

LQR: koszt zamiast biegunów

Lokowanie biegunów daje pełną kontrolę nad biegunami, ale nie mówi, gdzie je postawić. Przy czterech stanach to jeszcze sztuka, przy dwunastu (pełny dron albo samolot) już zgadywanie.

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR) zadaje inne pytanie: ile kosztuje uchyb, a ile sterowanie? Z odpowiedzi wynika optymalne K i bieguny, a na dodatek gwarantowane zapasy stabilności.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 3 h zadań

ZADANIA

13 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, rozdz. 6; K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 7.5; A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control*; S. Brunton, *Control Bootcamp* (LQR)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: ile kosztuje uchyb?
- 1 Kryterium kwadratowe
- 2 Rozwiązanie: równanie Riccatiego
- 3 Jeden stan: wszystko widać we wzorze
- 4 Dron w płaszczyźnie i reguła Brysona
- 5 Gwarantowane zapasy
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: ile kosztuje uchyb?

W tym samym 1960 r., w którym Kálmán zdefiniował sterowalność, opublikował też pracę o optymalnym sterowaniu z kryterium kwadratowym. Pomysł był prosty: zamiast mówić regulatorowi, gdzie mają być bieguny, powiedzmy mu, czego chcemy. Mały uchyb, ale bez szarpania silnikami. Każdą z tych chęci zapisujemy jako koszt, a regulator ma zminimalizować ich ważoną sumę.

Okazało się, że dla obiektów liniowych i kosztów kwadratowych optymalne sterowanie jest zawsze liniowym sprzężeniem od stanu $u = -Kx$, a K wynika z jednego równania macierzowego. LQR stał się podstawowym narzędziem przemysłu lotniczego i kosmicznego, a do dziś jest punktem startowym prawie każdego projektu regulatora wielowymiarowego.

Pytanie na start. W lekcji 4.1 dobraliśmy bieguny drona w płaszczyźnie „na oko”: 1,5 i 6 rad/s. Czy istnieje regulator, który przy tym samym zużyciu sterowania sprowadzi drona do celu z mniejszym łącznym uchybem? Odpowiedź w części 4.

1

Kryterium kwadratowe

Dla obiektu $\dot{x} = Ax + Bu$ szukamy sterowania minimalizującego

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt,$$

gdzie $Q \succeq 0$ (macierz półdodatnio określona) waży uchyby stanu, a $R \succ 0$ waży wysiłek sterowania. To funkcjonal, jak w rachunku wariacyjnym (lekcja 6.1 Rachunek wariacyjny): liczba przypisana całej trajektorii. Dla diagonalnych wag $J = \int (q_1 x_1^2 + \dots + q_n x_n^2 + r u^2) dt$: duże q_i znaczy „bardzo mi zależy, żeby x_i było małe”, duże r znaczy „sterowanie jest drogie”.

Dlaczego kwadraty? Trzy powody: karzą duże odchyłki mocniej niż małe (jak energia), dają gładki problem z jednoznacznym minimum i, co najważniejsze, prowadzą do rozwiązania w postaci liniowego sprzężenia od stanu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

2 zadania · ok. 10 min

- 1 Napisz Q i R , jeśli chcemy, żeby położenie drona było 25 razy „ważniejsze” od pochylenia, prędkości nas nie obchodzą, a waga momentu wynosi 100.

- 2 Dlaczego R musi być dodatnio określone, a Q wystarczy półdodatnio?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Rozwiązanie: równanie Riccatiego

REGULATOR LQR

$$u = -K\mathbf{x}, \quad K = R^{-1}B^T P, \quad A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Ostatnie równanie to **algebraiczne równanie Riccatiego**. Szukamy jego rozwiązania symetrycznego, półdodatnio określonego, dającego stabilną pętlę; jest ono jedno, o ile obiekt jest stabilizowalny, a para $(A, Q^{1/2})$ wykrywalna (zadanie 1.2). Przy obserwowalności P jest dodatnio określone. Minimalny koszt dla stanu początkowego $\mathbf{x}_0$ wynosi $J^* = \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0$.

