

Sprzężenie od stanu, lokowanie biegunów i sterowalność

Dron, który ma polecieć 1 m w bok, musi najpierw się pochylić, a potem wyprostować. To dwie wielkości (położenie i pochylenie) i jedno sterowanie (różnica ciągu silników).

Transmitancje z części II opisują jedno wejście i jedno wyjście. Tu przechodzimy do opisu w przestrzeni stanów, w którym regulator widzi cały stan obiektu naraz. Okaże się, że jednym wektorem wzmocnień można ustawić wszystkie bieguny dowolnie, o ile obiekt jest sterowalny. Zobaczymy też, kiedy nie jest.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 3 h zadań

ZADANIA

12 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 7; A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, rozdz. 5; S. Brunton, wykłady *Control Bootcamp* (sterowalność, lokowanie biegunów)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: stan zamiast wyjścia
- 1 Od PD do sprzężenia od stanu
- 2 Lokowanie biegunów: dron w płaszczyźnie
- 3 Sterowalność
- 4 Wartość zadana i całkowanie
- 5 Metoda i przykłady rozwiązane
- 6 Błędne intuicje
- 7 Zadania do przemyślenia
- 8 Sprawdź się
- 9 Karta wzorów i co dalej

Prolog: stan zamiast wyjścia

W 1960 r. na pierwszym kongresie IFAC w Moskwie Rudolf Kálmán przedstawił pracę „On the general theory of control systems”. Zamiast transmitancji, czyli relacji wejście-wyjście, opisał obiekt *stanem*: zestawem liczb, który razem z przyszłymi wejściami wyznacza całą przyszłość. Zadał też pytanie, którego teoria klasyczna nie stawiała: czy wejście w ogóle jest w stanie osiągnąć każdej części obiektu? Nazwał tę własność **sterowalnością**.

Moment był nieprzypadkowy: trwał wyścig kosmiczny, a rakiety i statki kosmiczne mają wiele wejść, wiele wyjść i dynamikę, której nie da się wygodnie opisać jedną transmitancją. Opis stanowy szybko trafił do programu Apollo (nawigacja z filtrem Kalmana, lekcja 4.4), a potem stał się językiem całej nowoczesnej automatyki. W lekcji 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów poznaliśmy równanie stanu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$. Teraz zamykamy przez nie pętlę.

Pytanie na start. Pod dronem wiszą na linkach dwa ładunki. Dron może się poruszać w bok, żeby wygasić ich wahania. Czy zawsze mu się to uda? Odpowiedź w części 3.

Od PD do sprzężenia od stanu

Wysokość drona ($m = 1$ kg, $b = 0,5$ N·s/m) ma stan $\mathbf{x} = [z, v]^T$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Sprzężenie od stanu to sterowanie liniowo zależne od całego stanu: $u = -K\mathbf{x} = -k_1z - k_2v$. To po prostu regulator PD ($K_p = k_1$, $K_d = k_2$), tyle że pochodną wysokości bierzemy z pomiaru prędkości, a nie z różniczkowania. Pętla zamknięta:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}, \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = s^2 + (0,5 + k_2)s + k_1.$$

Bieguny to wartości własne $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ (lekcja 2.3 Wartości i wektory własne). Mamy dwa wzmocnienia i dwa współczynniki wielomianu, więc bieguny ustawiamy dowolnie: dla $\omega_0 = 2$, $\zeta = 0,7$ ($s^2 + 2,8s + 4$) wychodzi $k_1 = 4$, $k_2 = 2,3$, dokładnie PD z lekcji 2.2.

SPRZĘŻENIE OD STANU

$$u = -K\mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}, \quad \text{bieguny} = \text{wartości własne } \mathbf{A} - \mathbf{BK}.$$

Dla jednego wejścia K jest wierszem o n elementach, a wielomian charakterystyczny ma n współczynników. Jeśli obiekt jest sterowalny, każdy zestaw n biegunów (zespolone w parach sprzężonych) da się osiągnąć dokładnie jednym K .

