

# Filtr Kalmana

Obserwator z lekcji 4.2 miał jedno pokrętło bez jasnej reguły: jak szybko korygować model pomiarem. Filtr Kalmana odpowiada na to pytanie, gdy wiemy, jak bardzo szumią czujniki i jak bardzo mylą się model i zakłócenia. Wynikiem jest optymalna estymata, która nie tylko podaje wartość, ale też mówi, jak bardzo można jej ufać. Zaczniemy od jednej liczby i 50 pomiarów, a skończymy na fuzji barometru z akcelerometrem w dronie.

## CZAS

ok. 3 h teorii + ok.  
3 h zadań

## ZADANIA

12 zadań w treści  
+ 5 do  
przemyślenia, z  
odpowiedziami

## ŹRÓDŁA

G. Welch, G.  
Bishop, *An  
Introduction to the  
Kalman Filter*  
(UNC, wolny  
dostęp); A.  
Tewari, *Modern  
Control Design  
with MATLAB and  
SIMULINK*, rozdz.  
7; S. Brunton,  
*Control Bootcamp*  
(filtr Kalmana)

## W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: droga na Księżyc
- 1 Łączenie dwóch niepewnych informacji
- 2 Filtr Kalmana dla jednej liczby
- 3 Wersja macierzowa
- 4 Dron: barometr i akcelerometr
- 5 Metoda i przykłady rozwiązane
- 6 Błędne intuicje
- 7 Zadania do przemyślenia
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

## Prolog: droga na Księżyc

Jesienią 1960 r. Rudolf Kálmán odwiedził NASA Ames i opowiedział o swojej nowej metodzie filtracji. Słuchał go Stanley Schmidt, który szukał sposobu na nawigację statku Apollo: komputer pokładowy miał łączyć model ruchu w polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca z rzadkimi, niedokładnymi pomiarami gwiazd i horyzontu. Metoda Kálmána była liniowa, a ruch statku nie. Zespół Schmidta zastosował ją więc do modelu zlinearyzowanego wokół bieżącej estymaty. Tak powstał rozszerzony filtr Kalmana (lekcja 4.5 Rozszerzony filtr Kalmana i fuzja czujników w jednej osi), który poleciał na Księżyc.

Dziś filtr Kalmana jest w każdym telefonie (GPS i czujniki ruchu), samolocie, dronie, robocie i systemie śledzenia rakiet. Ta lekcja pokazuje, że w środku nie ma magii, tylko średnia ważona niepewnościami, liczona w kółko.

**Pytanie na start.** Barometr drona myli się średnio o 30 cm, a akcelerometr ma mały stały błąd ( $0,1 \text{ m/s}^2$ ), przez co po minucie całkowania pozycja ucieka o 180 m. Czy połączenie dwóch tak słabych czujników może dać estymatę wysokości lepszą niż 10 cm? Odpowiedź w części 4.

## 1

## Łączenie dwóch niepewnych informacji

Dwa pomiary tej samej wielkości:  $z_1$  z niepewnością (odchyleniem standardowym)  $\sigma_1$  i  $z_2$  z  $\sigma_2$ . Najlepsza (o najmniejszej wariancji) estymata liniowa to średnia ważona odwrotnościami wariancji (lekcja 5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania):

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 z_1 + \sigma_1^2 z_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Zapiszmy to inaczej: zaczynamy od  $z_1$  i korygujemy o część różnicy:

$$\hat{x} = z_1 + K(z_2 - z_1), \quad K = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \sigma^2 = (1 - K)\sigma_1^2.$$

To już jest cały filtr Kalmana.  $z_1$  to przewidywanie modelu z niepewnością  $P$ ,  $z_2$  to nowy pomiar z niepewnością  $R$ , a  $K = \frac{P}{P+R}$  to **wzmocnienie Kalmana**. Gdy model jest pewny ( $P \ll R$ ),  $K \approx 0$  i pomiar prawie nic nie zmienia. Gdy pomiar jest pewny ( $R \ll P$ ),  $K \approx 1$  i estymata przeskakuje na pomiar. Wynik jest zawsze pewniejszy od każdej informacji osobno.

### ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

## 1

Dwa termometry:  $21,0^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 2^\circ\text{C}$ ) i  $22,0^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 1^\circ\text{C}$ ). Podaj estymatę i jej niepewność.

- 2 Pokaż, że dwie postacie (średnia ważona i „przewidywanie +  $K \cdot$  różnica”) są równoważne.