SKĄD RÓWNANIE RICCATIEGO (SZKIC)

Zgadujemy, że najmniejszy koszt „od teraz do końca” zależy od stanu kwadratowo: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$. Wzdłuż optymalnej trajektorii V maleje dokładnie o bieżący koszt: $\dot{V} + \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T R u = 0$, a przy każdym innym u ta suma jest dodatnia. Zatem u minimalizuje $2\mathbf{x}^T P(A\mathbf{x} + B u) + \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T R u$. Pochodna względem u równa zero daje $u = -R^{-1}B^T P \mathbf{x}$. Podstawiając z powrotem i żądając, żeby wynik był zerem dla każdego $\mathbf{x}$, dostajemy równanie Riccatiego. Ścisłe wyprowadzenie (zasada Bellmana albo Pontriagina, lekcja 5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów) daje to samo.

MATLAB → PYTHON

Książki (Tewari, Ogata) używają MATLAB-a. Odpowiedniki w Pythonie: `[K,S,e] = lqr(A,B,Q,R)` → `K, S, E = control.lqr(A, B, Q, R)`; `care(A,B,Q,R)` → `scipy.linalg.solve_continuous_are(A, B, Q, R)`; `place` → `control.place`; `ss`, `step`, `initial` → `control.ss`, `control.step_response`, `control.initial_response`; `ctrb`, `obsv` → `control.ctrb`, `control.obsv`.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

2 zadania · ok. 20 min

- 1 W szkicu: pokaż, że minimum $2\mathbf{x}^T P B u + u^T R u$ względem u jest w $u = -R^{-1}B^T P \mathbf{x}$.
- 2 Dlaczego K nie zależy od stanu początkowego, choć optymalna trajektoria od niego zależy?

3 Jeden stan: wszystko widać we wzorze

Dla $\dot{x} = ax + bu$, $J = \int (qx^2 + ru^2) dt$ równanie Riccatiego jest kwadratowe w P : $2aP - \frac{b^2}{r}P^2 + q = 0$. Dodatni pierwiastek:

$$P = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{r}} \right), \quad K = \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{r}}}{b}, \quad \text{biegun} = -\sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{r}}.$$

Ten wzór mówi wszystko o LQR:

- liczy się tylko stosunek q/r ;
- **sterowanie tanie** ($q/r \rightarrow \infty$): biegun $\approx -b\sqrt{q/r}$, coraz szybciej;
- **sterowanie drogie** ($q/r \rightarrow 0$): biegun $\rightarrow -|a|$. Obiekt stabilny zostaje prawie bez zmian, a niestabilny ($a > 0$) zostaje „odbity” na lewo, z minimalnym wysiłkiem.

Prędkość drona ($a = -0,5$, $b = 1$): przy $q = r$ biegun $-1,12$ i $K = 0,62$; przy $q/r = 16$ biegun $-4,03$, $K = 3,53$ (prawie regulator P z lekcji 1.3).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

1 Prędkość drona, $q = 100$, $r = 1$. Policz K i biegun.

2 Ten sam obiekt, $q = 1$, $r = 100$. Ile wynosi K ? Skomentuj.

3 Obiekt niestabilny $a = +2$, $b = 1$, sterowanie bardzo drogie. Gdzie trafi biegun? Ile wynosi K ?

4 Dron w płaszczyźnie i reguła Brysona

Jak wybrać Q i R ? Praktyczna reguła Brysona: wagi to odwrotności kwadratów dopuszczalnych wartości: Bryson-Ho

$$Q_{ii} = \frac{1}{x_{i,\max}^2}, \quad R = \frac{1}{u_{\max}^2}.$$

Dla drona w płaszczyźnie: uchyb położenia do 1 m, pochylenie do 0,2 rad (ok. 11°), moment do 0,1 N·m. Daje to $Q = \text{diag}(1, 0, 25, 0)$, $R = 100$ i (python-control)