- 1 Wyznacz $A - BK$ dla wysokości drona i sprawdź jej wielomian charakterystyczny.
- 2 Dobierz K dla biegunów -3 i -4 .
- 3 Czym sprzężenie od stanu $u = -k_1z - k_2v$ różni się w praktyce od PD $u = -K_pz - K_d\dot{z}$ liczonego z barometru?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

2 Lokowanie biegunów: dron w płaszczyźnie

Dron, który ma się przesunąć w bok, pochyla się o kąt θ . Składowa pozioma ciągu $mg \sin \theta \approx mg \theta$ przyspiesza go w bok. Pochylenie zmienia moment u od różnicy ciągu silników (moment bezwładności $J = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$). Wokół zawisu:

$$\ddot{x} = g\theta, \quad \ddot{\theta} = \frac{u}{J}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix}.$$

To cztery całkowania w szeregu: moment $\rightarrow$ prędkość kątowa $\rightarrow$ kąt $\rightarrow$ przyspieszenie $\rightarrow$ prędkość $\rightarrow$ położenie. Z $u = -k_1x - k_2\dot{x} - k_3\theta - k_4\dot{\theta}$ wielomian charakterystyczny wynosi

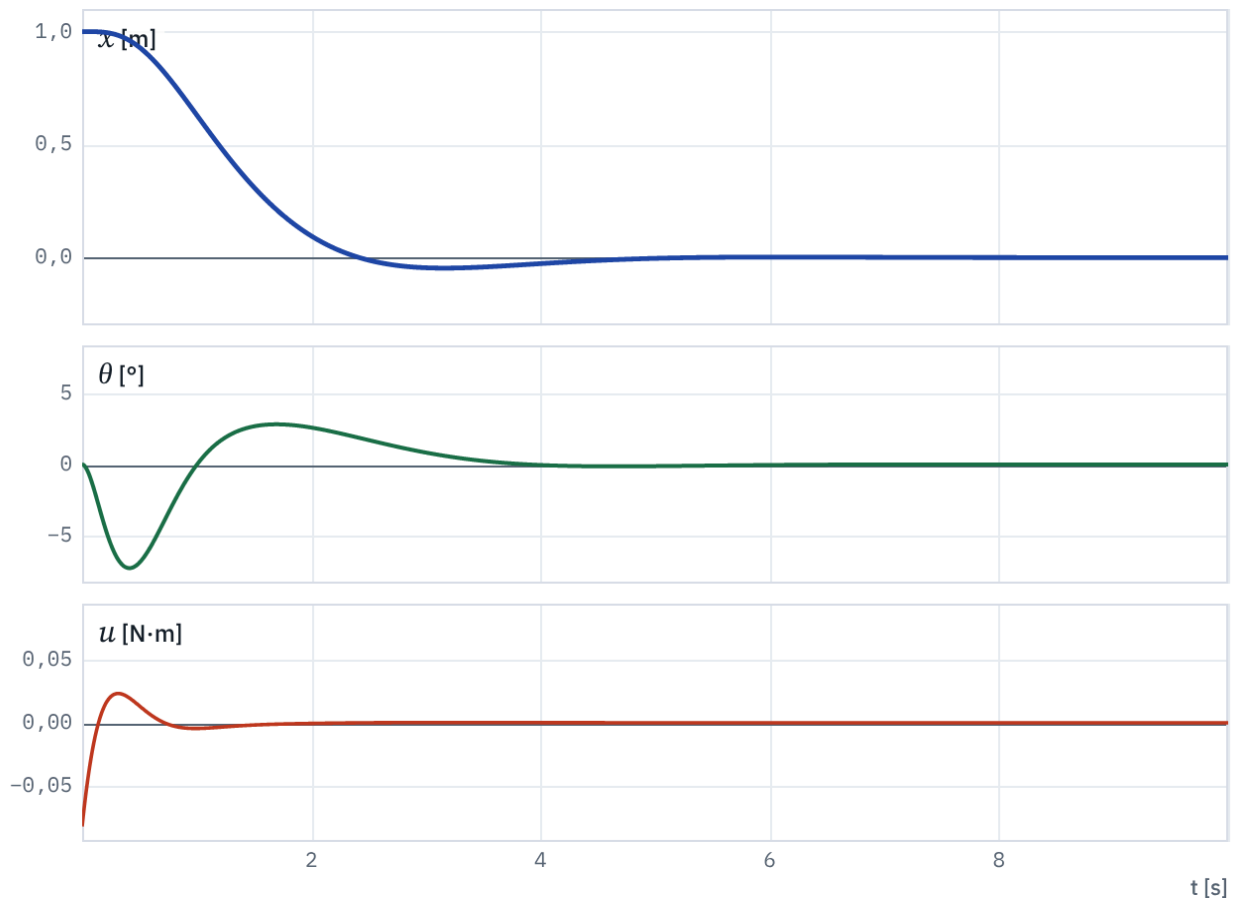
$$s^4 + \frac{k_4}{J}s^3 + \frac{k_3}{J}s^2 + \frac{gk_2}{J}s + \frac{gk_1}{J}.$$

