

Regulator PID: działanie P, I, D i uchyb ustalony

Ponad 90% pętli regulacji w przemyśle to regulatory PID, a w każdym dronie hobbystycznym siedzi ich kilkanaście. Ta lekcja składa w całość to, co dotąd widzieliśmy po kawałku: człon P (lekcja 1.1), I (lekcja 1.3) i D (lekcje 2.2 i 2.5). Zaprojektujemy pełny PID wysokości drona, zobaczymy, że te same bieguny mogą dać 1,5% albo 34% przeregulowania, i uporządkujemy, jaki uchyb zostaje dla jakiego wejścia.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 3 h zadań

ZADANIA

16 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

K. J. Åström, T. Hägglund,
Advanced PID Control (ISA 2006),
rozdz. 3; G. C. Goodwin i in.,
Control System Design, rozdz. 6.2
i 4.11; J. Kowal,
Podstawy automatyki,
rozdz. 10; S. A. Frank, *Control Theory Tutorial*,
rozdz. 3.3

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: sternik pancernika
- 1 Trzy człony: teraźniejszość, przeszłość, przyszłość
- 2 PID wysokości drona
- 3 Te same bieguny, różne zera: PID, PI-D, I-PD
- 4 Typ pętli i uchyb ustalony
- 5 PID w dziedzinie częstotliwości
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: sternik pancernika

Na początku lat 20. XX wieku Nicolas Minorsky, rosyjski inżynier pracujący dla marynarki wojennej USA, obserwował sterników prowadzących okręty. Zauważył, że dobry sternik patrzy na trzy rzeczy naraz: o ile okręt odchylił się od kursu (teraz), czy mimo poprawek wciąż znosi go w jedną stronę, np. przez prąd lub wiatr (dotąd), i jak szybko odchyłka się zmienia (co zaraz będzie). W 1922 r. opisał to matematycznie jako sterowanie proporcjonalne do uchybu, jego całki i pochodnej. Rok później jego automatyczny sternik prowadził pancernik USS *New Mexico*.

Tak narodził się regulator **PID**. Sto lat później jest wciąż najczęściej używanym algorytmem sterowania na świecie: w termostatach, napędach, procesach chemicznych i w każdym kontrolerze lotu drona.

Pytanie na start. Dwa regulatory wysokości drona mają identyczne bieguny pętli zamkniętej. Po doczepieniu paczki oba zachowują się tak samo. A po poleceniu „wznies się o 1 m” jeden przelatuje cel o 34 cm, drugi o 1,5 cm. Jak to możliwe? Odpowiedź w części 3.

1

Trzy człony: teraźniejszość, przeszłość, przyszłość

REGULATOR PID

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de}{dt}, \quad C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Postać standardowa (przemysłowa): $C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$ z czasem zdwojenia $T_i = K_p / K_i$ i czasem wyprzedzenia $T_d = K_d / K_p$.

- **P (teraźniejszość):** im większy uchyb teraz, tym mocniej działa. Sam nie usuwa uchybu od stałego zakłócenia, bo do utrzymania stałej siły potrzebuje stałego uchybu (lekcja 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta).
- **I (przeszłość):** sumuje uchyb. Dopóki uchyb nie jest zerowy, całka rośnie, więc w stanie ustalonym uchyb musi być zerowy (lekcja 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb). Cena: opóźnienie fazy i skłonność do przeregulowań.
- **D (przyszłość):** $e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \dot{e}(t)$, więc $K_p(e + T_d \dot{e})$ to człon P działający na przewidywany uchyb za T_d sekund. Daje tłumienie (lekcja 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe), ale wzmacnia szum, więc w praktyce zawsze ma filtr (lekcja 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli): $K_d s \rightarrow \frac{K_d s}{1 + T_d s / N}$.

⚠ PO POLSKU NA EGZAMINIE

Polskie podręczniki (Kowal) piszą regulator PID jako $k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$ i nazywają T_i czasem zdwojenia (po takim czasie od skoku uchybu człon I podwaja odpowiedź członu P), a T_d czasem wyprzedzenia. Te same symbole w literaturze angielskiej to *integral time* i *derivative time*.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

1 PID ma $K_p = 9,6$, $K_i = 8$, $K_d = 4,3$. Podaj T_i i T_d .

2 Uchyb skacze z 0 do 1 i zostaje stały. Narysuj w myślach odpowiedź członu P i I. Po jakim czasie człon I da tyle co człon P?

3 Uchyb rośnie liniowo: $e(t) = 0,2t$. Ile wynosi wyjście członu PD $K_p(e + T_d \dot{e})$ w chwili t i jaki uchyb „przewiduje”?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

2 PID wysokości drona

Wysokość drona ($m = 1$ kg, $b = 0,5$ N·s/m, ciąg zawisu ustawiony w przód) to obiekt $G(s) = \frac{1}{s(s+0,5)}$ od korekty ciągu do wysokości. Ma już jedno całkowanie (prędkość → wysokość). Co daje każdy człon:

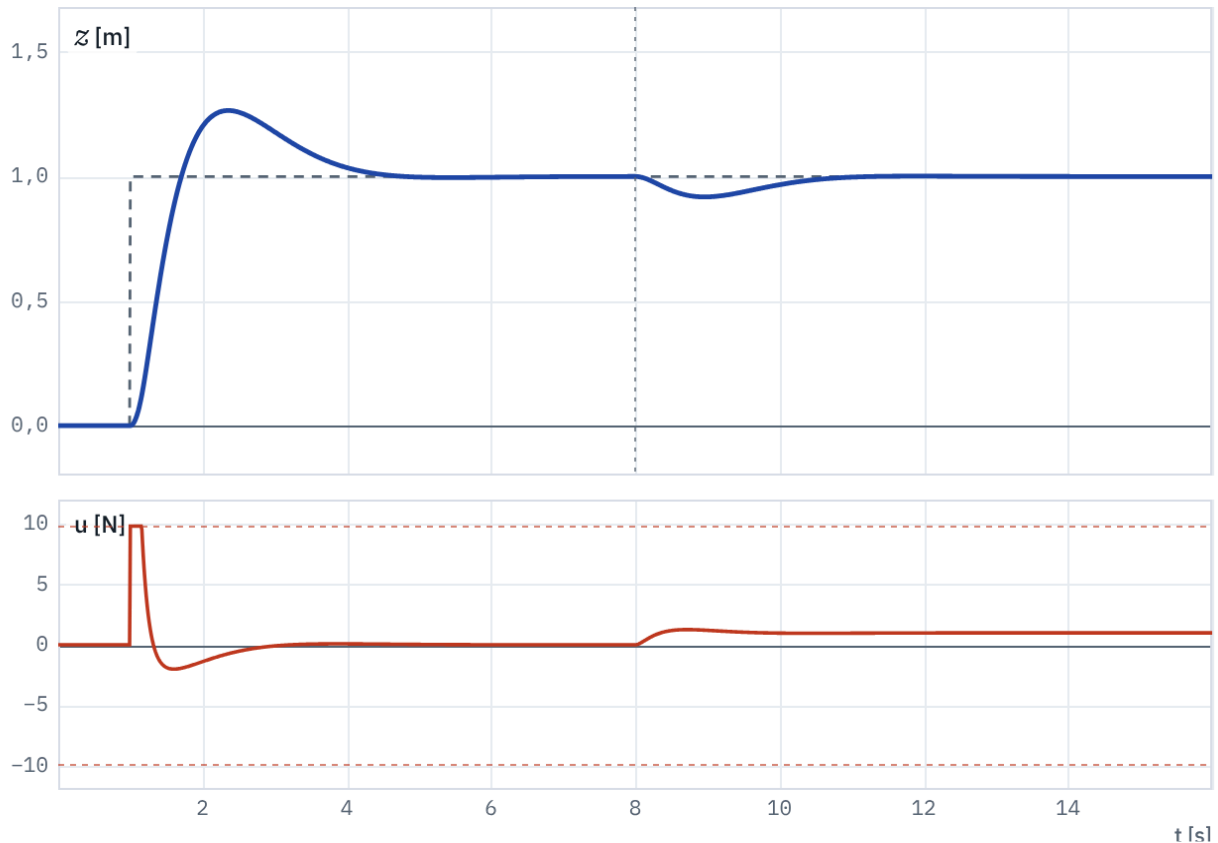
- sam P: $s^2 + 0,5s + K_p$, tłumienie $\zeta = 0,25/\sqrt{K_p}$, czyli coraz słabsze, im mocniej (lekcja 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe);
- PD: dokłada tłumienie, ale stała siła (cięższy dron, wiatr w dół) zostawia uchyb F/K_p ;
- PID: usuwa ten uchyb. Pętla ma wtedy trzy bieguny.

Mianownik pętli zamkniętej $1 + CG = 0$:

$$s^3 + (0,5 + K_d)s^2 + K_p s + K_i = 0.$$

Trzy nastawy, trzy współczynniki: bieguny można ustawić **dowolnie**. Wystarczy wybrać pożądany wielomian i porównać współczynniki. Warunek stabilności z kryterium Routha (lekcja 2.2): wszystkie współczynniki dodatnie i $(0,5 + K_d) K_p > K_i$. Za dużo całki przy za małym P i D rozkołysze pętlę.

SYMULACJA 1 PID wysokości drona: skok wartości zadanej o 1 m w $t = 1$ s, doczepienie paczki 0,1 kg w $t = 8$ s. Ciąg ograniczony do $\pm mg$ wokół zawisu, filtr D z $N = 8$. Ustawienia startowe to projekt z przykładu 6.1. Wyzeruj K_i i zobacz uchyb po paczce. Wyzeruj K_d i zobacz kołysanie. Przełączaj PID, PI-D i I-PD: odpowiedź na paczkę się nie zmienia, odpowiedź na skok tak.



przeregulowanie 26,5 %

czas ustalania (2 %) 3,22 s

uchyb w $t = 16$ s 0,0 cm

max $|u|$ 9,8 N

nasycenie tak

Skok wartości zadanej przechodzi przez człon D: kopnięcie ciągu do granicy nasycenia. Przełącz na PI-D albo I-PD.