- 3 Ile identycznych pomiarów o  $\sigma = 0,1$  V trzeba połączyć, żeby niepewność spadła do 0,01 V?

▢▢ podstawowe   ▢▢ średnie   ▢▢ feynmanowskie

## 2 Filtr Kalmana dla jednej liczby

Klasyczny przykład z wprowadzenia Welcha i Bishopa: mierzymy stałe napięcie ( $-0,377$  V) woltomierzem o szumie  $\sigma = 0,1$  V. Model: wartość się nie zmienia, a jeśli już, to o mały losowy przyrost o wariancji  $Q$  na krok. Filtr powtarza dwa kroki: Welch-Bishop 3

### 🔧 CYKL FILTRU KALMANA (JEDEN STAN)

**Predykcja:**  $\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}$ ,  $P_k^- = P_{k-1} + Q$ .

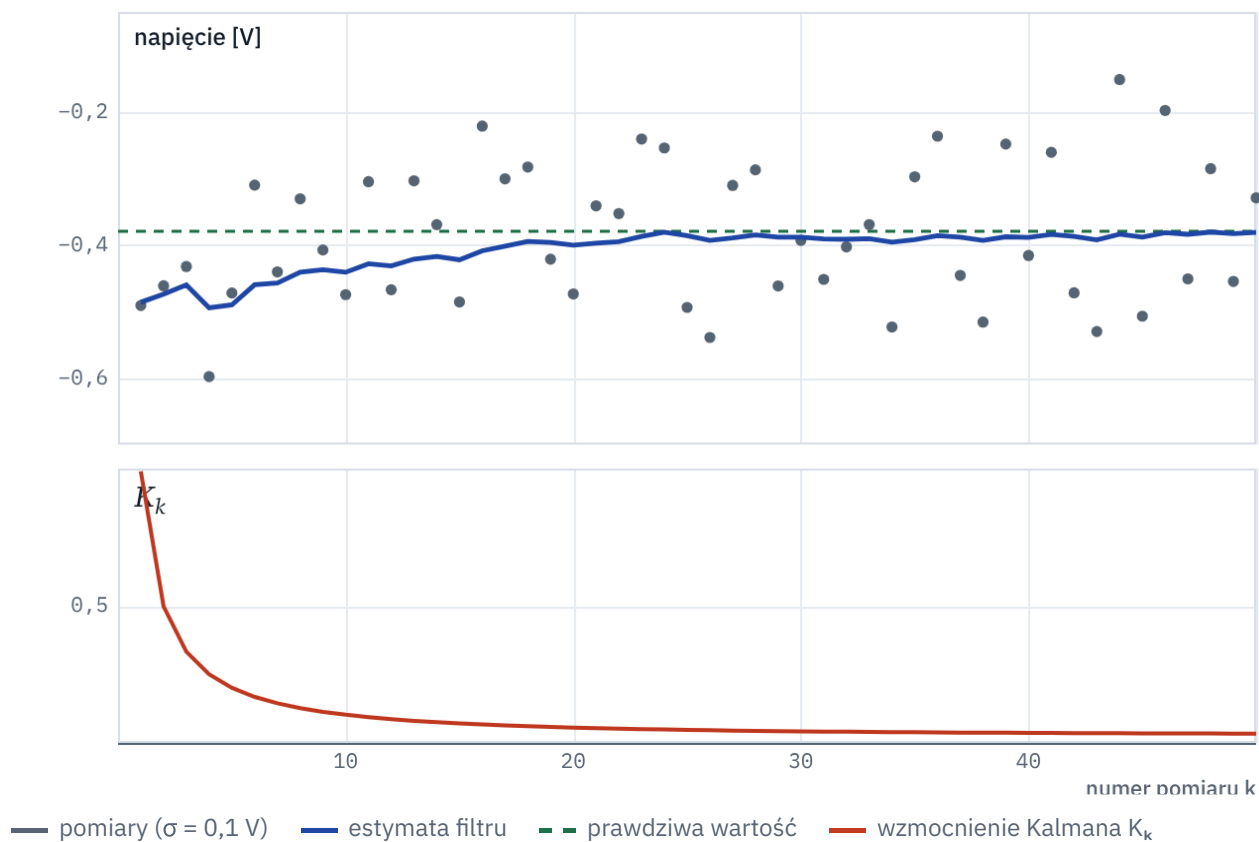
**Korekta:**  $K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + R}$ ,  $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \hat{x}_k^-)$ ,  $P_k = (1 - K_k)P_k^-$ .