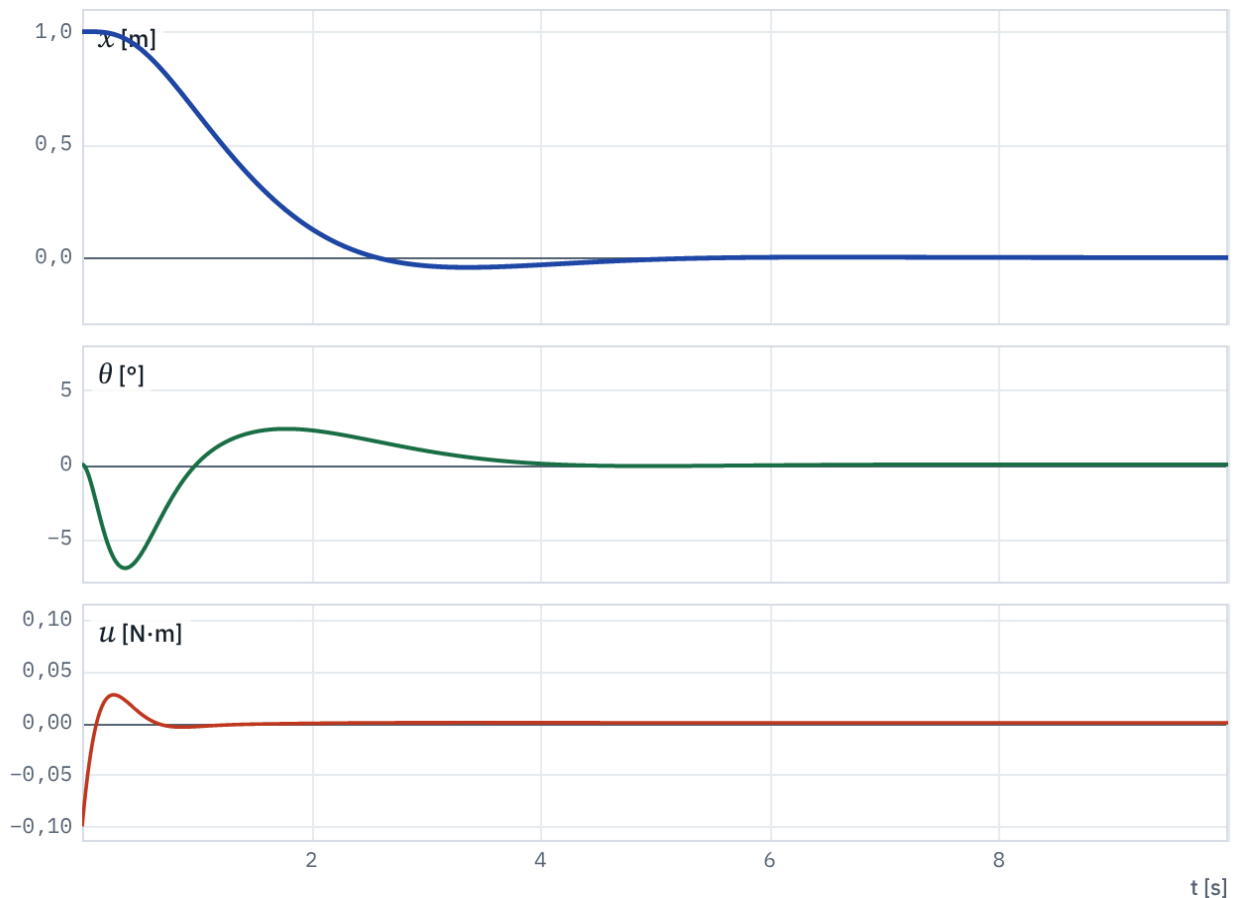
$$K = [0,100; 0,121; 0,717; 0,120], \quad \text{bieguny} = 0,99 \pm 0,99j, -5 \pm 5j.$$

Obie pary mają $\zeta = 0,71$. Nikt tego nie zadał: wynikło z optymalizacji. Przy starcie 1 m od celu moment osiąga dokładnie 0,1 N·m, pochylenie 7°, czas ustalania 4,5 s.

Odpowiedź na pytanie z prologu. Porównajmy dwie miary: łączny uchyb $\int x^2 dt$ i łączny wysiłek $\int u^2 dt$. Projekt z lokowania biegunów (1,5 i 6 rad/s) daje 0,938 m²·s przy $\int u^2 = 0,0004$. LQR z kosztem tylko na położenie i takim ρ , żeby wysiłek był ten sam, daje 0,833 m²·s, o 11% mniej. Dla tego stanu początkowego żaden regulator (nawet nieliniowy) nie zrobi lepiej: LQR leży na **froncie Pareto**, a każdy inny projekt nad nim.