Stan na rysunku: $K_p = 9,6$, $K_i = 8,0$, $K_d = 4,30$, struktura PID, filtr D $N = 8$, paczka 0,1 kg w $t = 8$ s; $m = 1$ kg, $b = 0,5$ N·s/m.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 30 min

1 Wyprowadź mianownik pętli zamkniętej $s^3 + (0,5 + K_d)s^2 + K_p s + K_i$.

■ ■ ■

2 PD z $K_p = 4$. Dron okazuje się cięższy o 0,1 kg (zawis ustawiony dla 1 kg). O ile opadnie w stanie ustalonym?

3 Dla $K_p = 4$, $K_d = 2,3$ jakie największe K_i zachowuje stabilność?

4 W symulacji 1 ustaw $K_i = 25$ przy domyślnych K_p i K_d . Pętla jest stabilna (sprawdź warunek), ale co się dzieje z przeregulowaniem i dlaczego?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Te same bieguny, różne zera: PID, PI-D, I-PD

Regulator nie musi traktować wartości zadanej r i pomiaru y tak samo. Ogólnie:

$$u = K_p(b r - y) + K_i \int (r - y) dt + K_d \frac{d}{dt}(c r - y).$$

Całka zawsze działa na prawdziwy uchyb $r - y$ (inaczej zostałyby uchyb ustalony). Wagi b i c wybieramy:

- **PID** ($b = c = 1$): wszystko od uchybu. Skok r przechodzi przez człon D i daje **kopnięcie** sterowania (ang. *derivative kick*).
- **PI-D** ($b = 1, c = 0$): D tylko od pomiaru. Bez kopnięcia; najczęstszy wybór w praktyce.
- **I-PD** ($b = c = 0$): wartość zadana działa tylko przez całkę. Najłagodniejsza reakcja na zmianę r .

Pomiar y zawsze przechodzi przez pełne $K_p + K_i/s + K_d s$, więc **mianownik pętli zamkniętej, czyli bieguny, jest ten sam** we wszystkich trzech wersjach. Reakcja na zakłócenia (paczka, podmuch) też jest identyczna. Różni się tylko licznik transmitancji od r do y , czyli jej zera:

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{\text{mianownik}} \text{ (PID)}, \quad \frac{K_p s + K_i}{\text{mianownik}} \text{ (PI-D)}, \quad \frac{K_i}{\text{mianownik}} \text{ (I-PD)}.$$

Zera blisko osi urojonej przyspieszają start i dokładają przeregulowania (lekcja 2.2). Odpowiedź na pytanie z prologu: dla projektu z przykładu 6.1 (idealny człon D) PI-D ma jedno wolne zero w $-K_i/K_p = -0,83$ i daje 34% przeregulowania, I-PD nie ma zer i daje 1,5%. Pełny PID (zera w $-1,12 \pm 0,78j$) daje 23%. Z filtrem D ($N = 8$, jak w symulacji 1) liczby są trochę inne: 29%, 1,5% i 26%, a pełny PID dodatkowo nasycy ciąg kopnięciem (część 3). Bieguny wszystkich trzech: -2 i $-1,4 \pm 1,43j$. Projektowanie przez dwa niezależne tory (bieguny dla zakłóceń, zera dla wartości zadanej) nazywa się **regulacją o dwóch stopniach swobody**.

- 1 Ile wynosi sterowanie tuż po skoku r o 1 m w wersji PID z filtrem D ($N = 8$)? Ile w PI-D i I-PD?
- 2 Pokaż, że transmitancja od siły zakłócającej F do wysokości jest taka sama dla PID, PI-D i I-PD.
- 3 Dlaczego I-PD jest wolniejszy od PI-D, mimo tych samych biegunów?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Typ pętli i uchyb ustalony

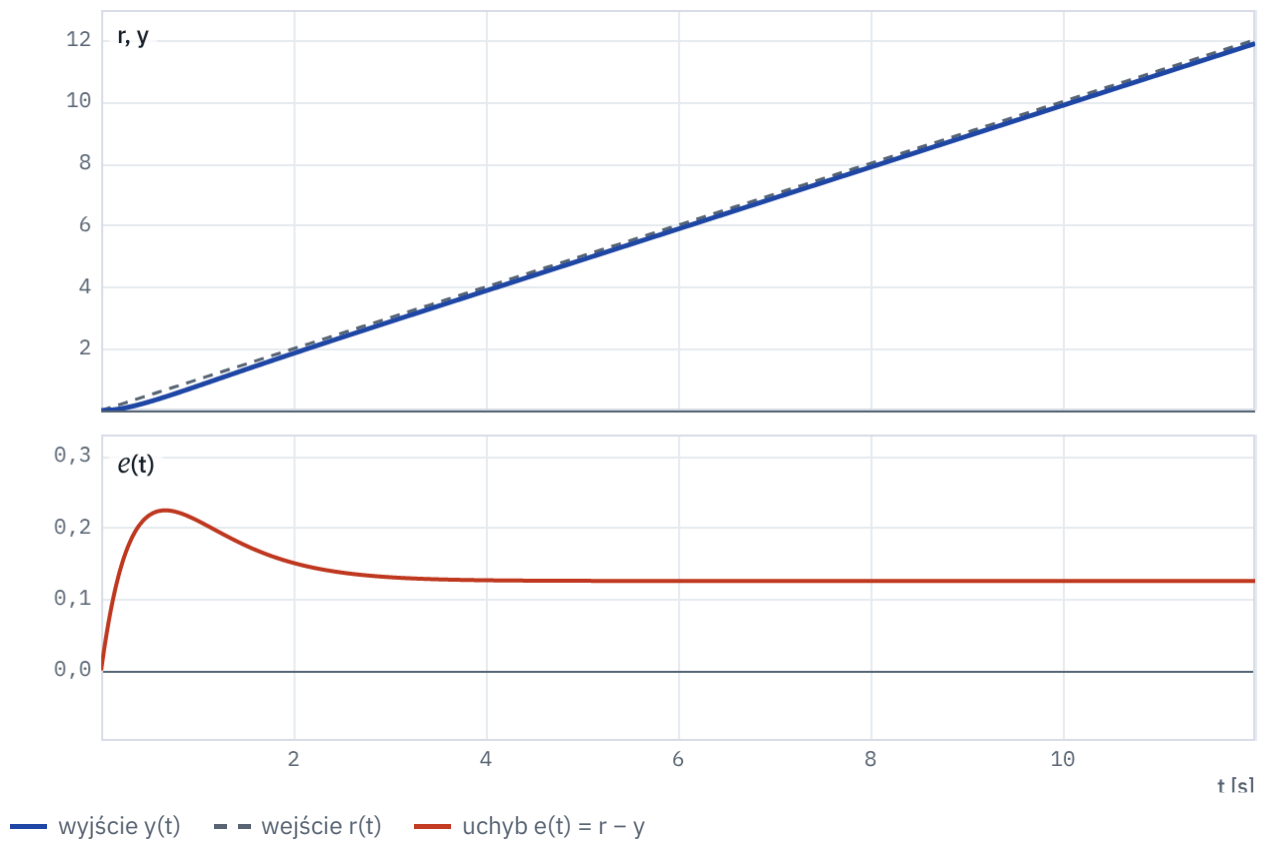
W lekcji 2.1 Schematy blokowe i transmitancja pętli zdefiniowaliśmy typ pętli jako liczbę całkowań w $L(s)$. Z twierdzenia o wartości końcowej uchyb ustalony dla wejścia $r(t) = t^k/k!$ (skok, rampa, parabola) zależy tylko od typu i jednej liczby:

typ pętli	skok	rampa t	parabola $t^2/2$
0	$\frac{1}{1+K_0}, K_0 = L(0)$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}, K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s)$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}, K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2L(s)$

Dla drona: pętla prędkości z regulatorem P to typ 0 ($K_0 = K_p/b$), z PI typ 1 ($K_v = K_i/b$), a pętla wysokości z PID to typ 2 ($K_a = K_i/b$): śledzi bez uchybu nawet stałą prędkość wznoszenia, a przy stałym przyspieszeniu zostaje mu stały uchyb.

Dla zakłóceń liczy się co innego: liczba całkowań w *regulatorze*, czyli między uchybem a miejscem wejścia zakłócenia. Całkowanie w obiekcie leży za siłą zakłócającą, więc uchybu od niej nie usuwa (zadanie 4.3).

SYMULACJA 2 Trzy pętle drona (typ 0, 1, 2) i trzy wejścia (skok, rampa, parabola). Sprawdź całą tabelę: kiedy uchyb dąży do zera, kiedy do stałej, a kiedy rośnie bez końca.



uchyby ustalony (teoria) 0,125

uchyby w $t = 12$ s (symulacja) 0,125

$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL = 8,00$

Liczba całkowań równa stopniowi wejścia: uchyb ustala się na stałym poziomie $1/K$ (dla skoku: $1/(1 + K)$).

Stan na rysunku: PI prędkości: $(3,5s + 4)/(s(s + 0,5))$; wejście rampa t .

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pętla prędkości z regulatorem P, $K_p = 3,5$. Uchyb ustalony dla skoku 1 m/s?
- 2 PID wysokości ($K_i = 8$). Wartość zadana rośnie z przyspieszeniem 1 m/s² ($r = t^2/2$). Jaki uchyb się ustali?
- 3 PD wysokości to pętla typu 1 (całkowanie w obiekcie). Dlaczego mimo to stała siła zostawia uchyb, a skok wartości zadanej nie?

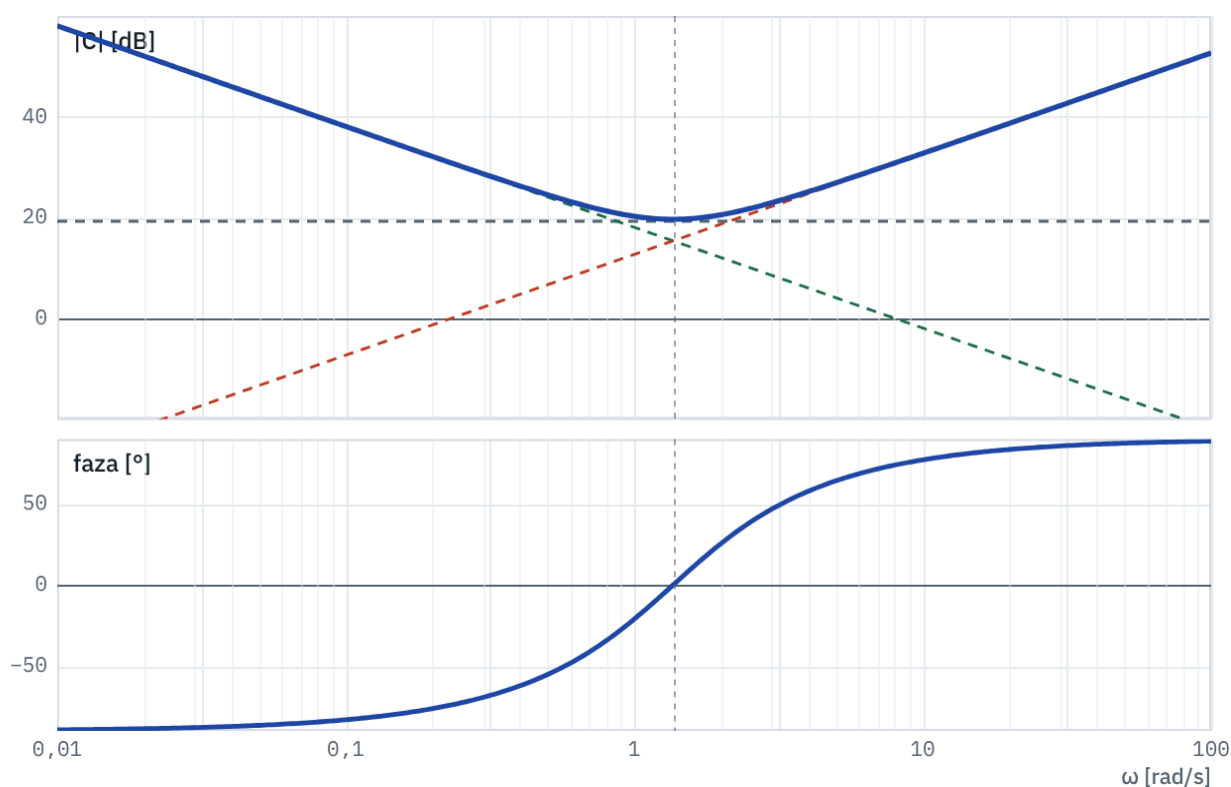
□ □ □ podstawowe ▤ ▤ ▤ średnie ▨ ▨ ▨ feynmanowskie