Przy  $Q = 0$  wzmocnienie maleje jak  $1/k$  i estymata to dokładnie średnia ze wszystkich dotychczasowych pomiarów (zadanie 2.2). Przy  $Q > 0$  wzmocnienie zatrzymuje się na stałym poziomie  $K_\infty$ : filtr pamięta mniej więcej ostatnie  $1/K_\infty$  pomiarów i może śledzić powolne zmiany.

### ⚠️ RAMKA: SZUM BIAŁY I GĘSTOŚĆ WIDMOWA

Filtr Kalmana zakłada, że szum pomiaru  $v_k$  i zakłócenia  $w_k$  są **białe**: kolejne próbki są niezależne, o średniej zero i znanej wariancji ( $R, Q$ ). W czasie ciągłym biały szum opisuje się *gęstością widmową*  $q$  (jednostka: wariancja na herc), bo jego wariancja w każdej chwili jest formalnie nieskończona. Po dyskretyzacji z krokiem  $T$  wariancja przyrostu stanu na krok wynosi ok.  $qT$ : dlatego  $Q$  zależy od kroku próbkowania. Jeśli szum nie jest biały (np. wolny dryf), trzeba go opisać jako dodatkowy stan, jak bias akcelerometru w części 4.

**SYMULACJA 1** 50 pomiarów stałego napięcia z szumem  $\sigma = 0,1 \text{ V}$  ( $R_{\text{prawdziwe}} = 0,01 \text{ V}^2$ ). Zmieniaj  $R$  i  $Q$  przyjęte w filtrze i patrz, jak zmienia się estymata i wzmacnienie  $K_k$ . Losuj nowe serie.



estymata po 50 pomiarach **-0,3813 V**

błąd **-0,0041 V**

średnia arytmetyczna **-0,3854 V**

K w stanie ustalonym **0,0311**

$Q > 0$  mówi filtrowi, że wartość może dryfować:  $K_k$  zatrzymuje się na stałym poziomie i stare pomiary są stopniowo zapominane.

Stan na rysunku: prawdziwa wartość  $-0,37727 \text{ V}$ , szum pomiaru  $\sigma = 0,1 \text{ V}$ ; w filtrze  $R = 10^{-2}, 0$ ,  $Q = 10^{-5}, 0$ ; start  $\hat{x} = 0$ ,  $P = 1$ .

## ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Start  $\hat{x}_0 = 0$ ,  $P_0 = 1$ ,  $R = 0,01$ ,  $Q = 0$ , pierwszy pomiar  $z_1 = -0,3$ . Policz  $K_1$ ,  $\hat{x}_1$ ,  $P_1$ .

2 Pokaż, że przy  $Q = 0$  i  $P_0 \rightarrow \infty$  jest  $K_k = 1/k$  i estymata to średnia arytmetyczna.

- 3 Stan ustalony:  $P^- = P + Q$ ,  $P = (1 - K)P^-$ . Pokaż, że  $P^-$  spełnia  $(P^-)^2 - QP^- - QR = 0$ , i policz  $K_\infty$  dla  $R = 0,01$ ,  $Q = 10^{-5}$  oraz  $Q = 10^{-3}$ .

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

## 3 Wersja macierzowa

Dla stanu wektorowego model w czasie dyskretnym (lekcja 3.4 Sterowanie cyfrowe: próbkowanie, transformata Z i regulator w kodzie):

$$\mathbf{x}_k = F\mathbf{x}_{k-1} + G\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{z}_k = H\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

gdzie  $\mathbf{w}$  (zakłócenia, błędy modelu) ma macierz kowariancji  $Q$ , a  $\mathbf{v}$  (szum pomiaru) macierz  $R$ . Niepewność estymaty opisuje **macierz kowariancji**  $P$ : na przekątnej wariancje poszczególnych składowych, poza nią ich korelacje.

### 🔧 FILTR KALMANA

**Predykcja:**  $\hat{\mathbf{x}}_k^- = F\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + G\mathbf{u}_{k-1}$ ,  $P_k^- = FP_{k-1}F^T + Q$ .

**Korekta:**  $K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k (\mathbf{z}_k - H\hat{\mathbf{x}}_k^-)$ ,  $P_k = (I - K_k H)P_k^-$ .

Porównaj z obserwatorem z lekcji 4.2: to ten sam schemat „model plus korekta innowacją  $\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}}$ ”. Różnica:  $K_k$  nie jest dobierane ręcznie, tylko liczone z niepewności. W stanie ustalonym filtr Kalmana to obserwator z optymalnym  $L$ , wyznaczonym z równania Riccatiego dualnego do tego z LQR (lekcja 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów).