SYMULACJA 1

LQR dla drona w płaszczyźnie z regułą Brysona. Zamiast biegunów ustawiasz dopuszczalne wartości: uchybu, pochylenia i momentu. Zmniejsz dopuszczalne pochylenie do kilku stopni: dron leci łagodniej. Zwiększ dopuszczalny moment: pętla przyspiesza.



— położenie $x(t)$ — pochylenie $\theta(t)$ — moment $u(t)$

K 0,100; 0,121; 0,716; 0,120

bieguny $-0,99 \pm 0,99j$; $-4,99 \pm 4,99j$

największe pochylenie 7,0°

największy moment 0,100 N·m

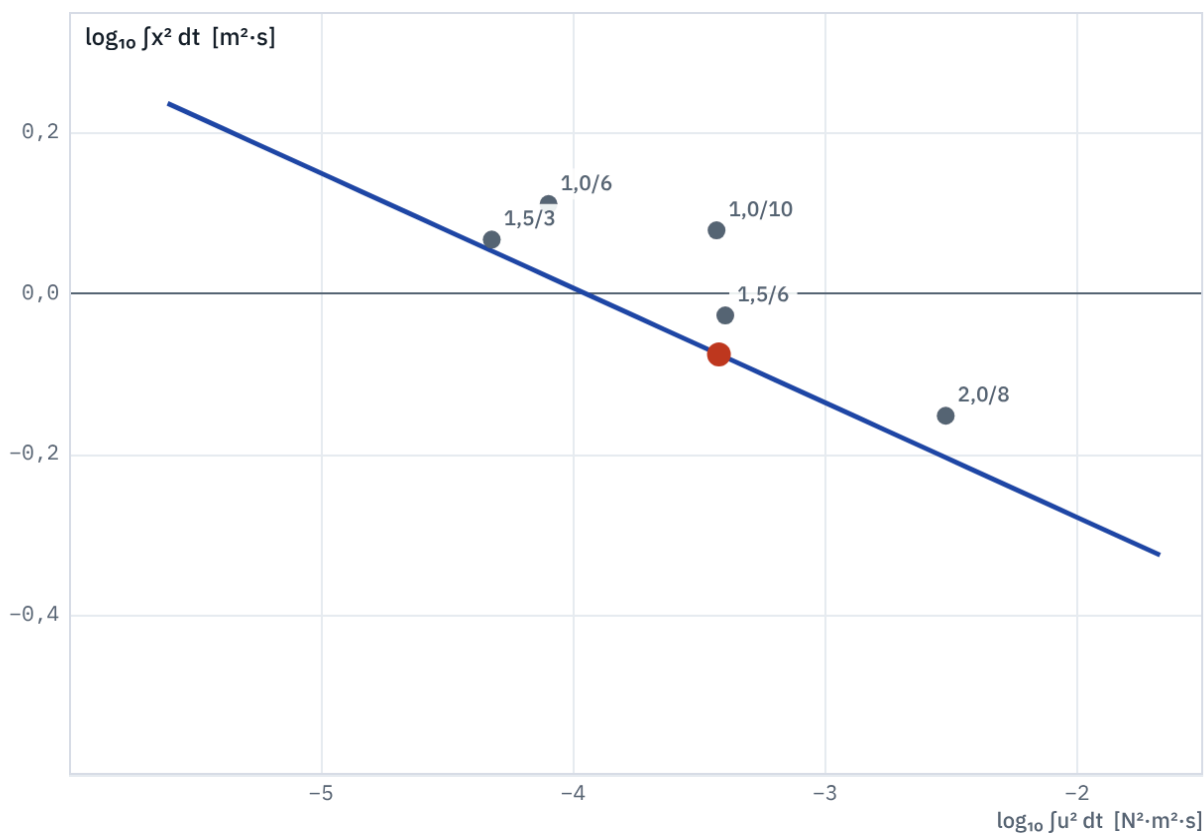
czas ustalania (2 cm) 4,45 s

Zamiast czterech biegunów wybierasz trzy liczby, które mają sens fizyczny: ile uchybu, ile pochylenia, ile momentu tolerujesz. Bieguny wynikają z kompromisu same.