5 PID w dziedzinie częstotliwości

Na wykresie Bodego trzy człony to trzy proste: P poziomo (K_p , faza 0°), I opada -20 dB/dek. (faza -90°), D rośnie $+20$ dB/dek. (faza $+90^\circ$). Suma ma kształt litery V z minimum przy $\omega = \sqrt{K_i/K_d}$, gdzie składowe I i D się znoszą, $|C| = K_p$ i faza wynosi zero.

W języku lekcji 2.5: poniżej tej częstotliwości PID działa jak korektor opóźniający (duże wzmocnienie dla dokładności, faza ujemna), powyżej jak korektor wyprzedzający (dodatnia faza w okolicy ω_c , ale rosnące wzmocnienie szumu). Dobrze nastrojony PID ma minimum V wyraźnie poniżej ω_c , tak żeby w ω_c dominował człon D z dodatnią fazą.

SYMULACJA 3 Charakterystyka Bodego regulatora PID i jego trzech składowych. Odczyt pokazuje zapas fazy z obiektem drona $\frac{1}{s(s+0,5)}$. Wyzeruj K_d : zapas fazy znika. Przesuwaj K_i i patrz, jak minimum V wędruje.



— $|C(j\omega)|$ i faza regulatora PID - - - człon P - - - człon I - - - człon D

ω przy fazie 0° 1,36 rad/s

$|C|$ tam ($= K_p$) 9,6

zapas fazy z dronem $1/(s(s+0,5))$ 67,3° przy $\omega_c = 4,43$

Poniżej $\sqrt{K_i/K_d}$ rządzi całka (faza -90° , dokładność), powyżej człon D (faza $+90^\circ$, zapas fazy, ale też szum). PID to korektor opóźniający i wyprzedzający w jednym.

Stan na rysunku: $C(s) = 9,6 + 8,0/s + 4,30 \cdot s$ (bez filtra D).

- 1 Dla $K_p = 9,6$, $K_i = 8$, $K_d = 4,3$: gdzie jest minimum $|C|$ i ile wynosi?
- 2 Pętla z tym PID ma $\omega_c \approx 4,4$ rad/s. Jaka fazę ma tam regulator? (Oblicz.)
- 3 Dlaczego sam regulator PI nie wystarczy dla wysokości drona? Odpowiedz przez fazę.

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: PID PRZESZ LOKOWANIE BIEGUNÓW (OBIEKT 2. RZĘDU)

1. **Model:** $G = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0}$ (u nas $k = 1, a_1 = 0,5, a_0 = 0$).
2. **Cel:** para dominująca ω_0, ζ z wymagań (lekcja 2.2) i trzeci biegun rzeczywisty $-p$, nie wolniejszy niż $\zeta\omega_0$.
3. **Porównanie** $s^3 + (a_1 + kK_d)s^2 + (a_0 + kK_p)s + kK_i$ z $(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$.
4. **Struktura:** zera wybierz osobno (PID, PI-D, I-PD) pod wymagania na odpowiedź na r .
5. **Sprawdzenie:** filtr D, nasycenie, symulacja z szumem; zapas fazy.

Przykład 6.1

PID wysokości drona przez lokowanie biegunów

Dron $G = \frac{1}{s(s+0,5)}$. Cel: para $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0,7$, trzeci biegun w -2 .

1. Pożądany wielomian: $(s + 2)(s^2 + 2,8s + 4) = s^3 + 4,8s^2 + 9,6s + 8$.
2. Porównanie z $s^3 + (0,5 + K_d)s^2 + K_p s + K_i$: $K_d = 4,3, K_p = 9,6, K_i = 8$.
3. Routh: $4,8 \cdot 9,6 = 46 > 8 \checkmark$.
4. Odpowiedzi na skok 1 m (python-control): PID 23% przeregulowania, czas ustalania 3,2 s; PI-D 34%, 3,1 s; I-PD 1,5%, 2,4 s, ale czas narastania 1,5 s zamiast 0,3 s.

Wynik: $K_p = 9,6 \text{ N/m}$, $K_i = 8 \text{ N/(m}\cdot\text{s)}$, $K_d = 4,3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$. Zapas fazy 67° przy $\omega_c = 4,4 \text{ rad/s}$ (z filtrem D, $N = 8$: 56° przy $4,8 \text{ rad/s}$, lekcja 3.4).

