

Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli

Pętla ma dwa sprzeczne zadania. Zakłócenia (podmuch, wzniesienie, błąd modelu) chcemy tłumić, więc wzmocnienie pętli powinno być duże. Szum czujnika chcemy ignorować, więc powinno być małe. Ta lekcja pokazuje, że tych dwóch celów nie da się pogodzić przy tej samej częstotliwości, bo $S + T = 1$, ale da się je rozdzielić między częstotliwości. Zobaczysz, jak kształtować charakterystykę pętli korektorami, ile kosztuje każdy decybel tłumienia i jakie granice stawia fizyka obiektu, a nie projektant.

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3,5 h zadań

ZADANIA

17 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

G. C. Goodwin i
in., *Control System
Design*, rozdz. 5.3,
8, 9; S. A. Frank,
*Control Theory
Tutorial*, rozdz.
3.4 i 4.5; K. J.
Åström, R. M.
Murray, *Feedback
Systems*, rozdz. o
kształtowaniu
pętli

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: materac wodny Bodego
- 1 Cztery funkcje pętli
- 2 Wymagania jako kształt $|L|$
- 3 Szum czujnika i człon D
- 4 Korektory wyprzedzające i opóźniające
- 5 Granice, których nie przeskoczysz
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: materac wodny Bodego

W 1945 r. Hendrik Bode opublikował książkę o projektowaniu wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym, w której udowodnił twierdzenie zaskakujące dla każdego, kto liczył na „idealny regulator”. Dla typowej pętli (stabilna pętla otwarta L , czyli bez biegunów w prawej półpłaszczyźnie, i transmitancja pętli opadająca przy wysokich częstotliwościach co najmniej jak $1/\omega^2$) pole pod krzywą $\ln |S(j\omega)|$ jest zawsze równe zero:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0.$$

Gdzie $|S| < 1$, logarytm jest ujemny: tam pętla tłumi zakłócenia. Całka równa zero oznacza, że gdzie indziej musi być $|S| > 1$: tam pętla zakłócenia *wzmacnia*. Nazywa się to **efektem materaca wodnego**: wciśnij materac w jednym miejscu, a wybrzusi się w innym. Sprzężenie zwrotne nie usuwa zakłóceń, tylko przenosi je z jednych częstotliwości na inne. Projektowanie pętli to decyzja, gdzie je przenieść.

Pytanie na start. Dron trzyma prędkość pionową regulatorem PI. Podmuch o okresie 20 s pętla tłumi prawie całkowicie. A drganie ramy od niewyważonego śmigła z częstotliwością 30 Hz? Czy pętla je stłumi, przepuści czy wzmocni? Odpowiedź w części 1.

Cztery funkcje pętli

W pętli z regulatorem C i obiektem P działają trzy sygnały zewnętrzne: wartość zadana r , zakłócenie d (na wejściu obiektu, jak podmuch, albo na wyjściu) i szum czujnika n . Każde połączenie „sygnał zewnętrzny $\rightarrow$ interesujący nas sygnał” opisuje jedna z czterech funkcji, w literaturze nazywanych „bandą czterech” (ang. *gang of four*): Frank 3.4

BANDA CZTERECH

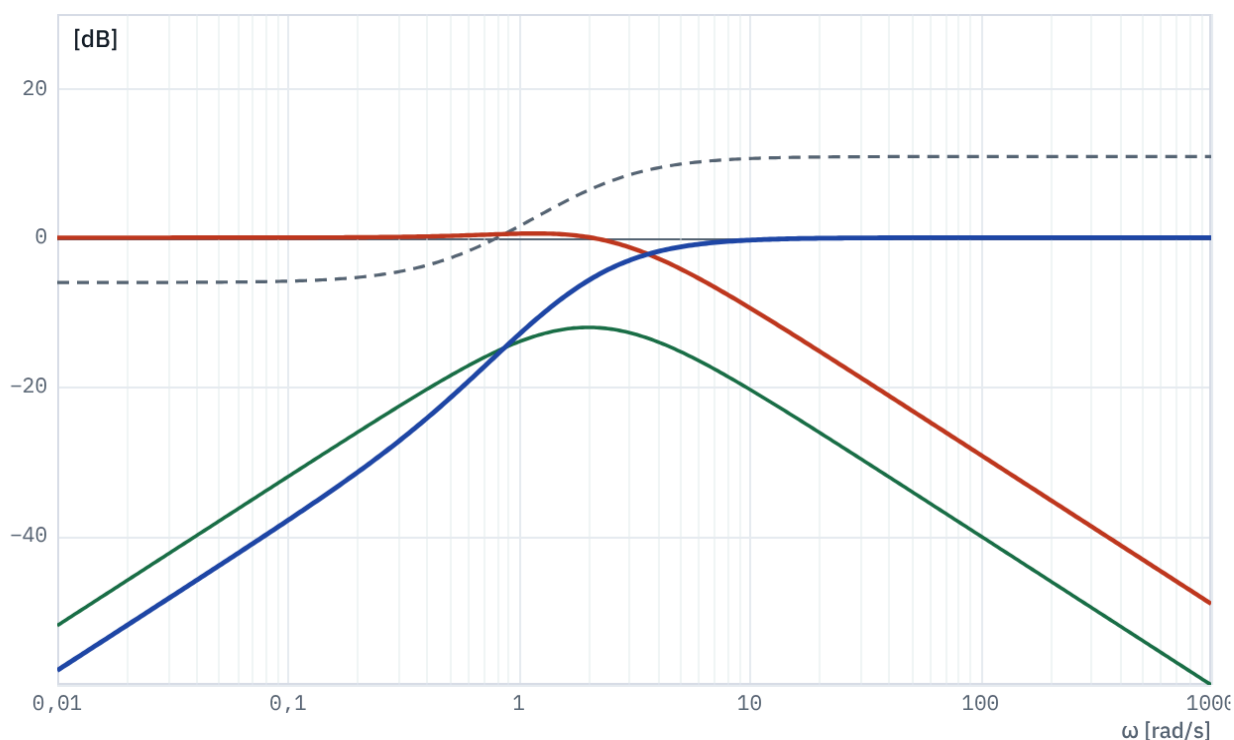
$$S = \frac{1}{1+L}, \quad T = \frac{L}{1+L}, \quad PS = \frac{P}{1+L}, \quad CS = \frac{C}{1+L}.$$

S : zakłócenie na wyjściu $\rightarrow$ wyjście i wartość zadana $\rightarrow$ uchyb. T : wartość zadana $\rightarrow$ wyjście i szum czujnika $\rightarrow$ wyjście (z minusem). PS : zakłócenie na wejściu obiektu $\rightarrow$ wyjście. CS : szum czujnika $\rightarrow$ sterowanie (z minusem), czyli jak bardzo szum szarpie elementem wykonawczym.

