

Rozszerzony filtr Kalmana i fuzja czujników w jednej osi

Skąd dron wie, jak bardzo jest przechylony? Żaden czujnik nie mierzy kąta wprost. Żyroskop mierzy prędkość obrotu, ale jego całka dryfuje. Akcelerometr widzi kierunek grawitacji, ale ten pomiar jest zaszumiony i nieliniowy. Ta lekcja łączy oba czujniki na dwa sposoby: prostym filtrem komplementarnym, który wystarcza wielu dronom, i rozszerzonym filtrem Kalmana, który radzi sobie z nieliniowością i sam szacuje błąd żyroskopu. Zostajemy przy jednej osi. Pełne 3D na kwaternionach jest w kursie dynamiki lotu.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2,5 h zadań

ZADANIA

11 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

G. Welch, G.
Bishop, *An
Introduction to the
Kalman Filter*,
rozdz. 2; R.
Mahony i in.,
„Nonlinear
complementary
filters on the
special
orthogonal
group” (2008)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: jak telefon wie, gdzie jest góra
- 1 Dwa czujniki, dwie wady
- 2 Filtr komplementarny
- 3 Rozszerzony filtr Kalmana
- 4 Komplementarny czy EKF?
- 5 Metoda i przykłady rozwiązane
- 6 Błędne intuicje
- 7 Zadania do przemyślenia
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Prolog: jak telefon wie, gdzie jest góra

Obróć telefon, a ekran obróci się razem z tobą. Potrząśnij nim, a obraz ani drgnie. Za tym stoją dwa mikroskopijne czujniki MEMS, które kosztują razem kilka złotych: akcelerometr i żyroskop. Każdy z osobna daje kiepską informację o orientacji. Razem, połączone kilkunastoma linijkami kodu, wystarczają do stabilizacji drona, nawigacji w grach i kierowania kamerą.

Pierwsze amatorskie kontrolery lotu używały prostych filtrów komplementarnych: MultiWii w wersji liniowej, wczesne ArduPilot w postaci filtru DCM (Premerlani i Bizard), nieliniowej odmiany z korekcją dryfu typu PI. Profesjonalne systemy, od samolotów po statek Apollo, używają rozszerzonego filtru Kalmana. W tej lekcji zobaczymy oba i sprawdzimy, ile daje ta różnica.

Pytanie na start. Żyroskop drona ma błąd stały $3^\circ/\text{s}$. Akcelerometr ma szum, który daje błąd kąta ok. 4° . Jakiego błędu kąta można się spodziewać po połączeniu: 4° , 1° czy $0,2^\circ$? Odpowiedź w części 4.

Dwa czujniki, dwie wady

Jedna oś: przechylenie φ drona.

- **Żyroskop** mierzy prędkość kątową: $\omega_m = \dot{\varphi} + b + \text{szum}$, gdzie b to bias (błąd stały, typowo ułamki do kilku stopni na sekundę, zmienny z temperaturą). Całkowanie daje kąt, ale bias całkuje się w dryf: $3^\circ/\text{s}$ to po minucie 180° .
- **Akcelerometr** w zawisie mierzy składową grawitacji: $a_y = g \sin \varphi + \text{szum} + \text{przyspieszenia ruchu}$. Daje kąt bez dryfu: $\varphi \approx \arcsin(a_y/g)$, ale z dużym szumem (drgania śmigieł) i z błędem, gdy dron przyspiesza w bok.

⚠️ PUŁAPKA MULTIKOPTERA

Dron, który przechyla się, żeby przyspieszyć w bok, ma ciąg skierowany wzdłuż swojej osi. Akcelerometr w osi poprzecznej pokazuje wtedy prawie zero (siła właściwa to tylko ciąg i opór), a nie $g \sin \varphi$. Kąt z akcelerometru jest więc poprawny tylko średnio, gdy dron nie przyspiesza w poziomie. Prawdziwe kontrolery lotu ufają mu mało, kompensują przyspieszenie (np. z GPS) albo korzystają z modelu oporu wirników. Symulacje w tej lekcji zakładają pomiar $g \sin \varphi$, jak dla drona na stanowisku testowym z przegubem albo dla telefonu obracanego w rękę.