Sprawdzenie: sam PD z tymi K_p, K_d daje 14% przeregulowania; dodanie całki dokładnie zero i przeregulowanie rośnie $\checkmark$. Same bieguny nie mówią wszystkiego.

Przykład 6.2

Paczka: PD kontra PID

Dron z przykładu 6.1 wisi na zadanej wysokości. Doczepiamy paczkę 0,1 kg (brakuje 0,98 N ciągu). Porównaj PD ($K_p = 4$, $K_d = 2,3$) i PID z przykładu 6.1.

- 1 PD: ustalony spadek $0,981/4 \approx 0,25$ m, na zawsze.
- 2 PID: największy spadek ok. 8 cm, po ok. 2,3 s dron jest z powrotem w pasie ± 2 cm, uchyb ustalony zero.
- 3 Gdzie podziła się brakująca siła? Całka urosła do $K_i \int e = 0,981$ N: regulator „nauczył się” nowego zawisu.

Wynik: PD: 25 cm uchybu na stałe. PID: 8 cm chwilowo, 0 cm po kilku sekundach.

Sprawdzenie: w symulacji 1 przy $t > 8$ s uchyb wraca do zera dla każdej struktury ✓. Ta sama reakcja dla PID, PI-D, I-PD, bo bieguny są te same.

Przykład 6.3

Kopnięcie członu D

PID z przykładu 6.1, filtr $D N = 8$, zmiana wartości zadanej o 1 m. Ile wynosi sterowanie w pierwszej chwili?

- 1 Człon D z filtrem: $\frac{K_d s}{1 + (T_d/N)s}$; odpowiedź na skok w chwili 0^+ : $K_d N / T_d = K_p N = 76,8$ N.
- 2 Plus człon P: 9,6 N, razem 86 N (symulacja: 86,4 N).
- 3 Zapas ciągu drona: $\pm 9,81$ N. Silniki dostają skok do maksimum, a regulator „myśli”, że dał 86 N.

Wynik: 86 N, prawie 9 razy więcej niż dostępne. PI-D: 9,6 N, I-PD: 0 N na starcie.

Sprawdzenie: bez filtra kopnięcie byłoby impulsem (nieskończonym) ✓. Dlatego w kontrolerach lotu człon D liczy się od pomiaru, nie od uchybu.

Przykład 6.4

Wznoszenie ze stałą prędkością

Wartość zadana wysokości rośnie liniowo $0,5 \text{ m/s}$. Jaki uchyb ustalony dla PD ($K_p = 4$, $K_d = 2,3$) i dla PID z przykładu 6.1?

- 1 PD: pętla typu 1, $K_v = \lim sL = K_p/0,5 = 8$, uchyb $0,5/8 \approx 0,06 \text{ m}$.
- 2 Fizycznie: ruch $0,5 \text{ m/s}$ wymaga dodatkowej siły na opór $b \cdot 0,5 = 0,25 \text{ N}$, którą PD daje tylko z uchybu: $0,25/4 \checkmark$.
- 3 PID: typ 2, uchyb dla rampy zero.

Wynik: PD ok. 6 cm za wartością zadaną; PID bez uchybu.

Sprawdzenie: symulacja 2 (typ 1 i rampa) pokazuje ten sam mechanizm $\checkmark$.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Bieguny wyznaczają odpowiedź skokową.”

Wyznaczają tempo i charakter, ale zera potrafią zmienić przeregulowanie z 1,5% na 34%. Odpowiedź na zakłócenia i na wartość zadaną to dwie różne transmitancje.

× „Więcej całki = dokładniej.”

Uchyb ustalony jest zerowy przy każdym $K_i > 0$. Więcej całki to szybsze usuwanie uchybu, ale też mniej fazy, większe przeregulowanie i windup.

× „Człon D liczy się od uchybu.”

Tak w podręcznikach, nie w praktyce. Od pomiaru: bez kopnięcia przy zmianie wartości zadanej, ta sama stabilność.

× „Każdą pętlę trzeba regulować pełnym PID.”

Większość pętli przemysłowych to PI: D jest kłopotliwy przy szumie i wolnych procesach. Dron potrzebuje D, bo obiekt ma całkowanie i inercję (ciąg $\rightarrow$ prędkość $\rightarrow$ wysokość): sam PI stabilizuje go tylko bardzo wolno.

✖ „Typ pętli mówi o uchybie od zakłóceń.”

Tylko o uchybie od wartości zadanej. Dla zakłóceń liczą się całkowania między uchybem a miejscem wejścia zakłócenia.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 Sternik Minorsky’ego.** Okręt płynie przy stałym bocznym prądzie. Co w zachowaniu okrętu odpowiada uchybowi ustalonemu, gdy sternik reaguje tylko na bieżącą odchyłkę kursu? Jaki człon ten uchyb usuwa i jak sternik „wykonuje” go w głowie?
- 2 Tempomat pod górę.** Tempomat z regulatorem PI wjeżdża na wzniesienie o stałym nachyleniu. Czy prędkość wróci do zadanej? A jeśli nachylenie rośnie liniowo z drogą?
- 3 Enkoder z kwantyzacją.** Pozycję silnika mierzy enkoder o rozdzielczości 0,01 rad, a regulator liczy pochodną co 1 ms. Jakie „skoki” prędkości widzi człon D przy jednym takcie enkodera? Co z tego wynika?
- 4 Ile członów potrzeba?** Obiekt $\frac{1}{s^2}$ (podwójny integrator, np. dron bez oporu). Który z regulatorów P, PI, PD, PID go stabilizuje? Uzasadnij przez mianownik.
- 5 Kolejność strojenia.** Technik stroi PID „od P”: zwiększa K_p , aż pętla zacznie oscylować, potem dokłada D, potem I. Dlaczego w pętli wysokości drona sam P „od razu oscyluje” i ta metoda jest mylna?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co robi każdy z członów P, I, D?