Najważniejsza tożsamość jest banalna: $S + T = \frac{1+L}{1+L} = 1$. Przy żadnej częstotliwości nie można mieć jednocześnie małego S (dobre tłumienie zakłóceń) i małego T (dobre tłumienie szumu). Wyjście z tej pułapki jest jedno: zakłócenia są zwykle wolne, a szum szybki. Projektuje się więc pętlę, w której $|S| \ll 1$ przy niskich częstotliwościach, a $|T| \ll 1$ przy wysokich.

Odpowiedź na pytanie z prologu. 30 Hz to ok. 190 rad/s, daleko powyżej częstotliwości przejścia pętli PI drona (3,6 rad/s). Tam $|S| \approx 1$: pętla drgań ramy nie widzi i ich nie tłumi. Nie wzmacnia ich jednak, bo dla tej pętli $|S|$ nigdzie nie przekracza 1 (zadanie 1.3). Drgania śmigła tłumi się mechanicznie albo filtrem w czujniku, nie pętlą.

SYMULACJA 1 Cztery funkcje pętli prędkości drona ($m = 1$ kg) z regulatorem PI. Przy niskich częstotliwościach $|S|$ jest głęboko poniżej 0 dB, przy wysokich $|T|$. Zwiększaj K_p i K_i : tłumienie rośnie, ale $|CS|$ (szum $\rightarrow$ ciąg) przy wysokich częstotliwościach dochodzi do K_p . Włącz silniki: pętla ma wtedy dwa bieguny więcej niż zer, obowiązuje całka Bodego i pojawia się garb $|S| > 1$.



— $|S|$: zakłócenie na wyjściu $\rightarrow$ wyjście — $|T|$: szum czujnika $\rightarrow$ wyjście
— $|PS|$: siła (podmuch) $\rightarrow$ prędkość — $|CS|$: szum czujnika $\rightarrow$ ciąg

ω_c 3,64 rad/s

max $|S|$ 1,00 (0,0 dB)

max $|T|$ 1,07

$|CS|$ przy 1000 rad/s 3,50 N/(m/s)

Przy niskich częstotliwościach $|S| \ll 1$ (zakłócenia tłumione) i $|T| \approx 1$ (wartość zadana śledzona).
Przy wysokich na odwrót. $S + T = 1$, więc nigdzie nie da się mieć obu małych naraz.

Stan na rysunku: $K_p = 3,5$ N/(m/s), $K_i = 4,0$ N/m, $m = 1$ kg.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 25 min

- 1 Dla pętli PI drona przy $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$ $|S| = 0,043$. Ile razy pętla tłumi zakłócenie na wyjściu o tej częstotliwości? Ile to dB?
- 2 Pokaż, że $|CS|$ dla regulatora PI przy bardzo wysokich częstotliwościach dąży do K_p . Co to oznacza dla szumu czujnika?
- 3 W symulacji 1 bez silników $|S|$ nigdzie nie przekracza 0 dB. Z silnikami pojawia się wyraźny garb. Dlaczego? Odpowiedz przez całkę Bodego.
- 4 Wyprowadź transmitancję od szumu czujnika n do sterowania u i wyjaśnij, dlaczego to $-CS$.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Wymagania jako kształt $|L|$

Ponieważ $|S| \approx 1/|L|$ tam, gdzie $|L| \gg 1$, i $|T| \approx |L|$ tam, gdzie $|L| \ll 1$, wymagania na S i T tłumaczą się bezpośrednio na kształt charakterystyki $|L(j\omega)|$. Tak projektuje się pętle metodą kształtowania pętli (ang. *loop shaping*): Frank 4.5

- **niskie częstotliwości** (zakłócenia, wolne zmiany wartości zadanej): $|L|$ duże, np. ponad 20–40 dB; całkowanie w regulatorze daje $|L| \rightarrow \infty$ przy $\omega \rightarrow 0$, czyli zerowy uchyb ustalony;
- **okolice ω_c** : przejście przez 0 dB z nachyleniem ok. -20 dB/dek. przez mniej więcej dekadę, żeby faza była daleko od -180° (lekcja 2.3 Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego, zadanie 8.3);
- **wysokie częstotliwości** (szum, nieznane rezonanse, niedokładny model): $|L|$ małe i szybko malejące.

Między tymi pasmami jest okolica ω_c , gdzie $|S|$ i $|T|$ są oba bliskie 1 i gdzie siedzi garb $|S|$. Jego wysokość, $\max |S|$, to odwrotność najmniejszej odległości wykresu Nyquista od -1 (lekcja 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie). Typowy cel: $\max |S| < 2$ (6 dB), czyli wykres nie podchodzi do -1 bliżej niż na 0,5.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Wymaganie: zakłócenia wolniejsze niż $0,5 \text{ rad/s}$ mają być tłumione co najmniej 10 razy. Co to znaczy dla $|L|$?

- 2 Wymaganie: szum czujnika szybszy niż 50 rad/s ma przechodzić na wyjście najwyżej w 5%. Co to znaczy dla $|L|$?

- 3 Oba wymagania z zadań 2.1 i 2.2 naraz: $|L| \geq 20$ dB przy 0,5 rad/s i $|L| \leq -26$ dB przy 50 rad/s. Czy da się je spełnić pętlą przechodzącą przez 0 dB z nachyleniem -20 dB/dek.?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Szum czujnika i człon D

W lekcji 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe człon D (regulator PD) dał pętli wysokości drona tłumienie, którego regulator P dać nie mógł. Ma jednak ciemną stronę. Pochodna to mnożenie przez s , więc $|C(j\omega)| = K|1 + j\omega T_d|$ rośnie bez końca z częstotliwością. Szum czujnika ma składowe o wysokich częstotliwościach, a $CS \rightarrow C$ przy $\omega \rightarrow \infty$. Idealny człon D przepuszcza je do silników z ogromnym wzmocnieniem.