### 🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pokaż, że dla jednego stanu ( $F = H = 1$ ) wzory macierzowe dają wzory z części 2.
- 2 Stan  $[z, v]$ , mierzymy tylko  $z$ . Po korekcie zmieniła się też estymata  $v$ . Dlaczego, skoro  $v$  nie mierzymy?
- 3 Co się dzieje z  $P$ , gdy przez dłuższy czas nie ma pomiarów (np. dron w tunelu bez barometru)?

## 4 Dron: barometr i akcelerometr

Dwa czujniki o przeciwnych wadach:

- **akcelerometr** (100 Hz): mierzy przyspieszenie z szumem  $0,2 \text{ m/s}^2$  i stałym błędem (biasem). Dwukrotne całkowanie daje wysokość dokładną na krótką metę, ale bias  $0,1 \text{ m/s}^2$  po minucie to  $\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 60^2 = 180 \text{ m}$  błędu;
- **barometr** (10 Hz): mierzy wysokość bez dryfu, ale z szumem  $0,3 \text{ m}$ .

Filtr: stan  $[z, v]$ , akcelerometr jako *wejście* predykcji ( $z \leftarrow z + vT + \frac{1}{2}a_m T^2$ ,  $v \leftarrow v + a_m T$ ),

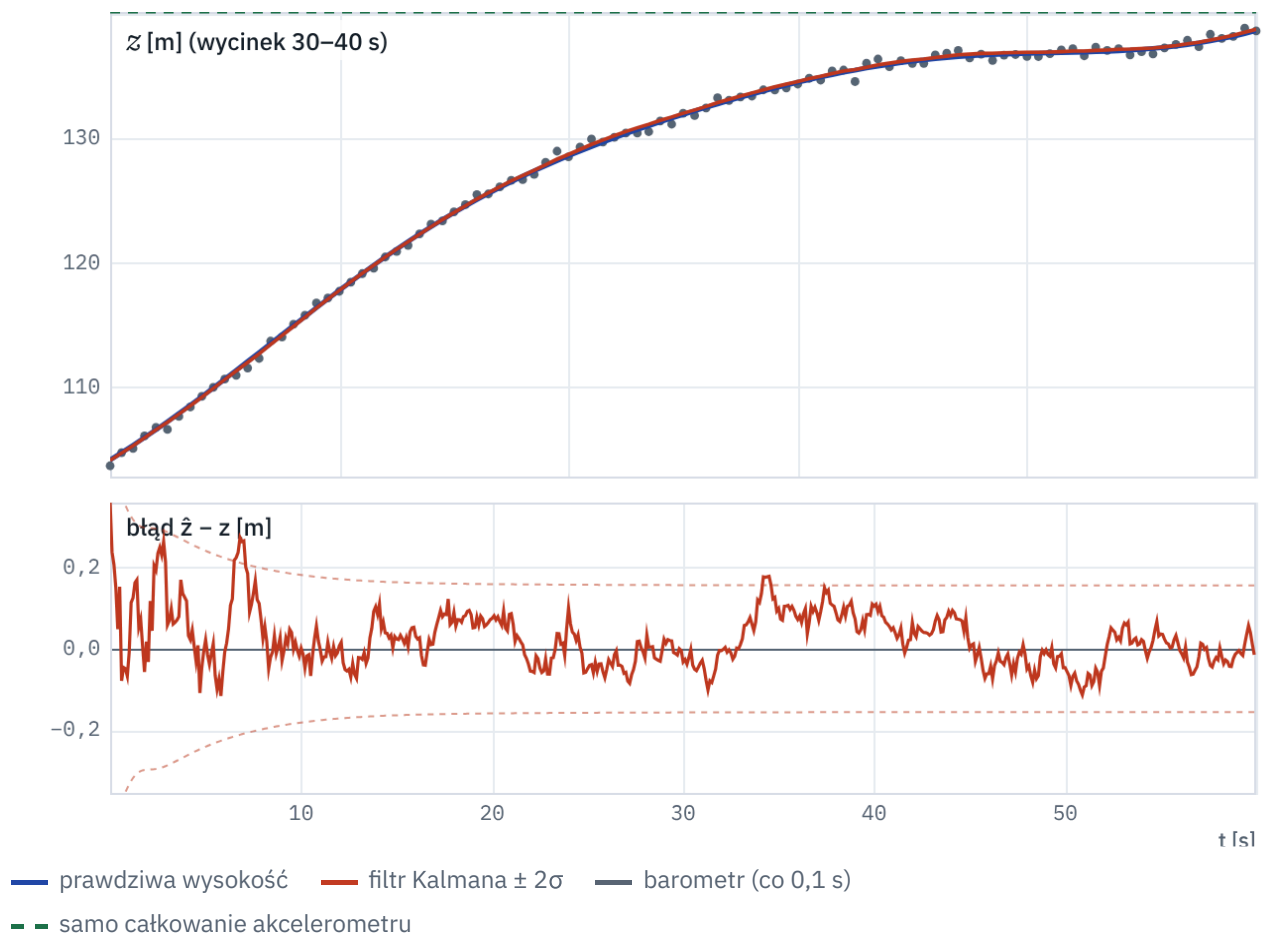
barometr jako pomiar. Szum akcelerometru wchodzi do  $Q$ :  $Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 \\ T^3/2 & T^2 \end{bmatrix}$ . Bias jest wolny,