P reaguje na uchyb teraz, I usuwa uchyb ustalony (pamięć), D przewiduje uchyb za T_d i daje tłumienie.

2 Co to T_i i T_d ?

$T_i = K_p/K_i$ (czas zdwojenia), $T_d = K_d/K_p$ (czas wyprzedzenia).

3 Dlaczego PID wysokości drona ma trzy bieguny i ile nastaw je ustawia?

Obiekt ma 2 bieguny, cała dokłada trzeci. Trzy nastawy K_p , K_i , K_d ustawiają trzy współczynniki mianownika.

4 Czym różnią się PID, PI-D i I-PD?

Tym, jak wartość zadana wchodzi do członów P i D. Bieguny i reakcja na zakłócenia są te same, zera w torze $r \rightarrow y$ różne.

5 Co to kopnięcie członu D?

Skok sterowania przy skokowej zmianie wartości zadanej, gdy D działa na uchyb: $K_p(1 + N)$ z filtrem.

6 Jaki uchyb ma pętla typu 1 dla rampy?

$1/K_v$, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s)$.

7 Gdzie musi być całkowanie, żeby stała siła nie zostawiała uchybu?

Miedzy uchybem a miejscem wejścia siły, czyli w regulatorze.

8 Jak wygląda PID na wykresie Bodego?

Litera V z minimum K_p przy $\sqrt{K_i/K_d}$; faza od -90° do $+90^\circ$.

PID

$$C = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$\text{filtr D: } \frac{K_d s}{1 + T_d s / N}, N = 5-20$$

$$u = K_p(br - y) + K_i \int (r - y) + K_d \frac{d}{dt}(cr - y)$$

$$\text{PID: } b = c = 1; \text{PI-D: } c = 0; \text{I-PD: } b = c = 0$$

$$\text{kopnięcie: } K_p(1 + N) \Delta r$$

DRON I UCHYBY

$$G = \frac{1}{s(s+0,5)}: s^3 + (0,5 + K_d)s^2 + K_p s + K_i$$

$$\text{Routh: } (0,5 + K_d)K_p > K_i$$

$$\text{typ 0: skok } \frac{1}{1+K_0}; \text{ typ 1: rampa } \frac{1}{K_v}; \text{ typ 2: parabola } \frac{1}{K_a}$$

$$K_0 = L(0), K_v = \lim sL, K_a = \lim s^2 L$$

$$\text{minimum } |C| = K_p \text{ przy } \omega = \sqrt{K_i/K_d}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. o regulatorach PID (wolny dostęp online); J. Kowal, *Podstawy automatyki*, rozdz. 10 (algorytmy P, I, PI, PD, PID), po polsku.
- **Dla chętnych:** K. J. Åström, T. Hägglund, *Advanced PID Control*, rozdz. 3 (warianty PID, wagi wartości zadanej, filtr D); S. Bennett, „Nicholas Minorsky and the automatic steering of ships”, *IEEE Control Systems Magazine* (1984), dla historii.

Umiemy zaprojektować PID, gdy znamy model. Zwykle go nie znamy, a w każdym razie nie dokładnie. Następną lekcję pokazuje, jak zdobyć model z prostego testu, jak dobrać nastawy regułami, które działają od 80 lat, i jak ułożyć pętle w kaskadę: wewnętrzną szybką (prędkość) i zewnętrzną wolną (wysokość), dokładnie tak jak w kontrolerach lotu.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $T_i = 9,6/8 = 1,2$ s, $T_d = 4,3/9,6 \approx 0,45$ s.
2. P: stałe K_p . I: rampa $K_i t$. Równe w $t = K_p/K_i = T_i$, stąd nazwa „czas zdwojenia”: po T_i suma P + I jest dwa razy większa niż samo P.
3. $K_p(0,2t + 0,2T_d) = K_p \cdot 0,2(t + T_d)$: dokładnie uchyb z chwili $t + T_d$. Dla liniowego uchybu przewidywanie jest dokładne; dla zakrzywionego tylko przybliżone.

Zadania • część 2

1. $1 + \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{1}{s(s+0,5)} = 0$; mnożymy przez $s^2(s+0,5)$: $s^3 + 0,5s^2 + K_d s^2 + K_p s + K_i = 0$.
2. Brakuje $0,1 \cdot 9,81 = 0,981$ N. W stanie ustalonym $K_p e = 0,981$, czyli $e \approx 0,245$ m.
3. $(0,5 + 2,3) \cdot 4 = 11,2 > K_i$. Przy $K_i = 11,2$ para biegunów leży na osi urojonej.
4. $(0,5 + 4,3) \cdot 9,6 = 46 > 25$, stabilna. Przeregulowanie rośnie: całka zbiera uchyb w czasie wznoszenia i musi go „oddać” przelotem nad celem. Do tego ciąg wchodzi w nasycenie, a całka dalej rośnie (to *windup*, lekcja 3.3 Nieliniowa rzeczywistość: nasycenie, *windup*, feedforward i gain scheduling).