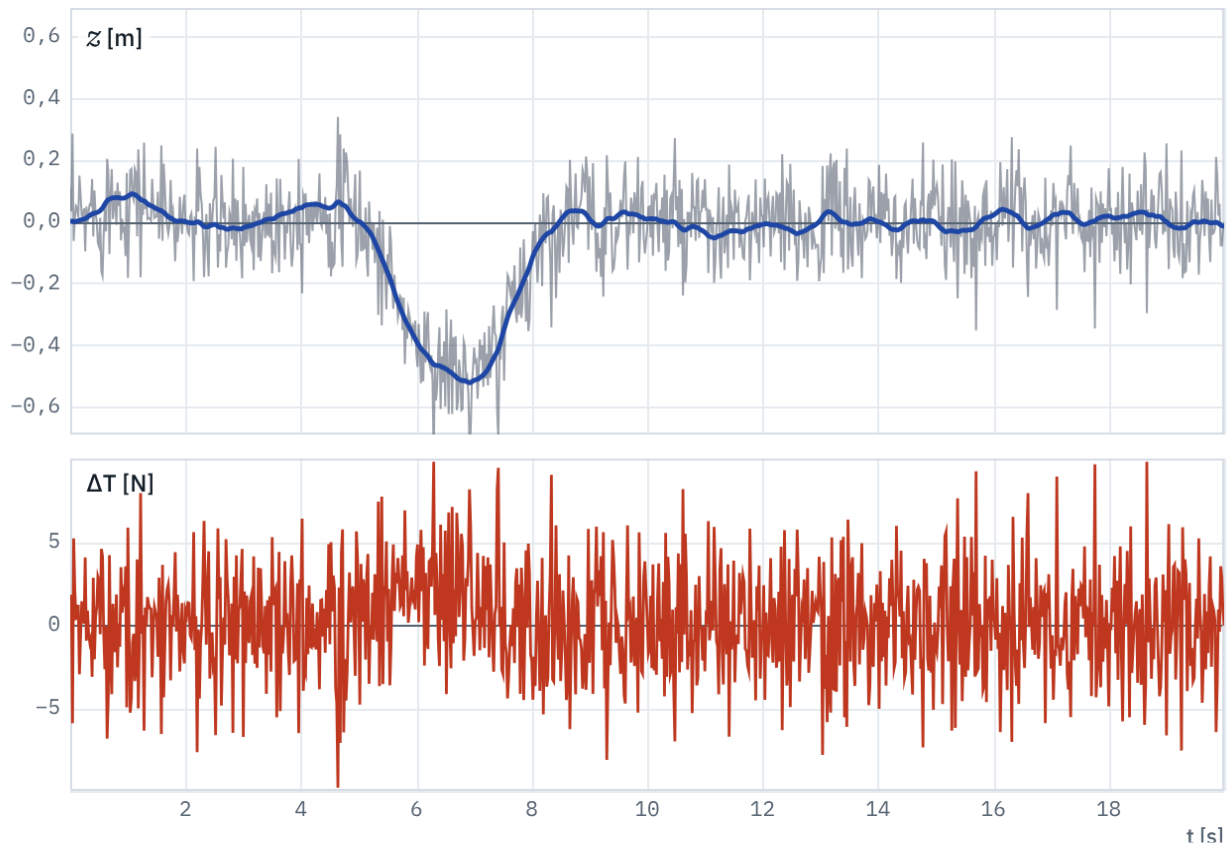
W kodzie wygląda to tak: pochodną liczy się z różnicy dwóch kolejnych pomiarów, $\frac{z_k - z_{k-1}}{\Delta t}$. Jeśli barometr ma szum o odchyleniu σ , różnica ma odchylenie $\sqrt{2}\sigma$, a po podzieleniu przez małe Δt wychodzi coś ogromnego (przykład 6.3). Rozwiązanie: **filtr członu D**. Pochodną przepuszcza się przez człon inercyjny o stałej czasowej T_d/N (typowo $N = 5-20$):

$$C_{PD}(s) = K \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_d s / N} \right).$$

Przy niskich częstotliwościach to zwykłe PD. Przy wysokich wzmocnienie rośnie tylko do $K(1 + N)$, a nie bez końca. Cena: filtr wnosi trochę opóźnienia fazy w okolicy ω_c , więc nie może być zbyt silny. Szczegóły strojenia filtru w lekcji 3.1 Regulator PID: działanie P, I, D i uchyb ustalony.

SYMULACJA 2

Dron z regulatorem PD wysokości ($m = 1$ kg), liczonym co 0,02 s na podstawie zaszumionego barometru. Górny wykres: wysokość (niebieska) i pomiar (szary), dolny: korekta ciągu. Wyłącz filtr członu D i patrz na silniki. Zwiększ szum, zmień T_d . Zwróć uwagę, że bez filtra dron drży stosunkowo niewiele, bo jego bezwładność wygładza szarpnięcia, ale silniki są stale w nasyceniu. Przez to pętla gorzej radzi sobie nawet z wolnym podmuchem.



— wysokość $z(t) - z_{\text{zad}}$ — pomiar barometru (z szumem) — korekta ciągu $\Delta T(t)$

RMS korekty ciągu 3,15 N

największy spadek po podmuchu 0,52 m

ζ pętli (bez szumu) 0,70

nasycenie tak

Filtr członu D obcina szybkie zmiany pomiaru, więc silniki pracują spokojniej i rzadziej wchodzą w nasycenie. Kompromis: im silniejszy filtr, tym większe opóźnienie w pętli i mniejszy zapas fazy.

Stan na rysunku: $K = 4,0$ N/m, $T_d = 0,575$ s, $\sigma = 0,10$ m, z filtrem D, podmuch 2 N; regulator co 0,02 s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- PD wysokości ma $K = 4$ N/m, $T_d = 0,575$ s. Ile wynosi $|C(j\omega)|$ przy 100 rad/s bez filtra? A z filtrem $N = 8$?