Cztery wzmocnienia i cztery współczynniki: wybieramy bieguny, mnożymy czynniki i porównujemy. Rozsądny wybór to para wolna „położenie” ($\omega_0 \approx 1,5 \text{ rad/s}$) i para szybka „pochylenie” ($\omega_0 \approx 6 \text{ rad/s}$). To ta sama myśl co w kaskadzie z lekcji 3.2 Strojzenie: model z testu, reguły nastaw i regulacja kaskadowa, tyle że w jednym regulatorze.

Dla większych n porównywanie współczynników staje się żmudne, ale istnieje wzór zamknięty, **wzór Ackermanna**: $K = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] W_c^{-1} \varphi(A)$, gdzie φ to pożądaný wielomian charakterystyczny, a W_c macierz sterowalności z części 3. W Pythonie: `control.place(A, B, bieguny)`.

SYMULACJA 1

Dron w płaszczyźnie startuje 1 m od celu. Wybierasz dwie pary biegunów, a wzór Ackermanna liczy K . Przyspiesz parę „położenie”: rośnie pochylenie i moment. Zbliź parę „pochylenie” do pary „położenie”: odpowiedź się pogarsza.



— położenie $x(t)$ — pochylenie $\theta(t)$ — moment $u(t)$

$K = [k_x, k_v, k_\theta, k_\omega] \ 0,083; \ 0,096; \ 0,559; \ 0,105$

największe pochylenie $7,3^\circ$

największy moment $0,083 \text{ N}\cdot\text{m}$

czas ustalania (2 cm) $4,22 \text{ s}$

Cztery bieguny ustawione dowolnie jednym wektorem K . Szybsze bieguny to większe wzmocnienia, większe pochylenia i momenty.

Stan na rysunku: bieguny $\omega_0 = 1,50$ i $6,0 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0,70$; $J = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; start $x = 1 \text{ m}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 30 min

- 1 Wyprowadź wielomian charakterystyczny drona w płaszczyźnie. Wskazówka: z $\ddot{x} = g\theta$ i $J\ddot{\theta} = u$ dostajemy $Jx^{(4)} = gu$.

2 Policz K dla par $\omega_0 = 1,5$ i 6 rad/s, obie z $\zeta = 0,7$.

3 W symulacji 1 porównaj ω_0 „położenia” $1, 1,5$ i 2 rad/s (para „pochylenie” $6, 6, 8$ rad/s).
Jak zmieniają się czas ustalania i największe pochylenie?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Sterowalność

Kiedy lokowanie biegunów zawodzi? Wtedy, gdy jakaś część stanu jest „poza zasięgiem” wejścia. Kálmán podał prosty test. Wejście działa bezpośrednio w kierunku B , po chwili też AB (bo $\dot{x}$ zawiera Ax), potem A^2B i tak dalej. Obiekt jest **sterowalny**, gdy te kierunki rozpinają całą przestrzeń stanu: Åström-Murray 7.1