Stan na rysunku: $Q = \text{diag}(1/x_{\max}^2, 0, 1/\theta_{\max}^2, 0)$, $R = 1/u_{\max}^2$; $x_{\max} = 1,00$ m, $\theta_{\max} = 12^\circ$, $u_{\max} = 0,100$ N·m; start $x = 1$ m.

SYMULACJA 2

Front Pareto: łączny uchyb położenia kontra łączny wysiłek dla LQR z różnymi wagami ρ (niebieska krzywa). Szare punkty to projekty z lokowania biegunów (opisane jako ω_0 par położenie/pochylenie). Wszystkie leżą nad krzywą.



— front LQR (Q tylko na położenie) — wybrane ρ — projekty z lokowania biegunów ($\zeta = 0,7$)

$\int x^2 dt$ 0,839 m²·s

$\int u^2 dt$ 0,000379 N²·m²·s

K 0,056; 0,054; 0,254; 0,071

Każdy punkt na niebieskiej krzywej to LQR dla innej wagi ρ : nie da się zmniejszyć $\int x^2$ bez zwiększenia $\int u^2$. Szare projekty z lokowania biegunów leżą nad krzywą: przy tym samym wysiłku zostawiają większy uchyb.

Stan na rysunku: dron w płaszczyźnie, start $x = 1$ m; LQR z $Q = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$, $R = \rho = 10^{-2,50}$; szare punkty: ω_0 par położenie/pochylenie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

1 Zastosuj regułę Brysona: uchyb położenia do 0,5 m, pochylenie do 10°, moment do 0,05 N·m.

2 Z $Q = \text{diag}(1, 0, 25, 0)$ pomnóż R przez 10 i przez 0,1. Co się dzieje z szybkością i wolną parą biegunów?

- 3 W symulacji 2 przesun ρ tak, żeby czerwony punkt był na tej samej wysokości ($\int x^2$) co projekt 1,5/6. Ile wysiłku oszczędza LQR?

- 4 Bieguny LQR z $Q = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$ leżą na okręgu w kątach $\pm 22,5^\circ$ i $\pm 67,5^\circ$ od osi rzeczywistej (wzór Butterwortha 4. rzędu). Sprawdź na danych dla $\rho = 100$: $-1,2 \pm 2,91j$ i $-2,91 \pm 1,2j$.

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ feynmanowskie

5 Gwarantowane zapasy

LQR z pełnym stanem i jednym wejściem ma własność, której nie daje lokowanie biegunów: dla każdych Q i R transmitancja pętli $L(s) = K(sI - A)^{-1}B$ spełnia

$$|1 + L(j\omega)| \geq 1 \quad \text{dla każdego } \omega.$$

Wykres Nyquista nigdy nie wchodzi do koła o promieniu 1 wokół -1 , czyli $\max |S| \leq 1$ (lekcja 2.5). Z tego wynikają **gwarantowane zapasy**: wzmocnienie może wzrosnąć dowolnie albo zmaleć do połowy, a zapas fazy wynosi co najmniej 60° . Dla drona w płaszczyźnie z wagami Brysona: zapas fazy 63° , $\min |1 + L| = 1,000$.

Haczyk: gwarancja dotyczy pętli przeciętej na wejściu obiektu i regulatora, który zna **cały stan dokładnie**. Z obserwatorem albo filtrem Kalmana (LQG) znika. To słynne odkrycie Doyle'a z 1978 r., temat lekcji 5.2 LQG i odporność.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 15 min

- 1 Pokaż, że z $|1 + L| \geq 1$ wynika zapas fazy co najmniej 60° . Wskazówka: przy ω_c jest $|L| = 1$; gdzie przecinają się okręgi $|L| = 1$ i $|1 + L| = 1$?

- 2 Dlaczego z $|1 + L| \geq 1$ wynika, że wzmocnienie może zmaleć do połowy?

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: PROJEKT LQR

1. Model A, B i sprawdzenie stabilizowalności.
2. Wagi z reguły Brysona; stany nieistotne z wagą 0; ewentualnie stan całki uchybu (lekcja 4.1).
3. Rozwiązanie: `K, P, E = control.lqr(A, B, Q, R)`.
4. Sprawdzenie: maksymalne sterowanie i stany w symulacji dla typowych manewrów; poprawka wag (zwykle 2–3 iteracje).
5. Estymator stanu (lekcje 4.2, 4.4) i sprawdzenie odporności całości.