Wady są komplementarne: żyroskop jest dobry dla szybkich zmian i zły dla wolnych, akcelerometr odwrotnie. To ta sama sytuacja co barometr i akcelerometr w lekcji 4.4 Filtr Kalmana, tyle że pomiar jest nieliniowy ($\sin \varphi$).

- 1 Bias żyroskopu 0,05 rad/s. O ile stopni dryfuje scałkowany kąt po 10 s i po minucie?
- 2 Akcelerometr ma szum 0,5 m/s². Jaki błąd kąta daje przy $\varphi \approx 0$? A przy $\varphi = 60^\circ$?
- 3 Dron przyspiesza w bok o 2 m/s² bez przechylania (np. po uderzeniu wiatru w bok). Jaki fałszywy kąt pokaże akcelerometr?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Filtr komplementarny

Najprostsza fuzja: co krok scałkuj żyroskop i lekko pociągnij wynik w stronę kąta z akcelerometru:

FILTR KOMPLEMENTARNY

$$\hat{\varphi}_k = \alpha (\hat{\varphi}_{k-1} + \omega_m T) + (1 - \alpha) \varphi_{acc,k}, \quad \alpha = \frac{\tau}{\tau + T}.$$

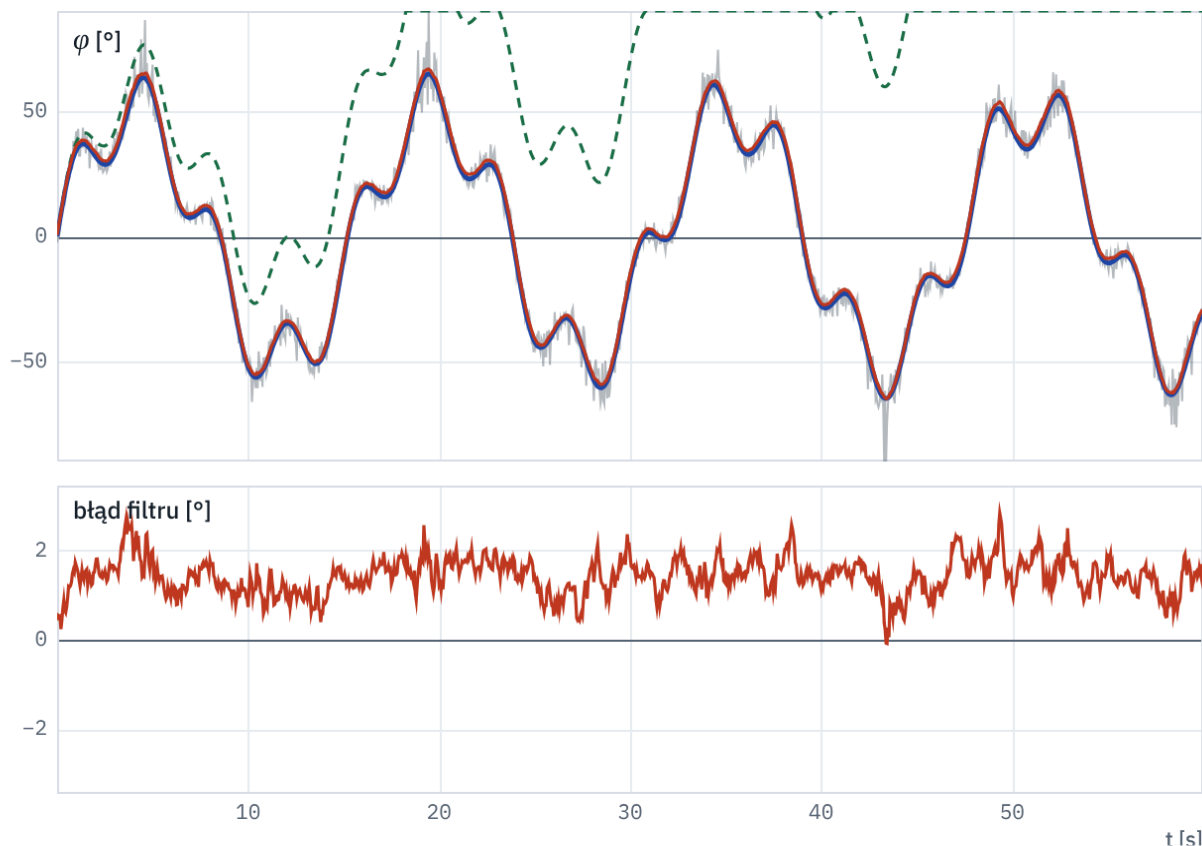
W dziedzinie s : $\hat{\varphi} = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \cdot \frac{\omega_m}{s} + \frac{1}{\tau s + 1} \varphi_{acc}$. Żyroskop przez filtr górnoprzepustowy, akcelerometr przez dolnoprzepustowy; suma filtrów to 1.