- 2 W symulacji 2 porównaj RMS korekty ciągu z filtrem i bez (przy $\sigma = 0,1$ m). Czy spadek wysokości po podmuchu wyraźnie się zmienia?
- 3 Dlaczego w pętli prędkości drona lepiej mierzyć prędkość akcelerometrem (scałkowanym) niż różniczkować barometr?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Korektory wyprzedzające i opóźniające

PD z filtrem ma transmitancję postaci $K \frac{s/\omega_z + 1}{s/\omega_p + 1}$ z $\omega_z < \omega_p$. Taki człon nazywa się **korektorem wyprzedzającym** (ang. *lead*). Ma zero przed biegunem, więc w paśmie między nimi faza jest dodatnia: korektor „wyprzedza” sygnał.

WYNIK · KOREKTOR WYPRZEDZAJĄCY

$$C(s) = K \frac{s/\omega_z + 1}{s/\omega_p + 1}, \quad \alpha = \frac{\omega_p}{\omega_z} > 1 : \quad \varphi_{\max} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \text{ przy } \omega = \sqrt{\omega_z \omega_p}.$$

Przy wysokich częstotliwościach wzmocnienie rośnie α razy. Dla $\alpha = 4$ podbicie fazy to 37° (koszt 12 dB więcej szumu), dla $\alpha = 10$: 55° (20 dB), dla $\alpha = 20$: 65° (26 dB).

Przepis: wybierz ω_c , odczytaj fazę obiektu w ω_c , policz, ile fazy brakuje do wymaganego zapasu (plus kilka stopni zapasu), dobierz α ze wzoru, umieść środek korektora w ω_c ($\omega_z = \omega_c / \sqrt{\alpha}$, $\omega_p = \omega_c \sqrt{\alpha}$) i dobierz K tak, żeby $|L(j\omega_c)| = 1$. Przykład 6.2 robi to dla drona.

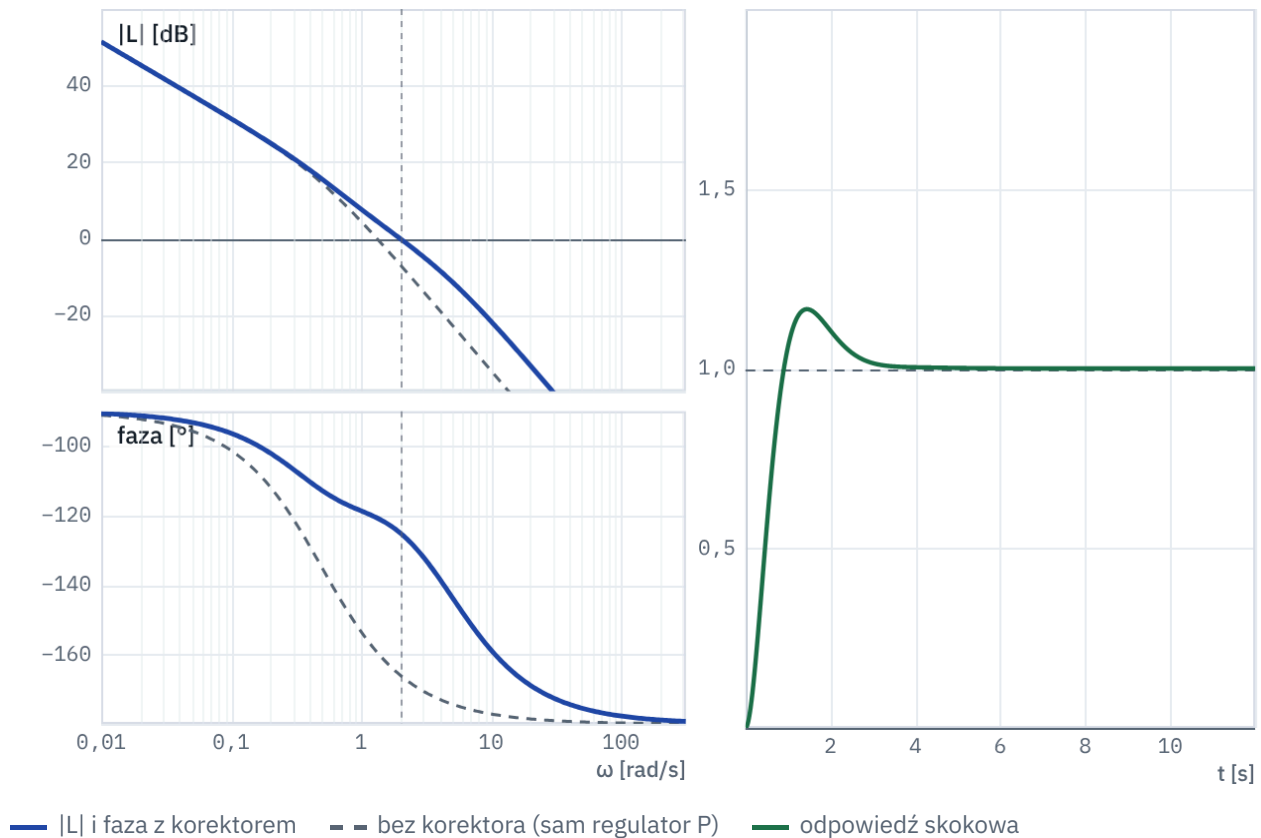
Odwrotny człon, $\frac{s/\omega_z + 1}{s/\omega_p + 1}$ z $\omega_p < \omega_z$, to **korektor opóźniający** (ang. *lag*). Podnosi wzmocnienie przy niskich częstotliwościach ω_z/ω_p razy, czyli poprawia dokładność, ale kosztuje trochę fazy. Dlatego umieszcza się go ok. dekadę poniżej ω_c , gdzie strata fazy w ω_c jest niewielka. Regulator PI to graniczny przypadek korektora opóźniającego z biegunem w zerze.

PO POLSKU NA EGZAMINIE

Spotkasz: człon korekcyjny, korektor przyspieszający (wyprzedzający, fazy dodatniej) i opóźniający, funkcja wrażliwości S i komplementarna funkcja wrażliwości T , zapas modułu (najmniejsza odległość od -1).