Przykład 6.1

LQR prędkości drona

$\dot{v} = -0,5v + u$. Chcemy, żeby uchyb prędkości $0,25 \text{ m/s}$ „kosztował” tyle co 1 N ciągu. Wyznacz K .

- 1 Bryson: $q = 1/0,25^2 = 16, r = 1$.
- 2 $K = -0,5 + \sqrt{0,25 + 16} = 3,53$, biegun $-4,03$.

Wynik: $u = -3,53v$: regulator P prędkości z lekcji 1.3 ($K_p = 3,5$) okazuje się prawie optymalny dla takich wag.

Sprawdzenie: `control.lqr` daje $K = 3,5311, P = 3,5311 \checkmark$ (tu $P = K$, bo $b = r = 1$).

Przykład 6.2

Dron w płaszczyźnie: Bryson

$Q = \text{diag}(1, 0, 25, 0)$, $R = 100$. Policz K , bieguny i odpowiedź z $x_0 = 1$ m.

- 1 $K = [0,100; 0,121; 0,717; 0,120]$.
- 2 Bieguny $-0,99 \pm 0,99j$ i $-5 \pm 5j$, obie pary z $\zeta = 0,71$.
- 3 Moment największy 0,100 N·m (dokładnie $u_{\max}$, bo $k_1 x_0 = 0,1$), pochylenie $7,0^\circ$, czas ustalania 4,5 s.

Wynik: regulator spełnia założone limity „z marszu”, a bieguny wyszły rozsądne bez zgadywania.

Sprawdzenie: residuum równania Riccatiego dla

`scipy.linalg.solve_continuous_are` ok. $3 \cdot 10^{-13}$ ✓; zapas fazy 63° ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Optymalny znaczy najlepszy.”

Optymalny względem wybranego kryterium. Złe wagi dają optymalnie zły regulator. Wybór Q i R to wciąż decyzja inżyniera, tylko lepiej opisana.

× „LQR uwzględnia ograniczenia sterowania.”

Nie: koszt u^2 tylko je zniechęca. Twarde ograniczenia trzeba sprawdzić w symulacji albo użyć sterowania predykcyjnego (MPC).

× „LQR zawsze ma zapas fazy 60° .”

Tylko przy pełnym, dokładnym stanie i pętli przeciętej na wejściu. Z estymatorem gwarancja znika.

× „Wagi trzeba dobierać długo metodą prób i błędów.”

Reguła Brysona daje dobry start w minutę; zwykle wystarczą 2–3 poprawki.

× „Równanie Riccatiego trzeba rozwiązywać ręcznie.”

Ręcznie tylko dla jednego stanu, żeby zrozumieć. W praktyce jedna linijka w Pythonie.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Podwójny integrator.** $\ddot{x} = u$, $J = \int (x^2 + ru^2) dt$. Rozwiąż równanie Riccatiego ręcznie i pokaż, że bieguny mają $\zeta = 1/\sqrt{2}$ przy każdym r .

- 2 **Koszt czasu.** Czy LQR minimalizuje czas dojścia do celu? Co trzeba by zmienić w kryterium?

- 3 **Waga na prędkość.** Dodaj do kryterium drona w płaszczyźnie wagę na prędkość $\dot{x}$. Jak to zmieni zachowanie? Kiedy jest to potrzebne?

- 4 **Skończony horyzont.** Satelita ma zakończyć manewr dokładnie po 100 s. Czym różni się LQR ze skończonym horyzontem od tego z tej lekcji?

- 5 **Odwrotny problem.** Masz regulator z lokowania biegunów. Czy istnieją Q, R , dla których jest on LQR? Co mówi o tym warunek $|1 + L| \geq 1$?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Jakie kryterium minimalizuje LQR?

$$J = \int (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt.$$

- 2 Jak wyznaczyć K ?

$$K = R^{-1} B^T P, P \text{ z algebraicznego równania Riccatiego.}$$

- 3 Co mówi reguła Brysona?

$$Q_{ii} = 1/x_{i,\max}^2, R = 1/u_{\max}^2.$$

4 Biegun LQR dla jednego stanu?

$$-\sqrt{a^2 + b^2 q/r}.$$

5 Co się dzieje przy bardzo drogim sterowaniu?

Bieguny stabilne zostają, niestabilne odbijają się lustrzanie na lewą stronę.