a nie biały, więc dokładamy go jako trzeci stan  $b$  z  $\dot{b} = 0$ : filtr sam go oszacuje, bo bias zostawia charakterystyczny ślad w różnicy między całkowaniem a barometrem.

Odpowiedź na pytanie z prologu. Symulacja (60 s, ruch sinusoidalny): sam barometr  $\pm 0,3 \text{ m}$ , samo całkowanie ucieka o ok. 185 m, filtr z biasem w modelu ma błąd wysokości ok. 7,5 cm (RMS), a bias szacuje z dokładnością do  $0,002 \text{ m/s}^2$ . Filtr *bez* biasu w modelu ma błąd ok. 48 cm, a twierdzi, że ok. 8 cm: błędny model daje filtr zbyt pewny siebie.

## SYMULACJA 2

Fuzja barometru i akcelerometru przez 60 s; górny wykres to wycinek 30–40 s. Pas to  $\pm 2\sigma$  deklarowane przez filtr, dolny wykres pokazuje rzeczywisty błąd na tle tego pasa. Wyłącz estymację biasu: błąd wychodzi poza pas. Zmieniaj szum barometru.



RMS błędu wysokości 0,065 m

$\sigma$  deklarowane przez filtr 0,079 m

dryf samego całkowania po 60 s 174,4 m

estymata biasu 0,100 m/s<sup>2</sup>

Akcelerometr daje szybkie zmiany, barometr pilnuje średniej wysokości. Fuzja jest dokładniejsza niż każdy czujnik osobno, a pas  $\pm 2\sigma$  uczciwie opisuje błąd.

Stan na rysunku: barometr  $\sigma = 0,30$  m co 0,1 s, akcelerometr  $\sigma = 0,2$  m/s<sup>2</sup> co 0,01 s, bias 0,10 m/s<sup>2</sup>; filtr z estymacją biasu (3 stany).

## ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Napisz  $F$ ,  $G$ ,  $H$  dla stanu  $[z, v]$  z akcelerometrem jako wejściem i barometrem jako pomiarem,  $T = 0,01$  s.

2 Jak zmieniają się  $F$ ,  $G$ ,  $H$  po dodaniu biasu  $b$  (akcelerometr mierzy  $a + b$ )?



3 Dlaczego estymowanie biasu wymaga, żeby dron w ogóle był obserwowany przez barometr? Odpowiedz przez obserwowalność.



▀▀▀ podstawowe   ▀▀▀ średnie   ▀▀▀ feynmanowskie

### ☰ METODA: PROJEKT FILTRU KALMANA

1. **Model:** stan,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  (dyskretyzacja z lekcji 3.4); czujniki szybkie jako wejście, wolne i dokładne jako pomiar.
2. **Szumy:**  $R$  z karty katalogowej albo z nagrania nieruchomego czujnika;  $Q$  z szumu wejść i niepewności modelu.
3. **Błędy niebiałe** (bias, dryf) jako dodatkowe stany.
4. **Obserwowalność** rozszerzonego stanu.
5. **Sprawdzenie spójności:** rzeczywisty błąd (w symulacji) i innowacje mają być zgodne z  $P$  i  $HP^T - H^T + R$ .

#### Przykład 5.1

### Woltomierz: trzy wartości $R$

50 pomiarów napięcia  $-0,37727\text{ V}$  z szumem  $\sigma = 0,1\text{ V}$ ,  $Q = 10^{-5}$ . Porównaj filtry z  $R = 0,01$  (prawdziwe),  $1$  i  $10^{-4}$ .