Zadania • część 3

1. Filtr D $\frac{K_d s}{1+T_d s/N}$ przy skoku daje natychmiast $K_d N/T_d = K_p N$. Razem z P: $K_p(1 + N) = 9,6 \cdot 9 = 86$ N, prawie 9 razy więcej niż zapas ciągu. PI-D: $K_p = 9,6$ N. I-PD: 0 (całka rośnie od zera), w maksimum ok. 1,2 N.
2. Dla $r = 0$ wszystkie trzy dają $u = -(K_p + K_i/s + K_d s)y = -C y$. Wtedy $y = G(u + F)$, czyli $\frac{Y}{F} = \frac{G}{1+CG}$ niezależnie od b i c .
3. W I-PD nic nie „pcha” od razu: sterowanie od r narasta tylko przez całkę. Brak zer w liczniku oznacza odpowiedź tak wolną, jak pozwalają same bieguny (czas narastania ok. 1,5 s zamiast 0,3–0,5 s). Kompromis: spokój kontra szybkość.

Zadania • część 4

1. $K_0 = 3,5/0,5 = 7$, uchyb $1/8 = 0,125$ m/s.
2. $K_a = K_i/b = 16$, uchyb $1/16 \approx 0,06$ m.
3. Uchyb od r zależy od typu całej pętli: $\frac{1}{1+L} \rightarrow 0$ dla skoku. Uchyb od siły: $\frac{G}{1+CG} \rightarrow \frac{1}{C(0)} = \frac{1}{K_p}$, bo całkowanie w G jest za siłą i skraca się w tym ilorazie. Żeby siła nie zostawiała uchybu, całkowanie musi być przed nią, czyli w regulatorze.

Zadania • część 5

1. $\omega = \sqrt{8/4,3} \approx 1,36$ rad/s, $|C| = 9,6$ (20 dB).
2. $C(j4,4) = 9,6 + j(4,3 \cdot 4,4 - 8/4,4) = 9,6 + j17,1$, faza $\arctan(17,1/9,6) \approx 61^\circ$. Obiekt ma tam $-90^\circ - \arctan 8,8 \approx -174^\circ$, razem -113° : zapas ok. 67° .

3. Obiekt $\frac{1}{s(s+0,5)}$ ma fazę od -90° w dół do -180° . PI dokłada fazę ujemną (od -90° do 0°). Faza pętli to $-180^\circ - \arctan(\omega/0,5) + \arctan(\omega T_i)$: powyżej -180° tylko wtedy, gdy zero regulatora jest wolniejsze od bieguna obiektu ($T_i > 2$ s). Routh daje to samo: stabilność tylko przy $K_i < 0,5K_p$. Taka pętla jest stabilna, ale bardzo wolna (np. $T_i = 20$ s daje $\omega_c \approx 0,16$ rad/s). Przy nastawach z symulacji 1 ($K_i = 8 > 4,8$) i $K_d = 0$ pętla jest niestabilna. Szybka pętla wysokości potrzebuje D.

Zadania do przemyślenia

1. 1. Prąd to stałe zakłócenie. Sternik P musi trzymać ster stale wychylony, a do tego potrzebuje stałej odchyłki kursu: okręt płynie lekko obok zadanego kierunku.
2. Człon I: sternik zauważa, że „ciągle znosi w lewo”, i przestawia „zero” steru. To jest pamięć uchybu, czyli całka.
2. 1. Stałe nachylenie to stała siła: PI ma całkę przed nią, więc uchyb wraca do zera.
2. Siła rosnąca liniowo w czasie (przy stałej prędkości nachylenie rośnie liniowo z czasem) to „rampa” zakłócenia; jedna całka w regulatorze zostawi stały uchyb, potrzebne byłyby dwie. W praktyce takie drogi nie występują długo, a uchyb jest mały.
3. 1. Jedna zmiana odczytu o 0,01 rad w ciągu 1 ms to 10 rad/s „prędkości”, podczas gdy wolny ruch o 1 rad/s daje zmianę odczytu co 10 ms. Pochodna to seria szpilek 10 rad/s przeplatanych zerami.
2. Człon D zamienia je na szarpnięcia momentu. Rozwiązania: filtr D, liczenie prędkości z dłuższego okna albo z czasu między taktami enkodera.
4. 1. P: $s^2 + K_p$, bieguny na osi urojonej, nie. PI: $s^3 + K_p s + K_i$, brak s^2 , Routh: nie.
2. PD: $s^2 + K_d s + K_p$, tak. PID: $s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i$, tak przy $K_d K_p > K_i$. D jest konieczny.
5. 1. Z samym P mianownik $s^2 + 0,5s + K_p$ ma $\zeta = 0,25/\sqrt{K_p}$: już przy $K_p = 1$ to $\zeta = 0,25$, ok. 44% przeregulowania. Nie ma „dobrego P”, od którego można zacząć.
2. Dla takich obiektów stroi się najpierw D (tłumienie), potem P, na końcu I, albo od razu z modelu. Systematyczne metody strojenia w lekcji 3.2 Strojenie: model z testu, reguły nastaw i regulacja kaskadowa.

Automatyka · Lekcja 3.1: Regulator PID · Źródła: K. J. Åström, T. Hägglund, *Advanced PID Control* (ISA 2006); K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems* (Princeton 2008); G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001); J. Kowal, *Podstawy automatyki* (AGH); N. Minorsky, „Directional stability of automatically steered bodies”, *J. Amer. Soc. Naval Engineers* 34 (1922). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c3_1.py).