obliczeń, tu ok. 1000 razy na sekundę (ang. chattering), co niszczy silniki i pobudza niemodelowane drgania.

Stan na rysunku: $\ddot{x} = u + d$, $d = 0,80 \sin 2t$, $s = \dot{x} + 2x$, $u = -2\dot{x} - k \operatorname{sign}(s)$, $k = 1,50$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Start $x = 1$, $\dot{x} = 0$, $\lambda = 2$, $k = 1,5$, $D = 0,8$. Oszacuj czas dojścia do powierzchni ślizgu.

- 2 PD $u = -4x - 2,8\dot{x}$ z tym samym zakłóceniem: jaka amplituda drgań ustalonych? (Policz $\left| \frac{1}{(j\omega)^2 + 2,8j\omega + 4} \right|$ dla $\omega = 2$.)

- 3 Dlaczego ruch na powierzchni ślizgu nie zależy od zakłócenia, a ruch PD tak?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: KIEDY LINIOWE JUŻ NIE WYSTARCZA

1. **Sprawdź zakres:** jeśli punkt pracy się zmienia, ale powoli i mierzalnie, wystarczy gain scheduling (lekcja 3.3).
2. **Znana nieliniowość** (grawitacja, $\cos \varphi$, aerodynamika z modelu): linearyzacja przez sprzężenie plus liniowa pętla na resztę.
3. **Nieznane, ale ograniczone zakłócenia:** sterowanie ślizgowe z warstwą przejściową.
4. **Dowód stabilności:** funkcja Lapunowa (energia, $\frac{1}{2}s^2$, $\mathbf{x}^T P \mathbf{x}$).
5. **Sprawdzenie:** symulacja nieliniowa z błędami modelu, opóźnieniem i próbkowaniem.

Przykład 5.1

Wahadło z 143°

$g/L = 9,81 \text{ 1/s}^2$, $c = 0,5 \text{ 1/s}$, start $\theta_0 = 2,5 \text{ rad}$, $\omega_0 = 0$. Co wiemy bez rozwiązywania?

- 1 $V(0) = 9,81(1 - \cos 2,5) = 17,67 < 2g/L = 19,62$: wahadło nie przejdzie przez górę.
- 2 $\dot{V} = -0,5\omega^2 \leq 0$, a LaSalle daje zbieżność do $\theta = 0$.
- 3 Symulacja: V w kolejnych sekundach 17,7; 11,5; 8,0; 5,2; 3,2; 2,0, po 20 s prawie zero.

Wynik: wahadło zatrzyma się na dole, bez żadnej trajektorii w ręku.

Sprawdzenie: symulacja 1 z tymi ustawieniami ✓.

Przykład 5.2

Kompensacja przechylenia w dronie

Dron 1 kg leci w bok z przechyleniem 30° , regulator wysokości żąda $v = 0$. Porównaj ciąg mg i ciąg z linearyzacji przez sprzężenie.

- 1 Ciąg $mg = 9,81$ N: pionowa składowa $9,81 \cos 30^\circ = 8,50$ N, dron przyspiesza w dół $1,31 \text{ m/s}^2$.
- 2 Ciąg $mg / \cos 30^\circ = 11,33$ N: pionowa składowa dokładnie $9,81$ N, wysokość stała.

Wynik: jedna linijka (dzielenie przez $\cos \varphi$) usuwa zakłócenie, które regulator liniowy musiałby zbijać uchybem.

Sprawdzenie: przy $\varphi = 0$ wzór daje zwykły ciąg zawisu ✓.

6 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Jeśli nie umiem znaleźć funkcji Lapunowa, układ jest niestabilny.”

Twierdzenie daje warunek wystarczający. Brak funkcji to brak dowodu, nie dowód niestabilności.

× „Linearyzacja w punkcie pracy i linearyzacja przez sprzężenie to to samo.”

Pierwsza przybliża model, druga kasuje nieliniowość sterowaniem i działa w całym zakresie, o ile model jest dokładny.

× „Sterowanie ślizgowe jest odporne na wszystko.”

Tylko na zakłócenia dopasowane do wejścia (wchodzące tam, gdzie sterowanie) i ograniczone przez k . Płaci się drganiem sterowania albo warstwą z niezerowym błędem.

× „Układ nieliniowy zawsze wymaga regulatora nieliniowego.”