1.  $R = 0,01$ :  $K_{50} = 0,034$ , estymata zbliżona do średniej z ostatnich kilkudziesięciu pomiarów.
2.  $R = 1$ :  $K_{50} = 0,020$ , filtr ufa sobie bardziej, ale przy stałej wartości to niewiele szkodzi.
3.  $R = 10^{-4}$ :  $K_{50} = 0,27$ , estymata skacze z każdym pomiarem (w serii z pliku weryfikacyjnego błąd końcowy  $0,044\text{ V}$ , dwa razy więcej niż przy prawdziwym  $R$ ).

**Wynik:** zaniżone  $R$  (filtr nadmiernie wierzy pomiarom) psuje estymatę bardziej niż zawyżone.

**Sprawdzenie:** niepewność średniej z 50 pomiarów to  $0,1/\sqrt{50} = 0,014\text{ V}$ , a deklarowane  $\sqrt{P_{50}} = 0,018\text{ V}$  przy prawdziwym  $R$  ✓ (dodatknie  $Q$  zmniejsza efektywną liczbę pomiarów).

### Przykład 5.2

## Fuzja w dronie

Akcelerometr 100 Hz ( $\sigma_a = 0,2 \text{ m/s}^2$ , bias  $0,1 \text{ m/s}^2$ ), barometr 10 Hz ( $\sigma_b = 0,3 \text{ m}$ ). Porównaj sposoby estymacji wysokości po 60 s.

- 1 Sam barometr: błąd ok. 0,3 m w każdej chwili, bez dryfu.
- 2 Samo całkowanie akcelerometru: ok. 185 m po 60 s (bias), plus błąd od szumu.
- 3 Kalman bez biasu: ok. 0,48 m RMS, deklaruje 0,08 m.
- 4 Kalman z biasem: ok. 0,075 m RMS, deklaruje ok. 0,08 m; bias oszacowany z błędem ok.  $0,002 \text{ m/s}^2$ .

**Wynik:** fuzja jest 4 razy dokładniejsza niż barometr, a filtr uczciwie mówi, ile wie.

**Sprawdzenie:** bez biasu w akcelerometrze filtr dwustanowy osiąga 0,069 m, prawie tyle co trzystanowy z biasem ✓.

## 6 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

### × „Filtr Kalmana to filtr dolnoprzepustowy.”

Jest estymatorem stanu: odtwarza też wielkości niemierzone (prędkość, bias) i zmienia wzmocnienie w czasie, gdy zmienia się niepewność.

### × „Większe $R$ zawsze daje gładszą, a więc lepszą estymatę.”

Gładszą, ale spóźnioną. Optimum jest przy prawdziwych wartościach szumów.

### × „Mała macierz $P$ oznacza, że estymata jest dobra.”

$P$  jest dobre tylko tak, jak model. Filtr bez biasu w modelu deklarował 8 cm, a mylił się o 48 cm.

### × „Filtr Kalmana wymaga szumu gaussowskiego.”

Wśród estymatorów liniowych jest optymalny dla dowolnego szumu o znanych wariancjach; przy szumie gaussowskim jest optymalny wśród wszystkich estymatorów.

× „Akcelerometr nadaje się tylko do pomiaru drgań.”

W fuzji to główne źródło informacji o szybkich zmianach; wolne czujniki tylko pilnują dryfu.

## 7 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

### ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 GPS i nawigacja inercjalna.** Samolot ma platformę inercjalną (akcelerometry i żyroskopy, 200 Hz) i GPS (1 Hz,  $\pm 5$  m). Opisz filtr podobny do drona z części 4. Co się dzieje, gdy GPS zniknie na minutę?
- 2 Odrzucanie dzikich pomiarów.** Barometr czasem zwraca bzdurę (podmuch od śmigła na czujniku). Jak filtr może to wykryć?
- 3 Śledzenie z modelem prędkości.** Radar mierzy co sekundę położenie samolotu. Model „stała prędkość” z zakłóceniem przyspieszenia w  $Q$ . Co się dzieje, gdy samolot nagle skręca? Jak dobrać  $Q$ ?
- 4 Dualność z LQR.** W stanie ustalonym  $P^-$  spełnia równanie Riccatiego. Jakie podstawienie przekształca równanie LQR ( $A, B, Q, R$ ) w równanie filtru ( $A, H, Q_w, R_v$ )?
- 5 LQG.** Połączenie LQR z filtrem Kalmana nazywa się LQG. Co mówi o nim zasada separacji z lekcji 4.2? Czego nie mówi?