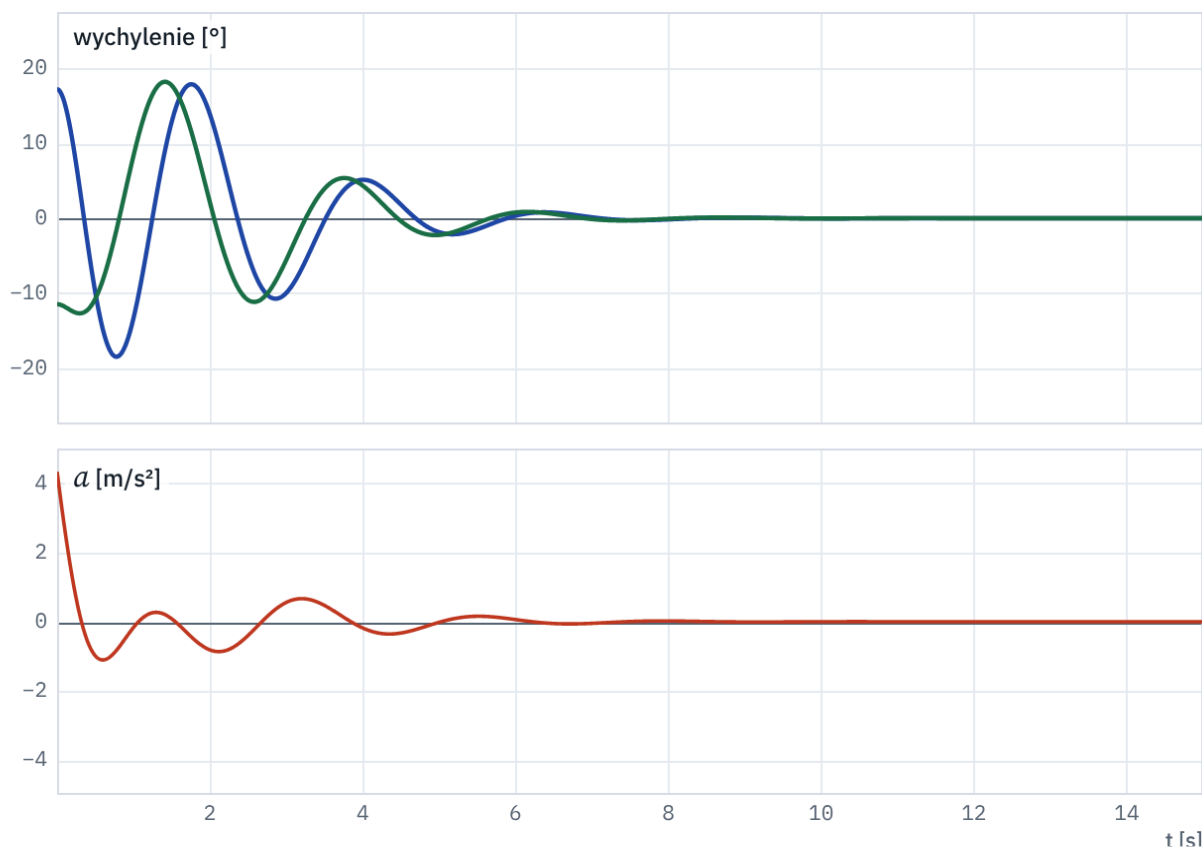
$$W_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad \text{sterowalny} \iff \text{rank } W_c = n.$$

Dla drona w płaszczyźnie W_c ma niezerowe elementy tylko na antyprzekątnej (100, 100, 981, 981): rząd 4, sterowalny.

Odpowiedź na pytanie z prologu. Dwa ładunki na linkach L_1, L_2 pod dronem, sterowanie to przyspieszenie poziome drona a . Wokół pionu każdy ładunek to wahadło popychane przez a : $\ddot{\theta}_i = -\frac{g}{L_i}\theta_i - \frac{a}{L_i}$. Gdy $L_1 = L_2$, oba równania są identyczne. Różnica $\theta_1 - \theta_2$ spełnia wtedy $(\theta_1 - \theta_2)'' = -\frac{g}{L}(\theta_1 - \theta_2)$ niezależnie od a : **żaden ruch drona jej nie zmieni**. Rząd W_c wynosi 2, nie 4. Gdy długości są różne, wahadła mają różne częstotliwości i jednym sterowaniem można wygasić oba wahania. Im bliższe długości, tym większego przyspieszenia to wymaga.

SYMULACJA 2

Dwa ładunki pod dronem, wychylone o $0,3$ i $-0,2$ rad. Regulator zostawia częstotliwości własne wahadeł i dokłada tłumienie $\zeta = 0,3$. Zbliżaj długość drugiej linki do 1 m i patrz na przyspieszenie drona i wychylenia ładunków.