SYMULACJA 3 Korektor wyprzedzający dla pętli wysokości drona, obiekt $\frac{1}{s(s+0,5)}$.

Ustawienia startowe to projekt z przykładu 6.2. Wyłącz korektor (sam regulator P): zapas fazy spada do ok. 20°. Przesuń zero korektora daleko od ω_c i zobacz, jak korektor marnuje swoją fazę. Zwiększ α : więcej fazy, ale też więcej szumu przy wysokich częstotliwościach.



ω_c 1,99 rad/s

zapas fazy 55,1°

podbicie fazy korektora (max) 40,9° przy 2,00 rad/s

przeregulowanie 16,5 %

wzmocnienie dla szumu ($\omega \rightarrow \infty$) $\times 8,9$

Korektor wyprzedzający dokłada fazy dodatniej w okolicy ω_c (jak człon D), ale przy wysokich częstotliwościach wzmocnienie rośnie tylko α razy, a nie bez końca. To człon PD z filtrem.

Stan na rysunku: $K = 1,86$, $\omega_z = 0,91$ rad/s, $\alpha = 4,8$; obiekt $1/(s(s + 0,5))$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 35 min

1 Potrzeba 40° fazy przy 5 rad/s. Jakie α , ω_z i ω_p ?

2 Wyprowadź α z wymaganego $\varphi_{\max}$, odwracając wzór z ramki.

- 3 Korektor opóźniający ma podnieść wzmacnienie przy niskich częstotliwościach 10 razy, a w $\omega_c = 2$ rad/s ma kosztować najwyżej ok. 6° fazy. Gdzie umieścić ω_z i ω_p ?

- 4 W symulacji 3 zwiększ α do 15 przy tym samym ω_z . Zapas fazy rośnie, ale coś się pogarsza. Co?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

5 Granice, których nie przeskoczysz

Niektóre ograniczenia nie zależą od sprytu projektanta, tylko od obiektu. Trzy najważniejsze reguły (orientacyjne, z Goodwina i Åströma):

🔧 REGUŁY • FUNDAMENTALNE OGRANICZENIA

Opóźnienie θ : $\omega_c \lesssim 1/\theta$ (dokładniej $0,8/\theta$ przy zapasie fazy 45° , lekcja 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie).

Zero w prawej półpłaszczyźnie w z : $\omega_c \lesssim z/2$. Szybsza pętla „zobaczy” odpowiedź w złą stronę i będzie z nią walczyć (lekcja 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe).

Biegun niestabilny w p : $\omega_c \gtrsim 2p$. Pętla musi być szybsza niż niestabilność, inaczej nie zdąży jej opanować. Całka Bodego dostaje wtedy dodatnią prawą stronę $\pi \sum p_i$: każdy niestabilny biegun to większy garb $|S|$.

Gdy obiekt ma i niestabilny biegun, i prawe zero, i $z < 4p$ (mniej więcej), wymagania $\omega_c \gtrsim 2p$ i $\omega_c \lesssim z/2$ się wykluczają: takiego obiektu nie da się dobrze ustabilizować żadnym regulatorem liniowym. Klasyczny przykład to rower jadący tyłem lub z kierownicą sterującą tylnym kołem. Tak samo trzeba myśleć o zakłóceniach o częstotliwości bliskiej ω_c : nie da się ich stłumić, a garb $|S|$ może je nawet wzmacnić.

🔗 ZADANIA • CZĘŚĆ 5

3 zadania • ok. 20 min

- 1 Odpowiedź wysokości samolotu na ster ma zero w $+2$ rad/s. Jak szybka może być bezpośrednia pętla wysokości? Jaki czas narastania?

- 2 Rakieta bez sterowania jest niestabilna z biegunem w $+3$ 1/s (przewraca się jak ołówek).
Jak szybka musi być pętla orientacji? Co z opóźnieniem w tej pętli?

- 3 Dlaczego kulkę na odwróconej misce (lekcja 1.1) łatwiej utrzymać, gdy miska jest płaska, a trudniej, gdy jest stroma?

podstawowe średnie feynmanowskie

☰ METODA: KSZTAŁTOWANIE PĘTLI

1. **Pasma:** gdzie są zakłócenia (zwykle nisko), gdzie szum i niepewny model (wysoko). ω_c wybierz między nimi.
2. **Granice:** opóźnienie, prawe zera, niestabilne bieguny ograniczają ω_c z góry lub z dołu.
3. **Niskie częstotliwości:** całkowanie (PI) albo korektor opóźniający dla dokładności.
4. **Okolice ω_c :** korektor wyprzedzający (lub PD z filtrem) dla zapasu fazy 45–60°.
5. **Wysokie częstotliwości:** filtr, żeby $|CS|$ nie szarpało elementem wykonawczym.
6. **Sprawdzenie:** $\max |S| < 2$, symulacja z szumem i nasyceniem.

Przykład 6.1

Co pętla PI drona robi z różnymi sygnałami

Pętla prędkości drona ($m = 1$ kg, PI z $K_p = 3,5$, $K_i = 4$). Jak przenosi: podmuch o częstotliwości 0,3 rad/s, szum czujnika prędkości przy 30 rad/s (na prędkość i na ciąg)?

- 1 Podmuch (siła na wejściu obiektu): $|PS(j0,3)| \approx 0,073$ (m/s)/N. Podmuch 1 N daje wahania prędkości 0,07 m/s; bez pętli byłoby to $|P(j0,3)| = 1/|0,5 + 0,3j| \approx 1,7$ m/s.
- 2 Szum przy 30 rad/s: $|T(j30)| \approx 0,12$, czyli 12% szumu przechodzi na prawdziwą prędkość.
- 3 Ten sam szum na ciąg: $|CS(j30)| \approx 3,5$ N/(m/s), czyli prawie K_p .

Wynik: wolny podmuch stłumiony ok. 23 razy; szybki szum prawie nie rusza drona, ale szarpie silnikami ze wzmocnieniem K_p .

