

Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie

W poprzednich lekcjach kilka razy zatrzymaliśmy się przy fazie -180° w częstotliwości przejścia. Ta lekcja wyjaśnia, dlaczego to dokładnie granica stabilności: sygnał, który obiega pętlę i wraca w tej samej fazie i z tą samą amplitudą, może krążyć bez końca. Zobaczysz, jak zmierzyć odległość od tej granicy (zapas fazy, wzmocnienia i opóźnienia), jak przekłada się ona na przeregulowanie i dlaczego opóźnienie w pętli jest najgorszym wrogiem automatyka. Kryterium Nyquista poznasz w wersji, której naprawdę się używa: jako obraz krzywej omijającej punkt -1 .

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

G. C. Goodwin i
in., *Control System
Design*, rozdz. 5.7–
5.8; S. A. Frank,
*Control Theory
Tutorial*, rozdz.
8.2 i 13; H.
Nyquist,
*Regeneration
Theory* (1932)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: samolot, który kołysał pilot
- 1 Dlaczego punkt -1
- 2 Zapasy fazy, wzmocnienia i opóźnienia
- 3 Wykres Nyquista
- 4 Opóźnienie: najgorszy wróg
- 5 Zapasy pętli drona
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: samolot, który kołysał pilot

2 lutego 1989 r. prototyp szwedzkiego myśliwca JAS 39 Gripen rozbił się przy lądowaniu w Linköping. Samolot miał cyfrowy układ sterowania fly-by-wire: pilot nie poruszał sterami bezpośrednio, tylko wydawał polecenia komputerowi. Tuż przed przyziemieniem pilot zaczął korygować ruchy samolotu, samolot odpowiadał z opóźnieniem, pilot korygował mocniej, i kołysanie rosło, aż maszyna uderzyła w pas. Zjawisko ma nazwę: **oscylacje wywołane przez pilota** (ang. *pilot-induced oscillation*, PIO). Przyczyną był układ sterowania, który był jednocześnie zbyt czuły i zbyt wolny. Pilot przeżył, a prawa sterowania przeprojektowano.

Pilot i samolot tworzyli pętlę sprzężenia zwrotnego: pilot był regulatorem, samolot obiektem. Duże wzmocnienie (czułość) i opóźnienie (wolna odpowiedź) to ta sama mieszanka co w prysznicu z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta. Ta lekcja daje narzędzia, żeby takie sytuacje przewidzieć z wykresu, zanim ktoś wsiądzie do kabiny.

Pytanie na start. Człowiek reaguje z opóźnieniem ok. 0,2–0,3 s. Jak szybko może zmieniać się pętla, w której człowiek jest regulatorem, żeby jej nie rozkołysać? Odpowiedź w części 4.

1

Dlaczego punkt –1

Pętla zamknięta ma bieguny tam, gdzie $1 + L(s) = 0$, czyli $L(s) = -1$. Na granicy stabilności biegun leży na osi urojonej, $s = j\omega$, więc dla pewnej częstotliwości $L(j\omega) = -1$. To **punkt krytyczny**.

Obraz fizyczny: pętla otwarta w jednym miejscu, na wejściu sinusoida o częstotliwości ω . Po przejściu przez L ma ona amplitudę $|L(j\omega)|$ razy większą i fazę przesuniętą o $\arg L(j\omega)$. Węzeł sumacyjny ze znakiem minus odwraca ją, czyli dokładnie 180° . Jeśli $\arg L = -180^\circ$, sygnał wraca w tej samej fazie co wejście. Jeśli dodatkowo $|L| = 1$, wraca identyczny. Możemy wtedy zamknąć pętlę, wyłączyć źródło, a sinusoida będzie krążyć sama, bez końca. Jeśli $|L| > 1$ przy fazie -180° , każdy obieg ją wzmacnia i drgania rosną. Goodwin 5.7

WARUNEK GRANICZNY

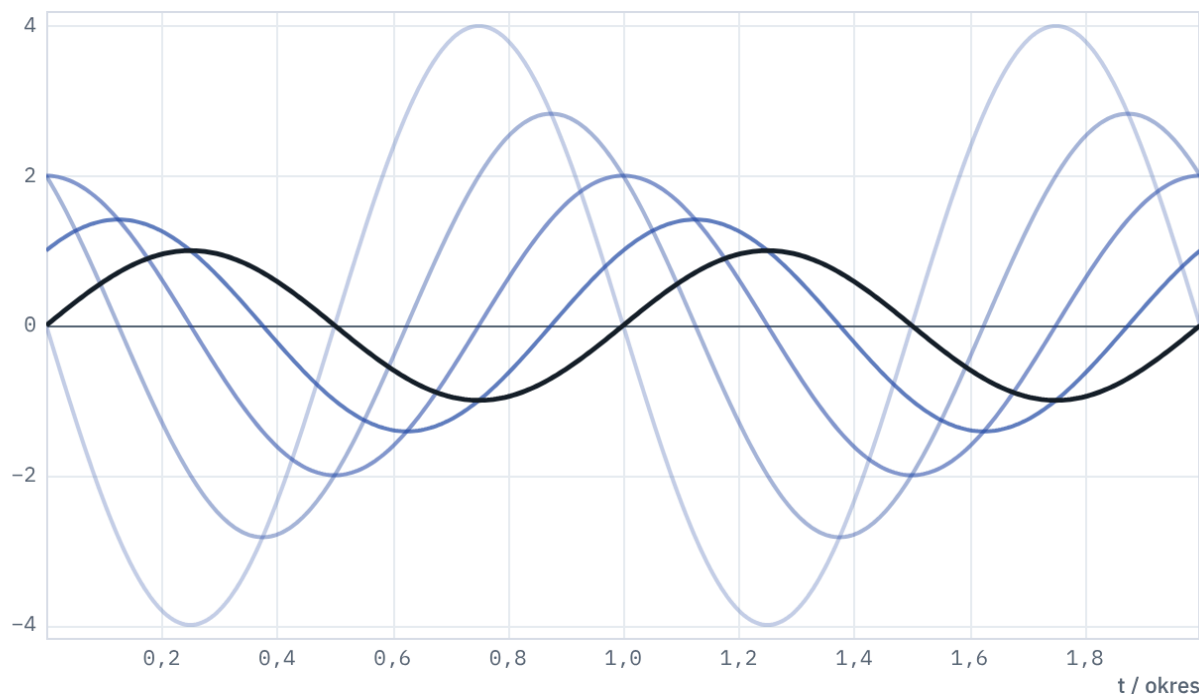
$$L(j\omega) = -1 \iff |L(j\omega)| = 1 \text{ i } \arg L(j\omega) = -180^\circ.$$