Nazwa pochodzi właśnie stąd: oba filtry się uzupełniają (sumują do jedności), jak $S + T = 1$ w lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli. Prawdziwy kąt przechodzi bez zniekształceń, a każdy czujnik dostaje tylko to pasmo, w którym jest dobry. Jedno pokrętko τ wyznacza częstotliwość przejścia $1/\tau$: poniżej ufamy akcelero-metrowi, powyżej żyroskopowi.

Słabość: bias żyroskopu nie znika, tylko zostaje „zatrzymany” na stałym błędzie $b\tau$ (zadanie 2.3). Przy $\tau = 0,5$ s i biasie 3°/s to ok. 1,4°.

SYMULACJA 1

Dron przechyla się do $\pm 65^\circ$ przez minutę. Żyroskop z biasem i szumem, akcelerometr z szumem, pomiary co 0,01 s. Sam żyroskop odpływa, sam akcelerometr szumi. Zmieniaj τ i patrz na błąd filtru: za krótkie przepuszcza szum, za długie zostawia błąd od biasu.



— prawdziwe przechylenie - - sam żyroskop (całkowanie) — sam akcelerometr
— filtr komplementarny

$\alpha = \tau / (\tau + T)$ 0,9800

RMS błędu filtru 1,51°

RMS samego akcelerometru 4,12°

dryf samego żyroskopu po 60 s 172°

błąd stały od biasu $\approx b \cdot \tau$ 1,40°

Żyroskop dla szybkich zmian (górnoprzepustowo), akcelerometr dla wolnych (dolnoprzepustowo).
Obie części sumują się do jedności, jak $S + T = 1$.

Stan na rysunku: $\tau = 0,49$ s ($\alpha = 0,9800$), $T = 0,01$ s, bias żyroskopu $2,9^\circ/\text{s}$, szum żyroskopu $0,02$ rad/s, szum akcelerometru $0,50$ m/s².

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 $T = 0,01$ s, $\alpha = 0,98$. Jaka jest stała czasowa τ ?

■ ■ ■

- 2 Pokaż, że transmitancje $\frac{\tau s}{\tau s + 1}$ (dla ω_m/s) i $\frac{1}{\tau s + 1}$ sumują się do 1 i co z tego wynika dla prawdziwego kąta.

- 3 Pokaż, że stały bias b żyroskopu daje stały błąd $b\tau$.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Rozszerzony filtr Kalmana

Filtr Kalmana z lekcji 4.4 wymaga modelu liniowego. Tu pomiar to $g \sin \varphi$. Pomysł Schmidta: **linearyzować wokół bieżącej estymaty** (lekcja 4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność). Predykcja idzie po prawdziwym, nieliniowym modelu, a do równań na kowariancję i wzmocnienie bierzemy jakobiany:

ROZSZERZONY FILTR KALMANA (EKF)

Model: $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}$, $\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}$.

Predykcja: $\hat{\mathbf{x}}^- = f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$, $P^- = F P F^T + Q$, $F = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}$.