Większość dronów i samolotów lata na regulatorach liniowych z harmonogramem nastaw. Nieliniowe metody stosuje się tam, gdzie te nie wystarczają.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

4 zadania · ok. 1 godzina

- 1 **Rozhuśtanie wahadła.** Chcemy rozhuścić wahadło z dołu do góry ograniczonym momentem. Zaproponuj prawo sterowania oparte na energii. Wskazówka: $\dot{V} = \omega\tau/(mL^2)$ (bez tarcia).
- 2 **Lapunow dla orientacji satelity.** Satelita obraca się z prędkością ω ; energia kinetyczna obrotu $\frac{1}{2}\omega^T J \omega$. Zaproponuj moment sterujący, który na pewno wytraca obrót.
- 3 **Ślizg z próbkowaniem.** Sterowanie ślizgowe liczone co $T = 1$ ms. Ile wynosi w przybliżeniu amplituda drgań s wokół zera? (Między próbkami $\dot{s} \approx \pm k$.)
- 4 **Obszar przyciągania.** Odwrócone wahadło z regulatorem liniowym zaprojektowanym w pobliżu pionu. Opisz, jak funkcją Lapunowa z równania Lapunowa oszacować, z jak dużego wychylenia regulator na pewno wróci.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Co mówi twierdzenie Lapunowa?**
Jeśli istnieje $V > 0$ z $\dot{V} < 0$ poza równowagą, równowaga jest asymptotycznie stabilna.
- 2 **Jaka funkcja Lapunowa pasuje do wahadła z tarciem?**
Energia: $V = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos \theta)$, $\dot{V} = -c\omega^2$.
- 3 **Co to równanie Lapunowa?**
 $A^T P + P A = -Q$; dodatnio określone P istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest stabilna.

4 Na czym polega linearyzacja przez sprzężenie?

Na skasowaniu znanej nieliniowości sterowaniem, np. $T = m(g + v)/\cos \varphi$.

5 Jak działa sterowanie ślizgowe?

Sprowadza stan na powierzchnię $s = 0$ i trzyma go tam przełączaniem $\pm k$ z $k > |d|$.

6 Co to chattering i jak go ograniczyć?

Szybkie przełączanie sterowania; warstwa przejściowa $\text{sat}(s/\varepsilon)$.

LAPUNOW

$V > 0, \dot{V} = \nabla V \cdot f < 0 \rightarrow$ asymptotycznie stabilny

wahadło: $V = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos \theta), \dot{V} = -c\omega^2$

liniowy: $A^T P + P A = -Q$

STEROWANIE NIELINIOWE

dron: $T = m(g + v)/\cos \varphi$

ślizg: $s = \dot{x} + \lambda x, u = -\lambda \dot{x} - k \operatorname{sign} s, k > D$

czas dojścia $\leq |s_0|/(k - D)$; warstwa: błąd $\sim \varepsilon/\lambda$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo (dla chętnych):** J.-J. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, rozdz. 3 (Lapunow) i 7 (sterowanie ślizgowe), bardzo przystępne.
- **Dalej:** H. K. Khalil, *Nonlinear Systems* (standardowy podręcznik); A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, dodatek B (stabilność Lapunowa w zwęższej formie).

To koniec części IV. Część V jest mostem do podręcznika Tewariego: sterowanie optymalne w ogólnej postaci (zasada maksimum Pontriagina, która daje LQR jako przypadek szczególny i sterowanie czasooptymalne jako inny) oraz pytanie, które wisi nad całą częścią IV: co się dzieje z odpornością, gdy LQR połączymy z filtrem Kalmana.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\dot{V} = 2x\dot{x} = -2x^4 < 0$ dla $x \neq 0$: asymptotycznie stabilny. Linearyzacja w zerze daje $\dot{x} = 0$ (biegun w zerze), czyli przypadek graniczny, z którego nic nie wynika.
2. $\frac{1}{2}\omega_0^2 > 2\frac{g}{L}$: $\omega_0 > 2\sqrt{g/L} = 6,26$ rad/s. Z tarciem trzeba więcej (z $c = 0,5$ nawet 6,5 rad/s nie wystarczy).
3. Dolna: $V > 0$ wokół niej i $\dot{V} = 0$, więc stabilna, ale nie asymptotycznie (wahadło oscyluje bez końca). Górna: V ma tam punkt siodłowy (rośnie z ω , maleje z odchyleniem kąta), a nie minimum, więc twierdzenie nie ma zastosowania, a równowaga jest niestabilna (lekcja math 4.6).