— wychylenie ładunku 1 ($L_1 = 1$ m) — wychylenie ładunku 2 — przyspieszenie drona $a(t)$

częstotliwości własne 3,132 i 2,557 rad/s

sterowalny? tak (rząd 4)

największe przyspieszenie drona 4,3 m/s²

największe wychylenie 18°

Różne długości: ładunki mają różne częstotliwości własne i jednym ruchem drona da się wygasić oba wahania.

Stan na rysunku: $L_1 = 1$ m, $L_2 = 1,500$ m; bieguny: częstotliwości własne wahadeł z tłumieniem $\zeta = 0,3$; start $0,3$ i $-0,2$ rad.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz W_c dla wysokości drona i sprawdź sterowalność.

2 W symulacji 2 odczytaj największe przyspieszenie dla $L_2 = 2; 1,5; 1,1; 1,02$ m. Co się dzieje, gdy $L_2 \rightarrow L_1$?

3 Obiekt $\dot{x}_1 = -x_1 + u$, $\dot{x}_2 = -2x_2$. Czy jest sterowalny? Czy da się go ustabilizować?

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Wartość zadana i całkowanie

$u = -Kx$ sprowadza stan do zera. Żeby dron poleciał na wysokość r , potrzebujemy wartości zadanej. Dwa sposoby:

- **wzmocnienie w przód:** $u = -Kx + Nr$ z N dobranym tak, żeby w stanie ustalonym $z = r$. Działa tylko przy dokładnym modelu: stała siła (paczka) zostawi uchyb jak w PD;
- **całkowanie uchybu:** dokładamy stan ξ z $\dot{\xi} = r - z$ i sprzęgamy od rozszerzonego stanu $[z, v, \xi]$: $u = -k_1z - k_2v + k_i\xi$. W stanie ustalonym $\dot{\xi} = 0$, więc $z = r$ przy każdym stałym zakłóceniu.

Dla wysokości drona z biegunami -2 i $-1,4 \pm 1,43j$ (lekcja 3.1) rozszerzony obiekt daje $k_1 = 9,6$, $k_2 = 4,3$, $k_i = 8$: dokładnie PID z przykładu 6.1 w lekcji 3.1, w wersji I-PD (wartość zadana działa tylko przez całkę). Sprzężenie od stanu z całkowaniem to uogólnienie PID na dowolną liczbę stanów.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Dla wysokości drona z $K = [4; 2,3]$ dobierz N , żeby $z \rightarrow r$.

2 Napisz macierze rozszerzonego obiektu $[z, v, \xi]$ i jego wielomian charakterystyczny przy $u = -k_1z - k_2v + k_i\xi$.

3 Dlaczego wersja z N nie usuwa uchybu od paczki, a wersja z ξ tak?

podstawowe średnie feynmanowskie

☰ METODA: LOKOWANIE BIEGUNÓW

1. **Model stanowy** A, B (linearyzacja wokół punktu pracy, lekcja 4.6 Układy nieliniowe, płaszczyzna fazowa i stabilność).
2. **Sterowalność**: $\text{rank } W_c = n$; sprawdź też, czy nie jest „prawie” niesterowalny.
3. **Bieguny**: dominująca para z wymagań (lekcja 2.2), pozostałe 2–5 razy szybsze, ale nie szybsze, niż pozwalają element wykonawczy i szum.
4. **K**: porównanie współczynników, wzór Ackermanna albo `control.place`.
5. **Całka** dla zakłóceń stałych; **sprawdzenie** w symulacji nieliniowej i z ograniczeniami.

Przykład 5.1

Przesunięcie drona o 1 m

Dron w płaszczyźnie ($J = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$), bieguny: $\omega_0 = 1,5$ i 6 rad/s , $\zeta = 0,7$. Start 1 m od celu, w spoczynku.

- 1 $K = [0,0826; 0,0963; 0,559; 0,105]$ (zadanie 2.2).
- 2 Pierwsza reakcja: $u = -0,0826 \text{ N}\cdot\text{m}$, dron pochyla się w stronę celu.
- 3 Symulacja: największe pochylenie $7,3^\circ$, moment $0,083 \text{ N}\cdot\text{m}$ (różnica ciągu ok. $0,55 \text{ N}$ przy ramieniu $0,15 \text{ m}$), czas ustalania $4,2 \text{ s}$, przelot $4,7 \text{ cm}$.

Wynik: jeden wektor czterech liczb robi to, co w kaskadzie robią dwa regulatory.