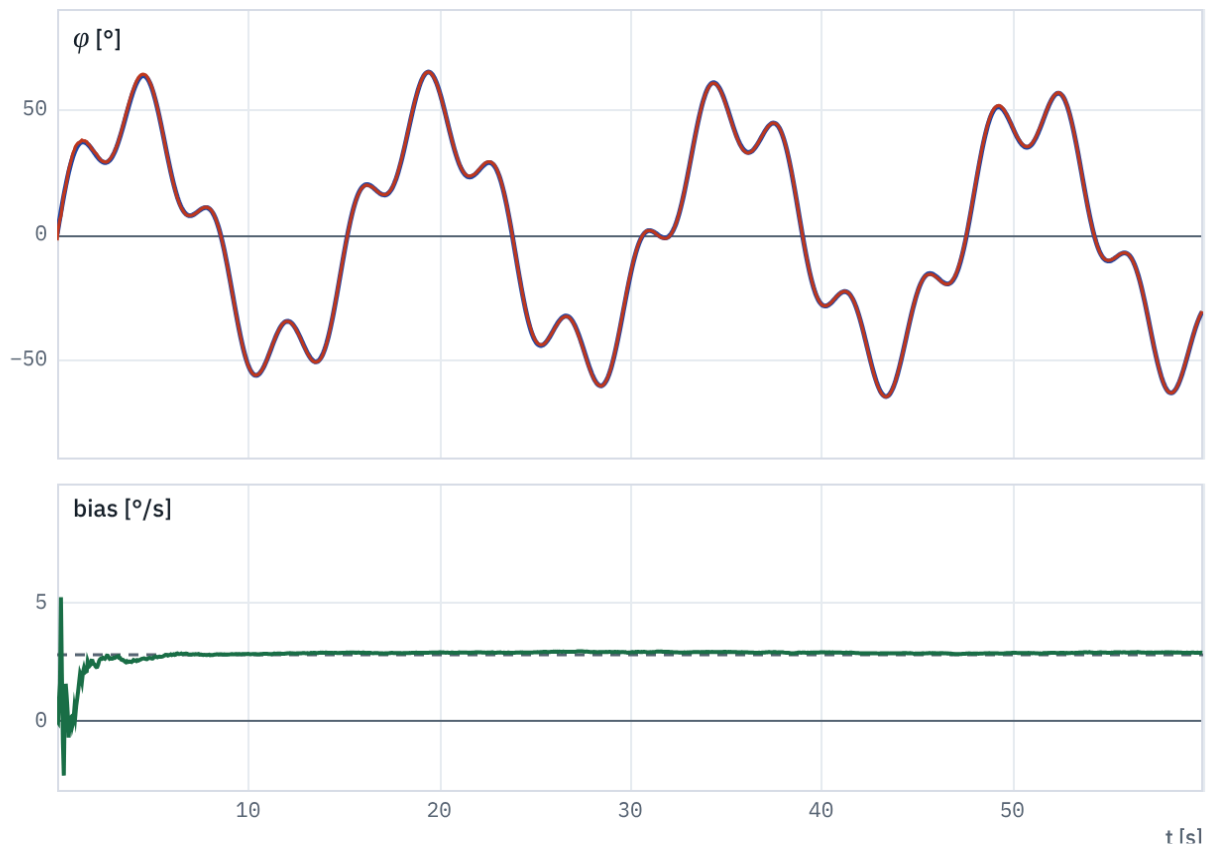
Korekta: $H = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}^-}$, $K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}$, $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^- + K (\mathbf{z} - h(\hat{\mathbf{x}}^-))$, $P = (I - K H) P^-$.

Dla przechylenia ze stanem $\mathbf{x} = [\varphi, b]$ (kąt i bias żyroskopu), żyroskopem jako wejściem i akcelerometrem jako pomiarem:

$$f = \begin{bmatrix} \varphi + (\omega_m - b)T \\ b \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad h = g \sin \varphi, \quad H = [g \cos \hat{\varphi} \quad 0].$$

Predykcja jest tu liniowa, nieliniowy jest tylko pomiar. Jakobian $H = g \cos \hat{\varphi}$ ma prostą interpretację: przy dużym kącie akcelerometr mniej mówi o kącie, więc filtr sam zmniejsza wzmocnienie. Gdybyśmy zamiast tego przyjęli model liniowy $h = g\varphi$, przy $\varphi = 60^\circ$ akcelerometr pokazałby $g \cdot 0,87$, a filtr uznałby, że kąt wynosi 0,87 rad, czyli 50° .

SYMULACJA 2 Ten sam lot co w symulacji 1. Filtr ze stanem [kąt, bias żyroskopu]. Porównaj EKF z linearyzacją w bieżącej estymacie i zwykły filtr Kalmana z modelem $\sin \varphi \approx \varphi$. Dolny wykres: estymata biasu na tle prawdziwego.