▣▣▣ podstawowe   ▣▣▣ średnie   ▣▣▣ feynmanowskie

## 8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jak połączyć dwa pomiary o różnych wariancjach?**

Średnia ważona odwrotnościami wariancji; wariancja wyniku  $\sigma_1^2 \sigma_2^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

- 2 Ile wynosi wzmacnienie Kalmana dla jednego stanu?

$$K = P^- / (P^- + R).$$

- 3 Jakie są dwa kroki filtru?

Predykcja (model,  $P$  rośnie o  $Q$ ) i korekta (pomiar,  $P$  maleje).

- 4 Co oznacza  $Q = 0$ ?

Model idealny:  $K \rightarrow 0$ , filtr przestaje słuchać pomiarów.

- 5 Co to macierz kowariancji  $P$ ?

Niepewność estymaty: wariancje składowych i ich korelacje.

- 6 Jak uwzględnić bias czujnika?

Jako dodatkowy stan o wolnej dynamice ( $\dot{b} = 0$  plus mały szum).

- 7 Jaki jest związek filtru Kalmana z obserwatorem?

W stanie ustalonym to obserwator z optymalnym  $L$  z równania Riccatiego.

## 9 Karta wzorów i co dalej

### FILTR KALMANA

$$\hat{\mathbf{x}}^- = F\hat{\mathbf{x}} + G\mathbf{u}, \quad P^- = FPF^T + Q$$

$$K = P^- H^T (HP^- H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^- + K(\mathbf{z} - H\hat{\mathbf{x}}^-), \quad P = (I - KH)P^-$$

1D:  $K = P^- / (P^- + R)$ ; stan ustalony

$$(P^-)^2 - QP^- - QR = 0$$

### DRON

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0]$$

$$Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 \\ T^3/2 & T^2 \end{bmatrix}, \quad R = \sigma_b^2$$

dryf od biasu:  $\frac{1}{2}bt^2$

bramkowanie:  $\nu^2/S > 9 \rightarrow$  odrzuć

## Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, rozdz. 1 i 3 (krótki, wolny dostęp; przykład z woltomierzem jest stamtąd).
- **Dla chętnych:** A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, rozdz. 7 (Kalman i LQG); S. Brunton, *Control Bootcamp*, wykłady o filtrze Kalmana.

*Filtr Kalmana wymaga modelu liniowego. Orientacja drona już taka nie jest: akcelerometr mierzy  $g \sin \varphi$ , a nie  $g\varphi$ . Następna lekcja pokazuje, jak Schmidt i jego zespół rozwiązali ten problem dla Apollo: linearyzują model wokół bieżącej estymaty. Na przykładzie jednej osi zobaczymy też prostszego kuzyna, filtr komplementarny.*



# Odpowiedzi

## Zadania • część 1

1. Wagi  $1/4$  i  $1$ , czyli  $0,2$  i  $0,8$ :  $\hat{x} = 21,8^\circ\text{C}$ ,  $\sigma = \sqrt{4 \cdot 1/5} \approx 0,89^\circ\text{C}$ .
2.  $z_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(z_2 - z_1) = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)z_1 - \sigma_1^2 z_1 + \sigma_2^2 z_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 z_1 + \sigma_1^2 z_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \checkmark$ .
3. Niepewność średniej  $\sigma/\sqrt{N}$ :  $N = 100$ . Każde zmniejszenie niepewności o połowę wymaga czterokrotnie więcej pomiarów.

## Zadania • część 2

1.  $K_1 = 1/1,01 = 0,990$ ;  $\hat{x}_1 = -0,297$ ;  $P_1 = 0,0099$ . Pierwszy pomiar prawie całkowicie zastępuje niepewny start.
2. Indukcja: jeśli  $P_{k-1} = R/(k-1)$ , to  $K_k = \frac{R/(k-1)}{R/(k-1) + R} = \frac{1}{k}$  i  $P_k = (1 - \frac{1}{k})\frac{R}{k-1} = \frac{R}{k}$ . Z  $K_k = 1/k$ :  $\hat{x}_k = \frac{k-1}{k}\hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}z_k$ , czyli średnia bieżąca.
3.  $P^- = Q + \frac{RP^-}{P^- + R}$ ; mnożymy przez  $P^- + R$ :  $(P^-)^2 = QP^- + QR$ .  $Q = 10^{-5}$ :  $P^- = 3,21 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_\infty = 0,031$  (pamięć ok. 30 pomiarów).  $Q = 10^{-3}$ :  $K_\infty = 0,27$  (pamięć ok. 4 pomiarów).