Sprawdzenie: wartości własne $A - BK$ policzone numerycznie to zadane bieguny ✓. Pochylenie 7° jest dalekie od granicy modelu liniowego ✓.

Przykład 5.2

Dwa ładunki o podobnych linkach

Linki 1 m i 1,1 m. Regulator ma zostawić częstotści wahadeł i dodać tłumienie $\zeta = 0,3$. Ile wynoszą wzmocnienia i największe przyspieszenie drona?

- 1 Częstości wahadeł: 3,13 i 2,99 rad/s, różnią się o 5%.
- 2 $K \approx [-37; -1,9; 37; -2,0]$: wielkie wzmocnienia od kątów o przeciwnych znakach (regulator gra na różnicy wychyleń).
- 3 Największe przyspieszenie ok. $18,5 \text{ m/s}^2$, prawie $2g$, a ładunki wychylają się do ok. 65° . Dla linek 1 i 2 m wystarcza $2,5 \text{ m/s}^2$ i wychylenia do 17° .

Wynik: formalnie sterowalny, praktycznie nie.

Sprawdzenie: dla linek 1 i 1,02 m potrzeba już ok. 90 m/s^2 , a dla równych linek rząd W_c spada do 2 ✓.

Przykład 5.3

PID jako sprzężenie od stanu

Rozszerzony stan wysokości $[z, v, \xi]$, bieguny -2 i $-1,4 \pm 1,43j$. Wyznacz K .

- 1 Pożądany wielomian $(s+2)(s^2+2,8s+4) = s^3+4,8s^2+9,6s+8$.
- 2 Porównanie z $s^3+(0,5+k_2)s^2+k_1s+k_i$: $k_2=4,3$, $k_1=9,6$, $k_i=8$.

Wynik: te same liczby co PID z lekcji 3.1; struktura I-PD (wartość zadana tylko przez całkę).

Sprawdzenie: `control.place` dla rozszerzonego obiektu daje $[9,6; 4,3; -8]$ (znak minus, bo $\dot{\xi} = -z$) ✓.

6 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Skoro bieguny da się ustawić dowolnie, to wybierzmy bardzo szybkie.”

Szybkie bieguny to ogromne wzmocnienia: nasycenie, szum, wyjście poza zakres modelu liniowego. Bieguny wybiera się z wymagań, nie „im szybciej, tym lepiej”.

× „Sterowalny znaczy łatwy do sterowania.”

Rząd macierzy to odpowiedź tak/nie. Obiekt prawie niesterowalny wymaga absurdalnych sterowań.

× „Sprzężenie od stanu to coś zupełnie innego niż PID.”

Dla obiektu drugiego rzędu to PD, a z całkowaniem uchybu PID. Nowość to możliwość objęcia wielu stanów naraz.

× „Żeby sprzęgać od stanu, trzeba mierzyć cały stan.”

Stan można estymować z mniejszej liczby pomiarów: obserwator w lekcji 4.2
Obserwator stanu i obserwowalność.

× „Niesterowalny obiekt jest bezużyteczny.”

Jeśli niesterowalne części same gasną (obiekt stabilizowalny), regulator zrobi swoje z resztą.

7 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Kelner z tacą.** Kelner niesie na tacy dwa kieliszki: jeden pełny, jeden w połowie. Ciecz w każdym kołysze się z inną częstością. Czy ruchami tacy da się uspokoić oba naraz? A gdyby kieliszki były identyczne?

2 **Dron bez śmigła ogonowego.** Czy dron w płaszczyźnie z momentem u może kontrolować położenie x , mimo że u nie działa na x bezpośrednio? Odpowiedz przez kierunki B , AB , A^2B , A^3B .

3 **Dlaczego nie skasować dynamiki?** Kusi, żeby wybrać bieguny tak, by pętla zamknięta była „idealna”: wszystkie w -100 . Oszacuj k_1 dla drona w płaszczyźnie i oceń.

4 **Sterowalność a transmitancja.** Obiekt $\dot{x}_1 = -x_1 + u$, $\dot{x}_2 = x_2$, $y = x_1$. Policz transmitancję Y/U . Czy z niej widać, że obiekt jest niestabilny?