— prawdziwe przechylenie — estymata - - prawdziwy bias — estymata biasu

RMS błędu przechylenia $0,20^\circ$

największy błąd $0,54^\circ$

estymata biasu po 60 s $2,86^\circ/\text{s}$

EKF linearyzuje pomiar w bieżącej estymacie: $H = g \cdot \cos \hat{\varphi}$. Przy dużych kątach akcelerometr mniej mówi o kącie ($\cos \varphi$ maleje) i filtr sam zmniejsza mu zaufanie. Bias żyroskopu zostaje oszacowany.

Stan na rysunku: EKF; stan $[\varphi, b]$, żyroskop jako wejście ($\sigma = 0,02 \text{ rad/s}$), akcelerometr $g \cdot \sin \varphi + \text{szum } 0,50 \text{ m/s}^2$, bias $2,9^\circ/\text{s}$; $T = 0,01 \text{ s}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz H dla $\hat{\varphi} = 0^\circ, 30^\circ, 80^\circ$.

2 Dlaczego w EKF innowację liczymy jako $z - h(\hat{\mathbf{x}}^-)$, a nie $z - H\hat{\mathbf{x}}^-$?

3 Czy bias żyroskopu jest obserwowalny, gdy dron cały czas wisi poziomo ($\varphi = 0$)?

4 Komplementarny czy EKF?

Odpowiedź na pytanie z prologu. Symulacja (60 s, przechylenia do $\pm 65^\circ$, bias $2,9^\circ/\text{s}$, szum akcelerometru $0,5 \text{ m/s}^2$, błąd liczony w drugiej połowie):

metoda	RMS błędu	największy błąd
sam żyroskop	ok. 130° (dryf)	ok. 170°
sam akcelerometr	$4,2^\circ$	27°
komplementarny, $\tau = 0,49 \text{ s}$	$1,5^\circ$	$3,0^\circ$
KF z $\sin \varphi \approx \varphi$	$3,8^\circ$	$7,4^\circ$
EKF ze stanem biasu	$0,21^\circ$	$0,6^\circ$

EKF jest siedem razy dokładniejszy od filtra komplementarnego, głównie dlatego, że szacuje bias (estymata $0,0505 \text{ rad/s}$ przy prawdziwym $0,05$). Filtr komplementarny można poprawić tym samym pomysłem: dodać człon całkujący, który powoli „uczy się” biasu. To filtr Mahony’ego (2008), w praktyce regulator PI w pętli korekty. Jest prawie tak dobry jak EKF, przy ułamku obliczeń.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

2 zadania · ok. 15 min

- 1 Dlaczego zwykły KF z modelem liniowym ma w tabeli większy błąd niż filtr komplementarny, choć szacuje bias?
- 2 Filtr komplementarny z członem całkującym: $\hat{\varphi} \leftarrow \hat{\varphi} + (\omega_m - \hat{b})T + k_p(\varphi_{\text{acc}} - \hat{\varphi})T$, $\hat{b} \leftarrow \hat{b} - k_i(\varphi_{\text{acc}} - \hat{\varphi})T$. Dlaczego $\hat{b}$ dąży do prawdziwego biasu?

☰ METODA: EKF KROK PO KROKU

1. **Stan:** wielkości szukane + błędy czujników (biasy).
2. **Model:** f (szybkie czujniki jako wejście), h (wolne czujniki), oba nieliniowe dopuszczalne.
3. **Jakobiany** F , H analitycznie; sprawdź numerycznie różnicami skończonymi.
4. **Szumy** Q , R jak w lekcji 4.4; przy manewrach zwiększ R akcelerometru.
5. **Sprawdzenie:** spójność błęd z P , obserwowalność biasów, zachowanie przy dużych kątach.

Przykład 5.1

Dobór τ filtra komplementarnego

Bias $0,05 \text{ rad/s}$, szum akcelerometru $0,5 \text{ m/s}^2$, $T = 0,01 \text{ s}$. Porównaj $\tau = 0,09; 0,49; 2; 10 \text{ s}$.