Sprawdzenie: zgadza się z symulacją 1 ✓. Kto chce mniej szarpania silników, musi zmniejszyć K_p albo odfiltrować pomiar, i za każde z tych rozwiązań płaci wolniejszą pętlą.

Przykład 6.2

Korektor wyprzedzający dla wysokości drona

Obiekt $G = \frac{1}{s(s+0,5)}$ (od ciągu do wysokości, $m = 1 \text{ kg}$). Cel: $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$, zapas fazy 50° .

Zaprojektuj korektor wyprzedzający.

- 1 Faza G w 2 rad/s : $-90^\circ - \arctan 4 \approx -166^\circ$, czyli zapas 14° . Brakuje 36° ; dokładamy 5° zapasu: 41° .
- 2 $\alpha = \frac{1+\sin 41^\circ}{1-\sin 41^\circ} \approx 4,8$; $\omega_z = 2/\sqrt{4,8} \approx 0,91$, $\omega_p = 2\sqrt{4,8} \approx 4,4 \text{ rad/s}$.
- 3 K z warunku $|L(j2)| = 1$: $K \approx 1,88$.
- 4 Wynik w python-control: $\omega_c = 2,0 \text{ rad/s}$, zapas fazy 55° , przeregulowanie 17% (zero korektora w $-0,91!$), czas ustalania $2,9 \text{ s}$.

Wynik: $C(s) = 1,88 \frac{s/0,91+1}{s/4,4+1}$. Szum przy wysokich częstotliwościach wzmacniany $K\alpha \approx 9$ razy, a nie bez końca jak w idealnym PD.

Sprawdzenie: regulator PD z lekcji 2.2 dawał zapas 68° , ale jego $|C|$ przy 100 rad/s wynosiło 230 . Korektor daje mniej fazy, za to 25 razy mniej szarpania silnikami ✓. To ten sam kompromis co filtr członu D w części 3.

Przykład 6.3

Dlaczego nikt nie różniczuje surowego barometru

Barometr drona ma szum o odchyleniu $0,3 \text{ m}$, regulator działa co $0,02 \text{ s}$. PD: $K = 4 \text{ N/m}$, $T_d = 0,575 \text{ s}$. Oszacuj szum w korekcie ciągu od członu D bez filtra.

- 1 Różnica dwóch niezależnych pomiarów: odchylenie $\sqrt{2} \cdot 0,3 \approx 0,42 \text{ m}$.
- 2 Pochodna: $0,42/0,02 \approx 21 \text{ m/s (!)}$.
- 3 Korekta ciągu: $K T_d \cdot 21 \approx 49 \text{ N}$.

Wynik: ok. 49 N szumu przy zapasie ciągu $9,8 \text{ N}$: silniki byłyby cały czas w nasyceniu, raz na maksimum, raz na zerze.

Sprawdzenie: sama część P daje tylko $K \cdot 0,3 = 1,2 \text{ N}$ ✓. Dlatego prędkość mierzy się innym czujnikiem albo filtruje, a człon D ma zawsze filtr.

Przykład 6.4

Garb, którego nie da się usunąć

Pętla $L = \frac{4}{(s+1)^3}$. Sprawdź numerycznie całkę Bodego i znajdź $\max |S|$.

- 1 L ma względny stopień 3 (trzy bieguny, brak zer) i jest stabilne, więc $\int_0^\infty \ln |S| d\omega = 0$.
- 2 Numerycznie (scipy): $-0,0000 \checkmark$.
- 3 $\max |S| = 3$ (najmniejsza odległość od -1 to $0,33$, lekcja 2.4).

Wynik: głębokie tłumienie przy niskich częstotliwościach ($|S(0)| = 0,2$) musi być splecione garbem $|S| = 3$ w okolicy $1,5$ rad/s.

Sprawdzenie: mniejsze K zmniejsza tłumienie przy niskich częstotliwościach i garb jednocześnie $\checkmark$. Nie ma ustawienia, które daje tylko korzyści.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

✗ „Dobra pętla tłumí zakłócenia na wszystkich częstotliwościach.”

Całka Bodego tego zabrania: gdzieś $|S| > 1$. Przy wysokich częstotliwościach pętla zakłóceń nie widzi, a w okolicy ω_c może je wzmacniać.

✗ „Człón D przewiduje przyszłość, więc zawsze pomaga.”

Dodaje fazy w okolicy ω_c , ale wzmacnia szum przy wysokich częstotliwościach. Bez filtra w praktyce jest bezużyteczny.

✗ „Szum, którego dron nie odczuwa, jest nieszkodliwy.”

Może nie ruszać wyjściem (T małe), a mimo to szarpać silnikami (CS duże): grzanie, zużycie, nasycenie.

✗ „Każdy obiekt da się dobrze ustabilizować, wystarczy sprytny regulator.”

Opóźnienia, prawe zera i niestabilne bieguny wyznaczają granice ω_c , a gdy się wykluczają, żaden regulator liniowy nie pomoże.

✗ „ S i T to dwa niezależne pokrętła.”

$S + T = 1$. Poprawiając jedną funkcję przy danej częstotliwości, pogarszasz drugą.

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Słuchawki z redukcją szumu.** Słuchawki z aktywną redukcją szumu mają mikrofon w muszli i pętlę, która odejmuje zmierzony dźwięk. Dobrze tłumią buczenie samolotu (ok. 100 Hz), słabo głosy (1–4 kHz). Wyjaśnij przez S i całkę Bodego. Dlaczego czasem słychać lekki szum przy kilku kHz?
- 2 **Dokładność za fazę.** Regulator PI to korektor opóźniający z biegunem w zerze. Dlaczego zero regulatora PI ($-K_i/K_p$) umieszcza się zwykle kilka razy poniżej ω_c ?
- 3 **Model niepewny przy wysokich częstotliwościach.** Model drona $\frac{1}{s(s+0,5)}$ ignoruje zginanie ramion i aerodynamikę śmigieł powyżej ok. 50 rad/s. Dlaczego dobrze, że $|T|$ jest tam małe?
- 4 **Gdzie postawić ω_c ?** Zakłócenia dla drona to podmuchy o pasmie do ok. 2 rad/s. Szum barometru jest istotny od ok. 10 rad/s, a rezonans ramy jest przy 80 rad/s. Pętla ma opóźnienie ok. 0,03 s. Zaproponuj ω_c i uzasadnij.
- 5 **Rower tyłem.** Rower z kierownicą sterującą tylnym kołem jest niestabilny (biegun p) i ma prawe zero (z) w odpowiedzi kierunku na skręt. Dla pewnej prędkości $p \approx z$. Czy człowiek może takim rowerem jeździć? Odpowiedz regułami z części 5.