6 Jakie zapasy gwarantuje LQR?

Zapas fazy $\geq 60^\circ$, wzmacnienie od $1/2$ do ∞ (pełny stan, jedno wejście).

7 Co to front Pareto?

Zbiór projektów, w których nie da się zmniejszyć uchybu bez zwiększenia wysiłku; LQR leży na nim.

LQR

$$J = \int (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

$$K = R^{-1} B^T P, \quad J^* = \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0$$

skalar: biegun $-\sqrt{a^2 + b^2 q/r}$

Bryson: $Q_{ii} = 1/x_{i,\max}^2, R = 1/u_{\max}^2$

WŁASNOŚCI I PYTHON

$$|1 + L(j\omega)| \geq 1: \text{PM} \geq 60^\circ, \text{GM} \in [1/2, \infty)$$

tylko stosunek $Q : R$ ma znaczenie

```
K, P, E = control.lqr(A, B, Q, R)
```

```
scipy.linalg.solve_continuous_are(A, B, Q, R)
```

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, rozdz. 6 (LQR z przykładami lotniczymi; kod MATLAB przetłumaczysz według ramki wyżej).
- **Dla chętnych:** A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control*, klasyka; S. Brunton, *Control Bootcamp*, wykłady o LQR (wideo).

LQR odpowiada na pytanie, jak sterować, gdy znamy stan. Dualne pytanie brzmi: jak optymalnie estymować stan, gdy znamy statystykę szumów pomiaru i zakłóceń? Odpowiedzią jest filtr Kalmana, najważniejszy algorytm estymacji XX wieku i temat następnej lekcji.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Dla $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$: $Q = \text{diag}(25, 0, 1, 0)$, $R = 100$. Liczy się tylko stosunek wag: Q i R pomnożone przez tę samą liczbę dają to samo K .
2. Gdyby sterowanie było „darmowe” w jakimś kierunku (R osobliwe), optimum żądałoby nieskończonego sterowania (natychmiastowego skoku stanu). Stany natomiast mogą być nieważone (np. prędkość), byle pętla była stabilna: wtedy potrzebne jest, żeby nieważone stany „widział” koszt przez dynamikę (formalnie: para $(A, Q^{1/2})$ wykrywalna).

Zadania · część 2

1. Gradient: $2B^T P \mathbf{x} + 2Ru = 0$ (korzystamy z symetrii P i R). Stąd $u = -R^{-1}B^T P \mathbf{x}$. To minimum, bo hesjan $2R$ jest dodatnio określony.
2. Problem jest liniowy z kosztem kwadratowym i nieskończonym horyzontem: z każdego stanu „reszta” wygląda tak samo (zasada optymalności Bellmana). Optymalna reguła jest więc funkcją bieżącego stanu, ta sama dla każdego początku.

Zadania · część 3

1. $\sqrt{0,25 + 100} = 10,01$; $K = -0,5 + 10,01 = 9,51$, biegun $-10,01$.
2. $\sqrt{0,25 + 0,01} = 0,51$, $K = 0,0099$, biegun $-0,51$. Sterowanie jest tak drogie, że regulator prawie nic nie robi: obiekt i tak jest stabilny.
3. Biegun $\rightarrow -2$ (odbicie lustrzane $+2$), $K \rightarrow 2a/b = 4$. To najtańszy sposób stabilizacji: każdy regulator musi przesunąć ten biegun na lewo, a LQR robi to najmniejszym kosztem.

Zadania · część 4

1. $10^\circ = 0,175 \text{ rad}$. $Q = \text{diag}(4, 0, 32, 8, 0)$, $R = 400$.
2. Wolna para zostaje przy $-0,99 \pm 0,99j$, szybka zmienia się: $-2,8 \pm 2,8j$ (droższe sterowanie) i $-8,9 \pm 8,9j$ (tańsze). Moment największy: $0,03$ i $0,32 \text{ N}\cdot\text{m}$. Wolna para zależy głównie od kosztu położenia, a szybka od kompromisu pochylenie–moment.
3. Przy $\int x^2 \approx 0,94$ LQR potrzebuje $\int u^2 \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$ ($\rho \approx 770$), czyli ok. 2,3 razy mniej niż lokowanie ($4 \cdot 10^{-4}$).
4. Moduły: $\sqrt{1,2^2 + 2,91^2} = 3,15$ dla obu par. Kąty od osi rzeczywistej ujemnej: $\arctan(2,91/1,2) = 67,6^\circ$ i $\arctan(1,2/2,91) = 22,4^\circ \checkmark$. Dla tego obiektu (cztery całkowania, bez zer) bieguny spełniają $s^8 = -(g/J)^2/\rho$, więc wzór Butterwortha zachodzi dokładnie przy każdym ρ . Dla innych obiektów to tylko granica taniego sterowania.