- 1 $\tau = 0,09 \text{ s}$ ($\alpha = 0,9$): RMS $1,0^\circ$, ale szczyty do $5,6^\circ$ (szum akcelerometru).
- 2 $\tau = 0,49 \text{ s}$ ($\alpha = 0,98$): RMS $1,5^\circ$, największy $3,0^\circ$ (błąd od biasu $b\tau = 1,4^\circ$ plus szum).
- 3 $\tau = 2 \text{ s}$: RMS $5,7^\circ$ (bias: $5,7^\circ$); $\tau = 10 \text{ s}$: 28° (bias: 29°).

Wynik: optimum ok. $0,1\text{--}0,5 \text{ s}$; przy dużym biasie krótsze, przy dużym szumie dłuższe.

Sprawdzenie: dla długich τ błąd jest prawie dokładnie $b\tau$ ✓.

Przykład 5.2

Jeden krok EKF

$\hat{\varphi} = 0,5 \text{ rad}$, $\hat{b} = 0$, $P = \text{diag}(0,01; 10^{-4})$ (po predykcji). Pomiar $a_y = 5,0 \text{ m/s}^2$, $R = 0,25$. Policz korektę.

- 1 $h(\hat{\varphi}) = 9,81 \sin 0,5 = 4,70$; innowacja $5,0 - 4,70 = 0,30$.
- 2 $H = 9,81 \cos 0,5 = 8,61$; $S = 8,61^2 \cdot 0,01 + 0,25 = 0,991$.
- 3 $K = [0,01 \cdot 8,61 / 0,991; 0] = [0,0869; 0]$ (bias nie jest jeszcze skorelowany z kątem).
- 4 $\hat{\varphi} = 0,5 + 0,0869 \cdot 0,30 = 0,526 \text{ rad}$; $P_{\varphi\varphi} = (1 - 0,0869 \cdot 8,61) \cdot 0,01 = 0,0025$.

Wynik: kąt poprawiony o $1,5^\circ$, niepewność kąta spadła z 0,1 do 0,05 rad.

Sprawdzenie: $\arcsin(5,0/9,81) = 0,535 \text{ rad}$: filtr przesunął się w stronę pomiaru, ale nie całkiem, bo pomiar ma swoją niepewność ✓.

6

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Akcelerometr mierzy kąt.”

Mierzy siłę właściwą: przyspieszenie minus przyspieszenie grawitacyjne (w spoczynku pokazuje 1 g w górę). Kąt wynika z niego tylko wtedy, gdy obiekt nie przyspiesza.

× „EKF jest optymalny.”

Jest przybliżeniem: linearyzacja w estymacie bywa zła przy dużych niepewnościach. Przy silnej nieliniowości lepsze bywają filtry UKF albo cząsteczkowe.

× „Filtr komplementarny to tylko filtr dolnoprzepustowy na akcelerometrze.”

To para filtrów sumujących się do jedności: górnoprzepustowy na żyroskopie jest równie ważny.

× „Lepszy żyroskop rozwiąże problem dryfu.”

Zmniejszy go, ale każdy żyroskop ma bias zmienny z temperaturą. Bez czujnika absolutnego (akcelerometr, magnetometr, GPS) cała zawsze ucieknie.

× „Jakobian liczy się raz.”

W EKF liczy się go w każdym kroku, w bieżącej estymacie. To właśnie odróżnia EKF od filtru Kalmana dla modelu zlinearyzowanego raz w punkcie pracy.

7 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 Zakręt samolotu.** Samolot w skoordynowanym zakręcie z przechyleniem 30° . Co pokazuje akcelerometr w osi poprzecznej? Co z tego wynika dla filtru komplementarnego?
- 2 Magnetometr dla odchylenia.** Akcelerometr nie mówi nic o kursie (obróć wokół pionu). Jaki czujnik pełni tę rolę i jakie ma wady?
- 3 Kiedy linearyzacja zawodzi.** EKF startuje z $\hat{\varphi} = 0$, a dron jest przechylony o 150° (prawie do góry nogami). Co się może stać?
- 4 Drgania śmigieł.** Silniki dają drgania 150–300 Hz o amplitudzie przyspieszenia rzędu g . Jak to wpływa na fuzję i co z tym robić? (Por. aliasing w lekcji 3.4.)
- 5 Dlaczego kwaterniony?** W 3D orientację można opisać trzema kątami (przechylenie, pochylenie, odchylenie). Dlaczego kontrolery lotu wolą cztery liczby (kwaternion)?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jakie wady mają żyroskop i akcelerometr?**
Żyroskop: dryf całki od biasu. Akcelerometr: szum i fałszywy kąt przy przyspieszeniach.