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Co opisują S , T , PS i CS ?**
 Zakłócenie na wyjściu → wyjście; szum i wartość zadana → wyjście; zakłócenie na wejściu → wyjście; szum → sterowanie.

2 Dlaczego nie można mieć małego S i T jednocześnie?

Bo $S + T = 1$ przy każdej częstotliwości.

3 Co mówi całka Bodego?

Dla stabilnej pętli otwartej L opadającej co najmniej jak $1/\omega^2$: $\int_0^\infty \ln |S| d\omega = 0$; tłumienie w jednym paśmie oznacza wzmacnianie w innym.

4 Jaki kształt $|L|$ jest dobry?

Duże przy niskich częstotliwościach, przejście przez 0 dB z nachyleniem ok. -20 dB/dek., małe i szybko malejące przy wysokich.

5 Dlaczego człon D potrzebuje filtra?

Bo $|C| \propto \omega$ wzmacnia szybki szum; filtr ogranicza wzmocnienie do $K(1 + N)$.

6 Ile fazy daje korektor wyprzedzający o $\alpha = 10$?

Ok. 55° przy $\sqrt{\omega_z \omega_p}$, kosztem 20 dB więcej wzmocnienia szumu.

7 Jakie granice stawiają prawe zero i niestabilny biegun?

$\omega_c \lesssim z/2$ i $\omega_c \gtrsim 2p$.

8 Gdzie umieszcza się korektor opóźniający?

Ok. dekadę poniżej ω_c , żeby podnieść wzmocnienie przy niskich częstotliwościach bez dużej straty fazy.

FUNKCJE PĘTLI

$$S = \frac{1}{1+L}, \quad T = \frac{L}{1+L}, \quad S + T = 1$$

PS: zakłócenie na wejściu $\rightarrow$ wyjście; CS: szum $\rightarrow$ sterowanie

$$|L| \gg 1: S \approx 1/L; \quad |L| \ll 1: T \approx L$$

Bode: $\int_0^\infty \ln |S| d\omega = \pi \sum p_i^{\text{niest.}}$ (0 dla stabilnego)

$$\text{cel: } \max |S| < 2$$

KOREKTORY I GRANICE

$$\text{lead: } K \frac{s/\omega_z+1}{s/\omega_p+1}, \quad \alpha = \frac{\omega_p}{\omega_z}, \quad \sin \varphi_{\max} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}, \quad \text{środek w } \sqrt{\omega_z \omega_p} = \omega_c$$

$$\text{PD z filtrem: } K \left(1 + \frac{T_d s}{1+T_d s/N} \right), \quad |C|_{\max} = K(1+N)$$

lag: dekadę poniżej ω_c ; PI = lag z biegunem w 0

$$\omega_c \lesssim 1/\theta, \quad \omega_c \lesssim z/2, \quad \omega_c \gtrsim 2p$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** S. A. Frank, *Control Theory Tutorial*, rozdz. 3.4 (wrażliwości i kompromisy) i 4.5 (wrażliwości na wykresie Bodego), książka w otwartym dostępie.
- **Dla chętnych:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 8 (fundamentalne ograniczenia SISO) i 9 (kompromisy w częstotliwości); H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (1945), dla ciekawych historii.

To koniec części II. Mamy już cały klasyczny warsztat: transmitancje, bieguny i zera, wykresy Bodego i Nyquista, zapasy stabilności i kompromis między zakłóceniami a szumem. Część III wraca do praktyki: regulator PID w pełnej wersji, jego strojenie, kaskady, nasycenie, sprzężenie w przód i to, jak zapisać regulator w programie mikrokontrolera.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Ok. 23 razy, czyli -27 dB.
2. Przy $\omega \rightarrow \infty$: $L \rightarrow 0$, więc $CS \rightarrow C \rightarrow K_p$ (człon K_i/s znika). Szybki szum czujnika trafia do elementu wykonawczego pomnożony przez K_p : $0,1$ m/s szumu to $0,35$ N szarpnięcia przy $K_p = 3,5$.
3. Bez silników $L \approx \frac{K_p}{s}$ przy wysokich częstotliwościach (spadek jak $1/\omega$), więc twierdzenie w wersji „całka = 0” nie obowiązuje: całka jest ujemna (dokładnie $-\frac{\pi}{2}K_p$). Silniki dokładają biegun, L spada jak $1/\omega^2$ i całka musi wynosić zero: tłumienie przy niskich częstotliwościach trzeba „spłacić” garbem $|S| > 1$ w okolicy ω_c . Każdy prawdziwy obiekt ma jakieś dodatkowe bieguny, więc garb zawsze gdzieś jest.
4. Dla $r = 0$: $u = C(-y - n)$, $y = Pu$. Stąd $u(1 + CP) = -Cn$, czyli $\frac{u}{n} = -\frac{C}{1+L} = -CS$.

Zadania • część 2

1. $|S| \leq 0,1$, czyli $|L| \gtrsim 10$ (20 dB) dla $\omega \leq 0,5$ rad/s.
2. $|T| \leq 0,05$, czyli $|L| \lesssim 0,05$ (-26 dB) dla $\omega \geq 50$ rad/s.
3. Między $0,5$ a 50 rad/s są dwie dekadę, a trzeba spaść o 46 dB. Przy -20 dB/dek. spadek wyniósłby tylko 40 dB. Trzeba gdzieś stromiej: np. -20 dB/dek. wokół ω_c i -40 dB/dek. dalej. Jest to możliwe, ale ciasne: zapas fazy będzie umiarkowany.