Zadania · część 5

1. Punkty $L = e^{j\varphi}$ z $|1 + e^{j\varphi}| = 1$: $2 + 2 \cos \varphi = 1$, $\cos \varphi = -1/2$, $\varphi = \pm 120^\circ$. Punkt L leżący poza kołem wokół -1 ma fazę między -120° a 120° , czyli co najmniej 60° od -180° .

2. Przy $L(j\omega)$ rzeczywistym ujemnym (faza -180°) mamy $|1 + L| \geq 1$, więc $L \leq -2$. Żeby trafić w -1 , trzeba go przemnożyć przez co najwyżej $1/2$. Przemnożenie przez liczbę większą od 1 przesuwa go dalej od -1 .

Zadania do przemyślenia

1. 1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = [0, 1]^T$. Równania na $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$: $1 - p_2^2/r = 0$, $p_1 - p_2 p_3/r = 0$, $2p_2 - p_3^2/r = 0$. Stąd $p_2 = \sqrt{r}$, $p_3 = \sqrt{2} r^{3/4}$.
2. $K = [p_2/r, p_3/r] = [r^{-1/2}, \sqrt{2} r^{-1/4}]$. Wielomian $s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2$ z $\omega_0 = r^{-1/4}$: $\zeta = \sqrt{2}/2 \checkmark$, niezależnie od r .
2. 1. Nie: minimalizuje ważoną sumę kwadratów. Czas pojawia się tylko pośrednio.
2. Minimalny czas przy ograniczonym sterowaniu to inny problem: kryterium $J = \int 1 dt$ i $|u| \leq u_{\max}$. Rozwiązanie jest typu „bang-bang” i nieliniowe: zasada maksimum Pontriagina, lekcja 5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów.
3. 1. Kara za prędkość daje spokojniejszy przelot, mniejsze przeregulowanie, ale wolniejsze dojście. Działa jak tłumienie.
2. Potrzebne, gdy ważne są prędkości: pasażerowie, ładunek na lince (lekcja 4.1), ograniczenia przepisów. Reguła Brysona: $1/\dot{x}_{\max}^2$.
4. 1. Kryterium $\int_0^T (\dots) dt + \mathbf{x}(T)^T S \mathbf{x}(T)$. $P(t)$ spełnia różniczkowe równanie Riccatiego całkowane wstecz od $P(T) = S$, więc $K(t)$ zmienia się w czasie.
2. Daleko od końca $P(t)$ jest prawie stałe i równe rozwiązaniu algebraicznemu. Pod koniec K rośnie, żeby „zdażyć”. To most do sterowania optymalnego w lekcji 5.1 i do Tewarięgo.
5. 1. Nie zawsze. Każdy LQR (jedno wejście, pełny stan) spełnia $|1 + L(j\omega)| \geq 1$. Jeśli regulator z lokowania biegunów tego nie spełnia, nie jest optymalny dla żadnych Q, R .
2. Jeśli spełnia (pętla stabilna, (A, B) sterowalne), da się dobrać odpowiednie Q (wynik Kalmana z 1964 r., tzw. odwrotny problem optymalności). Ciekawostka: projekt 1,5/6 z lekcji 4.1 ma $\min |1 + L| = 0,9998$, minimalnie poniżej 1, więc nie jest LQR dla żadnych wag.

Automatyka · Lekcja 4.3: LQR · Źródła: A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK* (Wiley 2002), rozdz. 6; K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems* (Princeton 2008); A. E. Bryson, Y.-C. Ho, *Applied Optimal Control* (1969, wyd. poprawione 1975); R. E. Kálmán, „Contributions to the theory of optimal control”, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (1960). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c4_3.py).