## Zadania • część 3

1.  $P^- = P + Q$ ,  $K = P^-/(P^- + R)$ ,  $\hat{x} = \hat{x}^- + K(z - \hat{x}^-)$ ,  $P = (1 - K)P^- \checkmark$ .
2.  $K = P^- H^T / (\dots)$  to pierwsza kolumna  $P^-$  podzielona przez liczbę. Jej druga składowa  $P_{zv}^-$  to korelacja błędów wysokości i prędkości, która powstaje w predykcji (błąd prędkości przekłada się na błąd wysokości). Pomiar wysokości mówi więc coś o prędkości.
3. Tylko predykcje:  $P \leftarrow FPF^T + Q$ . Niepewność rośnie: dla wysokości z akcelerometru wariancja rośnie jak  $t^3$  od szumu i jak  $t^4$  od nieznanego biasu (odchylenie standardowe jak  $t^{1,5}$  i  $t^2$ ). Po powrocie pomiaru  $K$  jest duże i estymata szybko „wskakuje” na pomiar.

## Zadania • część 4

1.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-5} \\ 0,01 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \ 0]$ . Pomiar barometru przychodzi co 10 kroków: korekta tylko wtedy.
2. Prawdziwe przyspieszenie to  $a_m - b$ :  $F = \begin{bmatrix} 1 & T & -T^2/2 \\ 0 & 1 & -T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = [T^2/2, \ T, \ 0]^T$ ,  $H = [1 \ 0 \ 0]$ .
3. Bez barometru  $H$  jest puste i nic nie jest obserwowalne. Z barometrem rozszerzony układ ma  $W_o$  rzędu 3 (jak zadanie z rozszerzeniem o siłę w lekcji 4.2): stały bias daje parabolę w wysokości, którą barometr widzi. Gdyby akcelerometr był jedynym czujnikiem, biasu nie dałoby się odróżnić od prawdziwego przyspieszenia.

## Zadania do przemyślenia

1. 1. Inercja jako wejście predykcji, GPS jako pomiar; w stanie pozycja, prędkość, orientacja i biasy czujników. Biasy oszacowane, dopóki GPS działa.  
2. Bez GPS: same predykcje,  $P$  rośnie. Ponieważ biasy są już oszacowane, dryf jest dużo wolniejszy niż w surowej inercji. Po powrocie GPS filtr szybko się koryguje.
2. 1. Innowacja  $\nu = z - H\hat{x}^-$  ma wariancję  $S = HP^-H^T + R$ . Jeśli  $\nu^2/S$  jest bardzo duże (np. powyżej 9, czyli  $3\sigma$ ), pomiar jest podejrzan.  
2. Takiego pomiaru się nie używa albo zwiększa się dla niego  $R$ . To bramkowanie innowacji (ang. *innovation gating*), standard w śledzeniu celów.
3. 1. Przy małym  $Q$  filtr wierzy w prosty lot i przez kilka sekund „wylatuje” na zewnątrz zakrętu. Przy dużym  $Q$  szybko nadąża, ale estymata w locie prostym jest bardziej zaszumiona.  
2. Rozwiązania:  $Q$  z maksymalnego spodziewanego przyspieszenia albo kilka modeli naraz (prosty lot, zakręt) z przełączaniem według innowacji (filtry IMM).
4. 1.  $A \rightarrow A^T, B \rightarrow H^T, Q \rightarrow Q_w, R \rightarrow R_v$ . Wzmocnienie filtru to transponowane wzmocnienie „LQR dla układu dualnego”.  
2. Intuicja: koszt stanu w LQR odpowiada niepewności modelu w filtrze, koszt sterowania odpowiada szumowi pomiaru. Drogie sterowanie to wolny regulator, szum pomiaru to wolny filtr.
5. 1. Mówi, że oba można projektować osobno, a bieguny całości to bieguny LQR i filtru. Dla szumów gaussowskich LQG jest wręcz optymalny dla kosztu oczekiwanego.  
2. Nie mówi nic o odporności na błędy modelu. Doyle pokazał w 1978 r., że LQG może mieć dowolnie małe zapasy stabilności, mimo że LQR miał gwarantowane  $60^\circ$ . Lekcja 5.2 LQG i odporność.

---

Automatyka · Lekcja 4.4: Filtr Kalmana · Źródła: G. Welch, G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter* (UNC TR 95-041); R. E. Kálmán, „A new approach to linear filtering and prediction problems”, *J. Basic Engineering* 82 (1960); A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK* (Wiley 2002), rozdz. 7; L. A. McGee, S. F. Schmidt, „Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry”, NASA TM-86847 (1985). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c4\_4.py).