- 5 Dwa wejścia. Dron może zmieniać zarówno moment u_1 , jak i całkowity ciąg u_2 . Ile wierszy i kolumn ma wtedy K ? Czy wybór K dla zadanych biegunów jest jednoznaczny?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

8 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Czym jest sprzężenie od stanu?

$u = -Kx$; pętla zamknięta $\dot{x} = (A - BK)x$.

- 2 Gdzie są bieguny pętli zamkniętej?

W wartościach własnych $A - BK$.

- 3 Jak sprawdzić sterowalność?

$\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$.

- 4 Dlaczego dwa ładunki na równych linkach są niesterowalne?

Różnica ich wychyleń spełnia równanie niezależne od sterowania.

- 5 Co to wzór Ackermanna?

$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] W_c^{-1} \varphi(A)$: lokowanie biegunów dla jednego wejścia.

- 6 Jak dodać całkowanie do sprzężenia od stanu?

Nowy stan $\dot{\xi} = r - y$ i sprzężenie od rozszerzonego stanu.

- 7 Co to obiekt stabilizowalny?

Taki, którego niesterowalne mody są stabilne.

- 8 Czym jest PD w języku stanu?

Sprzężeniem od stanu $[z, v]$ obiektu drugiego rzędu.

SPRZĘŻENIE OD STANU

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad u = -K\mathbf{x} + Nr$$

$$\text{bieguny: } \det(sI - A + BK) = 0$$

$$\text{Ackermann: } K = [0 \ \dots \ 1] W_c^{-1} \varphi(A)$$

$$\text{całka: } \dot{\xi} = r - y, \quad u = -K\mathbf{x} + k_i \xi$$

STEROWALNOŚĆ I DRON

$$W_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \text{ sterowalny}$$

$$\iff \text{rank } W_c = n$$

$$\text{dron w płaszczyźnie: } \ddot{x} = g\theta, \quad \ddot{\theta} = u/J$$

$$s^4 + \frac{k_4}{J}s^3 + \frac{k_3}{J}s^2 + \frac{gk_2}{J}s + \frac{gk_1}{J}$$

Python: `control.ctrb(A, B)`,

`control.place(A, B, p)`

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 7 (sprzężenie od stanu, wolny dostęp online).
- **Dla chętnych:** A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*, rozdz. 5 (lokowanie biegunów, przykłady lotnicze); S. Brunton, *Control Bootcamp* (wykłady wideo o sterowalności i lokowaniu biegunów).

Sprzężenie od stanu potrzebuje całego stanu, a czujniki mierzą zwykle tylko jego część: barometr daje wysokość, ale nie prędkość, a żyroskop prędkość kątową, ale nie kąt. Następna lekcja pokazuje, jak odtworzyć brakujące stany z tych, które mierzymy, i kiedy jest to w ogóle możliwe.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -0,5 - k_2 \end{bmatrix}$, $\det(sI - A + BK) = s(s + 0,5 + k_2) + k_1 \checkmark$.
2. $(s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12$; $k_1 = 12$, $k_2 = 6,5$.
3. Matematycznie niczym. W praktyce v trzeba skądś wziąć: z osobnego czujnika albo z estymatora, a nie z różniczkowania zaszumionego z (lekcja 2.5). Sprzężenie od stanu przenosi problem pomiaru pochodnych na estymację stanu: to temat lekcji 4.2 Obserwator stanu i obserwowalność.

Zadania · część 2

1. $Jx^{(4)} = gu = -g(k_1x + k_2\dot{x} + k_3\theta + k_4\dot{\theta})$, a $\theta = \ddot{x}/g$, $\dot{\theta} = \dddot{x}/g$. Stąd $Jx^{(4)} + k_4\ddot{x} + k_3\ddot{x} + gk_2\dot{x} + gk_1x = 0$; dzielimy przez $J \checkmark$.
2. $(s^2 + 2,1s + 2,25)(s^2 + 8,4s + 36) = s^4 + 10,5s^3 + 55,89s^2 + 94,5s + 81$. Stąd $k_4 = 10,5J = 0,105$, $k_3 = 0,559$, $k_2 = 94,5J/g = 0,0963$, $k_1 = 81J/g = 0,0826$.
3. Czas ustalania (2 cm): ok. 6,2; 4,2; 3,2 s. Pochylenie: ok. 3,8°; 7,3°; 12,9°. Szybciej znaczy mocniej się pochylić, a więc odejść dalej od zawisu i od założeń modelu liniowego.