2 Jak działa filtr komplementarny?

$\hat{\varphi} = \alpha(\hat{\varphi} + \omega_m T) + (1 - \alpha)\varphi_{acc}$: górnoprzepustowo żyroskop, dolnoprzepustowo akcelerometr.

3 Jaki błąd daje bias w filtrze komplementarnym?

Stały, równy $b\tau$.

4 Czym EKF różni się od KF?

Modele f, h mogą być nieliniowe; F, H to jacobiany liczone w bieżącej estymacji.

5 Ile wynosi H dla pomiaru $g \sin \varphi$?

$g \cos \hat{\varphi}$.

6 Jak filtr komplementarny może szacować bias?

Dodać człon całkujący w pętli korekty (filtr Mahony'ego).

FILTR KOMPLEMENTARNY

$$\hat{\varphi}_k = \alpha(\hat{\varphi}_{k-1} + \omega_m T) + (1 - \alpha)\varphi_{\text{acc}}$$

$$\alpha = \tau / (\tau + T); \quad \frac{\tau s}{\tau s + 1} + \frac{1}{\tau s + 1} = 1$$

błąd od biasu: $b\tau$

$$\varphi_{\text{acc}} = \arcsin(a_y/g)$$

EKF

$$\hat{\mathbf{x}}^- = f(\hat{\mathbf{x}}, u), P^- = F P F^T + Q$$

$$K = P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1}, \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^- + K(z - h(\hat{\mathbf{x}}^-))$$

przechylenie: $F = \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H =$
 $[g \cos \hat{\varphi} \ 0]$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, rozdz. 2 (EKF, kilka stron).
- **Dla chętnych:** R. Mahony, T. Hamel, J.-M. Pflimlin, „Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group”, *IEEE Trans. Automatic Control* 53 (2008); S. Madgwick, raport o filtrze orientacji (2010), oba szeroko używane w dronach.

Mamy komplet narzędzi liniowych: sprzężenie od stanu, obserwatory, LQR, filtr Kalmana i jego nieliniowe rozszerzenie. Ostatnia lekcja części IV, dla chętnych, wychodzi poza świat linearyzacji: jak udowodnić stabilność układu nieliniowego bez rozwiązywania równań (Lapunow) i jak sterować, gdy model jest nieliniowy w całym zakresie pracy.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $0,5 \text{ rad} = 28,6^\circ$ po 10 s; $3 \text{ rad} = 172^\circ$ po minucie.
2. $\delta\varphi \approx \delta a / (g \cos \varphi)$: przy 0° ok. $0,051 \text{ rad} = 2,9^\circ$; przy 60° dwa razy więcej, $5,8^\circ$. Im większy kąt, tym mniej czuły pomiar.
3. $\arcsin(2/9,81) \approx 11,8^\circ$. Akcelerometr nie odróżnia grawitacji od przyspieszenia (zasada równoważności). Dlatego przy manewrach trzeba mu mniej ufać.

Zadania · część 2

1. $\tau = \alpha T / (1 - \alpha) = 0,49 \text{ s}$.
2. $\frac{\tau s + 1}{\tau s + 1} = 1$. Gdy oba czujniki są idealne ($\omega_m/s = \varphi_{\text{acc}} = \varphi$), wynik to dokładnie φ bez opóźnienia i zniekształceń, przy każdej częstotliwości.
3. Bias wchodzi jako b/s (całka) przez $\frac{\tau s}{\tau s + 1} \cdot \frac{b\tau}{\tau s + 1}$ (skok). Wartość ustalona: $b\tau$. Dla $0,05 \text{ rad/s}$ i $0,49 \text{ s}$: $0,0245 \text{ rad} = 1,4^\circ$.