Zadania · część 2

1. Z trzech równań na p_{11} , p_{12} , p_{22} : $-8p_{12} = -1$, $p_{11} - 2,8p_{12} - 4p_{22} = 0$, $2p_{12} - 5,6p_{22} = -1$. Stąd $p_{12} = 0,125$, $p_{22} = 0,223$, $p_{11} = 1,243$. Wartości własne 1,258 i 0,208: dodatnio określona ✓.
2. Gdyby miało, $V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ byłoby dodatnie i malejące wzdłuż każdej trajektorii, więc wszystkie trajektorie zmierzałyby do zera. To przeczy istnieniu rosnącego modu własnego.

Zadania · część 3

1. $1/\cos \varphi$: 1,015; 1,155; 1,414.
2. $\tau = mgL \sin \theta + mL^2 \ddot{\theta}$. Z $v = -k_1 \theta - k_2 \dot{\theta}$ każda pozycja (także odwrócona) jest stabilizowana jak liniowy oscylator, w całym zakresie kątów (o ile moment wystarcza).
3. Kasowanie dynamiki to w istocie odwrócenie modelu. Odwrócenie prawego zera daje niestabilny biegun w regulatorze: wewnętrzna dynamika (ang. *zero dynamics*) eksploduje, choć wyjście wygląda dobrze. Metoda wymaga, żeby ta wewnętrzna dynamika była stabilna.

Zadania · część 4

1. $s_0 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$; $t \leq 2/(1,5 - 0,8) = 2,86$ s. Symulacja: ok. 1,8 s (oszacowanie jest pesymistyczne, bo zakłócenie nie zawsze działa przeciwko).
2. $(j2)^2 + 4 = 0$, zostaje $|2,8 \cdot 2j| = 5,6$; amplituda $0,8/5,6 = 0,143$. Ślizgowy z sign: ok. 0,0006, z warstwą $\varepsilon = 0,05$: ok. 0,009.
3. Na powierzchni obowiązuje $s = 0$, czyli $\dot{x} = -\lambda x$: równanie pierwszego rzędu, w którym d nie występuje, bo sterowanie przełączające w średniej dokładnie je kompensuje. PD ma skończone wzmocnienie i zakłócenie przechodzi przez S (lekcja 2.5).

Zadania do przemyślenia

1. Cel: $V = V_{\text{górn}} = 2g/L$. Sterowanie $\tau = k \text{ sign}(\omega) (V_{\text{górn}} - V)$ zwiększa energię, gdy jej brakuje (pchamy zgodnie z ruchem), i zmniejsza, gdy jest za duża.
2. Po dojściu w okolicę góry przełączamy na regulator liniowy (LQR) stabilizujący odwrócone wahadło. To klasyczne rozwiązanie Åströma i Furuty (2000).

2. 1. Z równań Eulera $\dot{V} = \omega^T \tau$ (człon żyroskopowy nie wykonuje pracy). Wybór $\tau = -k\omega$ daje $\dot{V} = -k|\omega|^2 < 0$.
 2. To tłumienie prędkości obrotowej, używane do wytracania obrotu po odłączeniu od rakiety; jego przybliżona wersja dla cewek magnetycznych (magnetorquerów) to prawo „B-dot”. Temat kursu astronautyki (sterowanie orientacją).
3. 1. W jednym okresie s zmienia się o ok. kT , a znak przełącza się co próbkę: $|s| \lesssim kT$ (dla $k = 1,5$: ok. 1,5 mm/s).
 2. Stąd błąd x rzędu kT/λ . Wolniejsze próbkowanie wprost zwiększa drgania. Warstwa przejściowa powinna być co najmniej rzędu kT .
4. 1. Z linearyzacji: $A_{cl}^T P + P A_{cl} = -Q$. Dla pełnego modelu nieliniowego policz $\dot{V} = 2\mathbf{x}^T P f(\mathbf{x})$ i znajdź największe c , dla którego $\dot{V} < 0$ w całym obszarze $V(\mathbf{x}) < c$ (numerycznie, na siatce).
 2. Obszar $V < c$ to gwarantowany (zwykle zachowawczy) obszar przyciągania. Wraz z ograniczeniem momentu daje odpowiedź „z ilu stopni regulator na pewno złapie wahadło”.

Automatyka · Lekcja 4.6: Lapunow i sterowanie nieliniowe (dla chętnych) · Źródła: A. M. Lapunow, *Ogólny problem stateczności ruchu* (Charków 1892); J.-J. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control* (Prentice Hall 1991); H. K. Khalil, *Nonlinear Systems* (Prentice Hall); K. J. Åström, K. Furuta, „Swinging up a pendulum by energy control”, *Automatica* 36 (2000). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c4_6.py).