Zadania · część 3

1. $B = [0, 1]^T$, $AB = [1, -0,5]^T$. $W_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix}$, $\det = -1 \neq 0$: sterowalny.
2. Ok. 2,5; 4,3; 18,5; 89 m/s², a największe wychylenie rośnie od 17° do ponad 300° (model liniowy dawno przestał obowiązywać). Wzmocnienia od kątów rosną jak $1/|L_2 - L_1|$: obiekt jest formalnie sterowalny, ale praktycznie nie. Ilościową miarą jest najmniejsza wartość osobliwa W_c (względem największej), która dąży do zera.
3. $W_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, rząd 1: niesterowalny. Stan x_2 nie zależy od u , ale sam z siebie gaśnie (-2). Taki obiekt nazywa się *stabilizowalnym*: niesterowalne są tylko mody stabilne. Gdyby było $\dot{x}_2 = +2x_2$, żaden regulator by go nie uratował.

Zadania · część 4

1. W stanie ustalonym $v = 0$, $\dot{v} = 0 = -0,5 \cdot 0 + u$, więc $u = 0 = -4z + Nr$: $N = 4$.
2. $\dot{z} = v$, $\dot{v} = -0,5v + u$, $\dot{\xi} = -z$ (dla $r = 0$). Wielomian: $s^3 + (0,5 + k_2)s^2 + k_1s + k_i$, identyczny jak PID z lekcji 3.1 $\checkmark$.
3. Przy sile F : w stanie ustalonym $u + F = 0$, czyli $-4z + Nr = -F$, $z = r + F/4$: uchyb. Z całą ξ rośnie, dopóki $z \neq r$, a stan ustalony istnieje tylko przy $z = r$ (wtedy $k_i\xi = -F + k_1r$).

Zadania do przemyślenia

1. Różne częstotliwości: obiekt sterowalny, taca może wygasić oba kołysania (jak ładunki na różnych linkach).
2. Identyczne kieliszki: różnica faz ich kołysań jest niesterowalna. Taca może uspokoić „wspólną część”, a ich wzajemnego przesunięcia już nie.

2. 1. B działa tylko na $\dot{\theta}$, AB na θ , A^2B na $\dot{x}$ (przez g), A^3B na x . Po trzech „krokach” sterowanie dociera do położenia.
2. Rząd 4: sterowalny. Kolejność kierunków to ten sam łańcuch co w kaskadzie: moment $\rightarrow$ pochylenie $\rightarrow$ prędkość $\rightarrow$ położenie.
3. 1. $(s + 100)^4$ ma wyraz wolny 10^8 , więc $k_1 = 10^8 J/g \approx 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/m}$. Przesunięcie o 1 cm daje 1000 N·m momentu, przy możliwościach rzędu 0,5 N·m.
2. W praktyce silniki natychmiast w nasyceniu, a szum czujnika pozycji wzmacniony 10^5 razy. Szybkość pętli ograniczają element wykonawczy, szum i niemodelowana dynamika, jak w lekcji 2.5.
4. 1. $Y/U = \frac{1}{s+1}$: stabilna, nic nie zdradza.
2. Stan $x_2 = x_2(0)e^t$ rośnie niezależnie od u , a wyjście go nie widzi. Transmitancja pokazuje tylko część sterowalną i obserwowalną. To jeden z powodów, dla których Kálmán wprowadził opis stanowy.
5. 1. Stan np. 6-wymiarowy $(x, \dot{x}, z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta})$, 2 wejścia: K ma wymiar 2×6 , czyli 12 liczb na 6 biegunów.
2. Niejednoznaczny: zostaje 6 „wolnych” stopni swobody (można np. kształtować wektory własne). Potrzebne jest dodatkowe kryterium. Najpopularniejsze to koszt kwadratowy: LQR w lekcji 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów.

Automatyka · Lekcja 4.1: Sprzężenie od stanu · Źródła: K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems* (Princeton 2008), rozdz. 7; A. Tewari, *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK* (Wiley 2002), rozdz. 5; R. E. Kálmán, „On the general theory of control systems”, *Proc. 1st IFAC Congress* (1960).
Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c4_1.py).