Zadania • część 3

1. Bez filtra: $4|1 + j57,5| \approx 230$ N/m. Z filtrem ograniczenie do $K(1 + N) = 36$ N/m (przy 100 rad/s prawie dokładnie tyle). Ponad sześć razy mniej.
2. Bez filtra RMS jest ok. 2,5 razy większe (ok. 8 N zamiast 3 N), a silniki prawie cały czas siedzą na granicach. Wbrew intuicji spadek po podmuchu jest wtedy *większy* (ok. 1,1 m zamiast 0,5 m), choć podmuch jest wolny, a filtr usuwa tylko szybkie składowe: nasycony silnik nie ma już zapasu ciągu na kompensację. W liniowym modelu filtr prawie nie zmieniałby reakcji na podmuch (rozdzielenie pasm z części 2), a nieliniowość nasycenia miesza pasma. Dokładne liczby zależą od losowego szumu.
3. Całkowanie tłumi szybki szum (zachowuje się jak $1/s$), różniczkowanie go wzmacnia (s). Scałkowany akcelerometr ma za to dryf przy niskich częstotliwościach. Najlepiej połączyć oba: akcelerometr dla szybkich zmian, barometr dla wolnych. To filtr komplementarny (lekcja 4.5 Rozszerzony filtr Kalmana i fuzja czujników w jednej osi).

Zadania • część 4

1. $\alpha = \frac{1+\sin 40^\circ}{1-\sin 40^\circ} \approx 4,6$; $\omega_z = 5/\sqrt{4,6} \approx 2,3$ rad/s, $\omega_p = 5\sqrt{4,6} \approx 10,7$ rad/s.
2. $\sin \varphi = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, czyli $\alpha \sin \varphi + \sin \varphi = \alpha - 1$ i $\alpha = \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}$.
3. $\omega_z/\omega_p = 10$. Faza w ω_c : $\arctan(\omega_c/\omega_z) - \arctan(\omega_c/\omega_p)$. Dla $\omega_z = 0,2$, $\omega_p = 0,02$ rad/s: $84,3^\circ - 89,4^\circ \approx -5^\circ \checkmark$. Dekada poniżej ω_c to dobra reguła.

4. Wzmocnienie dla szumu (przy $\omega \rightarrow \infty$) rośnie do $K\alpha$, a środek korektora $\sqrt{\omega_z \omega_p}$ przesuwa się od ω_c . Więcej szumu w silnikach za mniej wykorzystanej fazy. Przy dużym α trzeba też przesunąć zero.

Zadania · część 5

1. $\omega_c \lesssim 1$ rad/s; $t_r \approx 1,5/\omega_c \approx 1,5$ s lub więcej.
2. $\omega_c \gtrsim 6$ rad/s. Przy zapasie fazy 45° opóźnienie musi spełniać $\theta \lesssim 0,8/6 \approx 0,13$ s. Szybki obiekt niestabilny wymaga szybkich czujników i obliczeń (lekcja 11 Rakiet: orientacja i ciąg wektorowany).
3. Stroma misa to szybsza niestabilność, czyli większe p (kulka szybciej się stacza). Pętla musi mieć $\omega_c \gtrsim 2p$, a z opóźnieniem regulatora (wiatrak musi się rozpędzić) granica $\omega_c \lesssim 1/\theta$ szybko staje się nieosiągalna. Tak samo łatwiej balansować długim kijem na palcu niż krótkim.

Zadania do przemyslenia

1. Pętla ma duże $|L|$ przy niskich częstotliwościach ($|S| \ll 1$, tłumienie buczenia). Przy wyższych głośnik, mikrofon i elektronika wnoszą opóźnienia, więc ω_c musi być umiarkowane.
2. Całka Bodego: tłumienie przy niskich częstotliwościach musi być splecone $|S| > 1$ wyżej, czyli w okolicy ω_c (kilka kHz pętla lekko wzmacnia hałas). Dlatego słuchawki mają też pasywne wygłuszenie, które działa na wysokie częstotliwości.
1. Człon $\frac{K_p s + K_i}{s}$ ma fazę $-90^\circ + \arctan(\omega K_p/K_i)$. Daleko powyżej zera faza jest bliska 0° , blisko zera bliska -45° do -90° .
2. Zero kilka razy poniżej ω_c daje w ω_c stratę fazy kilkunastu stopni, a przy niskich częstotliwościach pełne całkowanie. W pętli prędkości drona zero leży w 1,14 rad/s przy $\omega_c = 3,6$ rad/s: strata ok. 18° , przy zapasie fazy 80° akceptowalna.
1. Względny błąd modelu Δ (prawdziwe $P = P_0(1 + \Delta)$) nie zdestabilizuje pętli, jeśli $|T\Delta| < 1$ na wszystkich częstotliwościach (twierdzenie o małym wzmocnieniu, Frank rozdz. 7).
2. Przy wysokich częstotliwościach $|\Delta|$ może być rzędu 1 lub więcej, więc potrzeba $|T| \ll 1$. Małe $|T|$ wysoko to nie tylko ochrona przed szumem, ale też odporność na to, czego model nie wie (lekcja 5.2 LQG i odporność).
1. Opóźnienie: $\omega_c \lesssim 0,8/0,03 \approx 27$ rad/s. Szum: chcemy $|T|$ małe od 10 rad/s, czyli ω_c wyraźnie poniżej 10.
2. Podmuchy do 2 rad/s chcemy tłumić, więc ω_c powinno być kilka razy wyżej. Kompromis: ok. 4–6 rad/s, z regulatorem PI i filtrem pomiaru. Rezonans przy 80 rad/s jest wtedy ponad dekadę wyżej i przy szybkim spadku $|L|$ niegroźny.
1. Potrzeba $\omega_c \gtrsim 2p$ (opanować niestabilność) i $\omega_c \lesssim z/2$ (prawie zero). Przy $p \approx z$ obie nierówności się wykluczają.
2. Nawet najlepszy regulator liniowy sobie nie poradzi. Doświadczenia z takimi rowerami opisywane w literaturze (Åström i in.) potwierdzają, że są w praktyce niejezdne.

Automatyka · Lekcja 2.5: Zakłócenia, szum i wrażliwość · Źródła: G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 5, 8, 9; S. A. Frank, *Control Theory Tutorial* (Springer 2018), rozdz. 3, 4, 7; K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*; H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (1945). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c2_5.py).