Zadania · część 3

1. $g \cos \hat{\varphi}$: $9,81$; $8,50$; $1,70 \text{ m/s}^2$ na radian. Przy 80° pomiar jest prawie nieczuły na kąt.
2. $H\hat{x}$ to przybliżenie liniowe h wokół punktu, w którym je liczone, a nie przewidywany pomiar. Prawdziwe przewidywanie to $h(\hat{x}^-) = g \sin \hat{\varphi}$. Jakobian służy tylko do propagacji niepewności i wzmocnienia.
3. Tak: bias powoduje dryf przewidywanego kąta, a akcelerometr pokazuje, że kąt się nie zmienia. Para (F, H) z $H = [g \ 0]$: $W_o = \begin{bmatrix} g & 0 \\ g & -gT \end{bmatrix}$, rząd 2.

Zadania · część 4

1. Filtr komplementarny korzysta z $\arcsin(a_y/g)$, czyli z poprawnej nieliniowości. KF z $h = g\varphi$ ma systematycznie zły model pomiaru przy dużych kątach (60° widzi jako 50°), a ten błąd jeszcze psuje estymatę biasu ($0,039$ zamiast $0,05$).
2. W stanie ustalonym średnia różnica $\varphi_{\text{acc}} - \hat{\varphi}$ musi być zerowa (inaczej $\hat{b}$ dalej się zmienia). Wtedy estymata kąta nie dryfuje, co jest możliwe tylko przy $\hat{b} = b$. To ten sam mechanizm co całka w PI usuwająca uchyb od stałego zakłócenia (lekcja 1.3).

Zadania do przemyslenia

1. W zakręcie skoordynowanym wypadkowa grawitacji i siły odśrodkowej leży w płaszczyźnie symetrii samolotu: akcelerometr poprzeczny pokazuje zero, jak w locie poziomym.
2. Filtr komplementarny powoli „prostuje” estymatę do 0° , choć samolot jest przechylony o 30° . W samolotach korekcję akcelerometrem wyłącza się albo kompensuje przyspieszenie z prędkości i prędkości kątowej (lekcja 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach).

2. 1. Magnetometr: kierunek pola magnetycznego Ziemi. Fuzja z żyroskopem osi pionowej, tym samym schematem.
2. Wady: zakłócenia od silników i przewodów z prądem, metalowych konstrukcji, deklinacja magnetyczna. Dlatego drony często używają też kursu z GPS (z ruchu).
3. 1. $a_y = g \sin 150^\circ = g \sin 30^\circ$: ten sam pomiar co przy 30° . Filtr zbiegnie do 30° , bo to rozwiązanie bliższe startowi. Pomiar jednej składowej nie rozróżnia φ i $180^\circ - \varphi$.
2. Potrzebny drugi pomiar ($a_z = g \cos \varphi$, zmienia znak) i ostrożna inicjalizacja. Ogólnie: EKF działa lokalnie, wymaga dobrego startu.
4. 1. Drgania złożą się w pobliże zera, jeśli ich częstotliwość leży blisko wielokrotności częstotliwości próbkowania: np. przy próbkowaniu 200 Hz drgania 190–210 Hz wyglądają jak powolne zmiany kąta o częstotliwości 0–10 Hz i filtr komplementarny ich nie odfiltruje (przy 500 Hz drgania 260–300 Hz złożą się tylko do 200–240 Hz).
2. Rozwiązania: mechaniczne tłumienie czujnika, filtr antyaliasingowy w czujniku, szybkie próbkowanie z filtrami cyfrowymi, filtry wycinające na częstotliwości obrotów silników (znanej z ESC).
5. 1. Kąty Eulera mają osobliwość (przy pochyleniu 90° przechylenie i odchylenie stają się nieodróżnialne: blokada przegubu, ang. *gimbal lock*), a ich równania kinematyki zawierają funkcje trygonometryczne.
2. Kwaternion nie ma osobliwości, a kinematyka jest liniowa w kwaternionie. Cena: więzy (norma 1) i ostrożność w EKF. Szczegóły w lekcji 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach.

Automatyka · Lekcja 4.5: EKF i fuzja czujników · Źródła: G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter* (UNC TR 95-041); R. Mahony, T. Hamel, J.-M. Pflimlin, *IEEE Trans. Automatic Control* 53 (2008); L. A. McGee, S. F. Schmidt, NASA TM-86847 (1985). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c4_5.py).