Dla typowych pętli (obiekt stabilny, faza L maleje z częstotliwością) pętla zamknięta jest stabilna, gdy w częstotliwości, przy której faza wynosi -180° , wzmocnienie $|L|$ jest mniejsze od 1. Równoważnie: gdy faza w częstotliwości przejścia ω_c jest większa od -180° .

To jest pisk mikrofonu z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta: dla jednej częstotliwości dźwięk wraca z głośnika w fazie i wzmocniony. Tak działa też każdy generator drgań w elektronice, z tą różnicą, że tam warunek $L = -1$ spełnia się celowo.

SYMULACJA 1

Sinusoida obiega pętlę $L = \frac{K}{(s+1)^3}$ z ujemnym sprzężeniem. Czarna krzywa to sygnał na początku, coraz jaśniejsze to ten sam sygnał po pierwszym, drugim, trzecim i czwartym obiegu. Ustaw $\omega = \sqrt{3} \approx 1,73$ rad/s, przy której faza L wynosi -180° , i zmieniaj K . Przy $K = 8$ sygnał wraca identyczny, przy $K > 8$ rośnie. Przy innych częstotliwościach kolejne obieg nie są zgodne w fazie.



— sygnał na początku — po kolejnych obiegach pętli (coraz jaśniej)

$|L(j\omega)|$ 1,414

faza $L(j\omega)$ $-135,0^\circ$

przesunięcie po obiegu (z minusem) $45,0^\circ$

Sygnał wraca przesunięty w fazie, więc kolejne obieg nie dodają się zgodnie. Groźna jest tylko częstotliwość, przy której faza L wynosi -180° (tu $\sqrt{3} \approx 1,73$ rad/s).

Stan na rysunku: $K = 4,00$, $\omega = 1,000$ rad/s; $|L| = 1,414$, przesunięcie po obiegu $45,0^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

1 Dla $L = \frac{K}{(s+1)^3}$ znajdź ω , przy której faza wynosi -180° , i wartość $|L|$ w tym miejscu dla $K = 4$. Czy pętla jest stabilna?

2 Czy pętla z $L = \frac{K}{s(s+1)}$ może stracić stabilność przy dużym K ? Spójrz na fazę.

3 Dlaczego warunek „faza -180° ” dotyczy pętli z *ujemnym* sprzężeniem? Jaki byłby warunek dla sprzężenia dodatniego?

2 Zapasy fazy, wzmocnienia i opóźnień

Stabilna pętla to za mało. Model nigdy nie jest dokładny: masa się zmienia, czujnik się spóźnia, silniki słabną. Chcemy wiedzieć, *jak daleko* jesteśmy od punktu -1 . Służą do tego trzy liczby odczytywane z wykresu Bodego pętli:

DEFINICJE · ZAPASY STABILNOŚCI

Zapas fazy $\varphi_m = 180^\circ + \arg L(j\omega_c)$: o ile stopni faza w częstotliwości przejścia jest powyżej -180° . Tyle dodatkowego opóźnienia fazy pętla zniesie.

Zapas wzmocnienia $GM = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|}$, gdzie $\arg L(j\omega_{180}) = -180^\circ$: ile razy można zwiększyć wzmocnienie, zanim pętla straci stabilność (zwykle w dB).

Zapas opóźnienia $\theta_m = \frac{\varphi_m [\text{rad}]}{\omega_c}$: jakie dodatkowe opóźnienie zjada cały zapas fazy.

Typowe wymagania projektowe: zapas fazy $45-60^\circ$, zapas wzmocnienia $6-12$ dB (czyli $2-4$ razy). Zapas fazy ma też prostą interpretację w czasie. Dla pętli zachowującej się jak człon oscylacyjny obowiązuje reguła $\zeta \approx \varphi_m / 100^\circ$ (dla φ_m do ok. 60°), a więc i przeregulowanie:

Zapas fazy, tłumienie i przeregulowanie dla $L = \frac{\omega_0^2}{s(s+2\zeta\omega_0)}$

ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1
zapas fazy	11°	23°	33°	43°	52°	59°	65°	76°
przeregulowanie	73%	53%	37%	25%	16%	9,5%	4,6%	0

Mały zapas fazy to zawsze silne dzwonienie. Gdy w odpowiedzi skokowej pętli widzisz kilka wahaniec, wykres Bodego pokaże fazę w okolicy -160° przy ω_c .

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 30 min

1 Pętla ma $\omega_c = 2$ rad/s, a faza w ω_c wynosi -135° . Ile wynosi zapas fazy i zapas opóźnień?

2 Dla $L = \frac{4}{(s+1)^3}$: zapas wzmocnienia w dB? Ile wynosi ω_c i zapas fazy (python-control albo symulacja 2)?

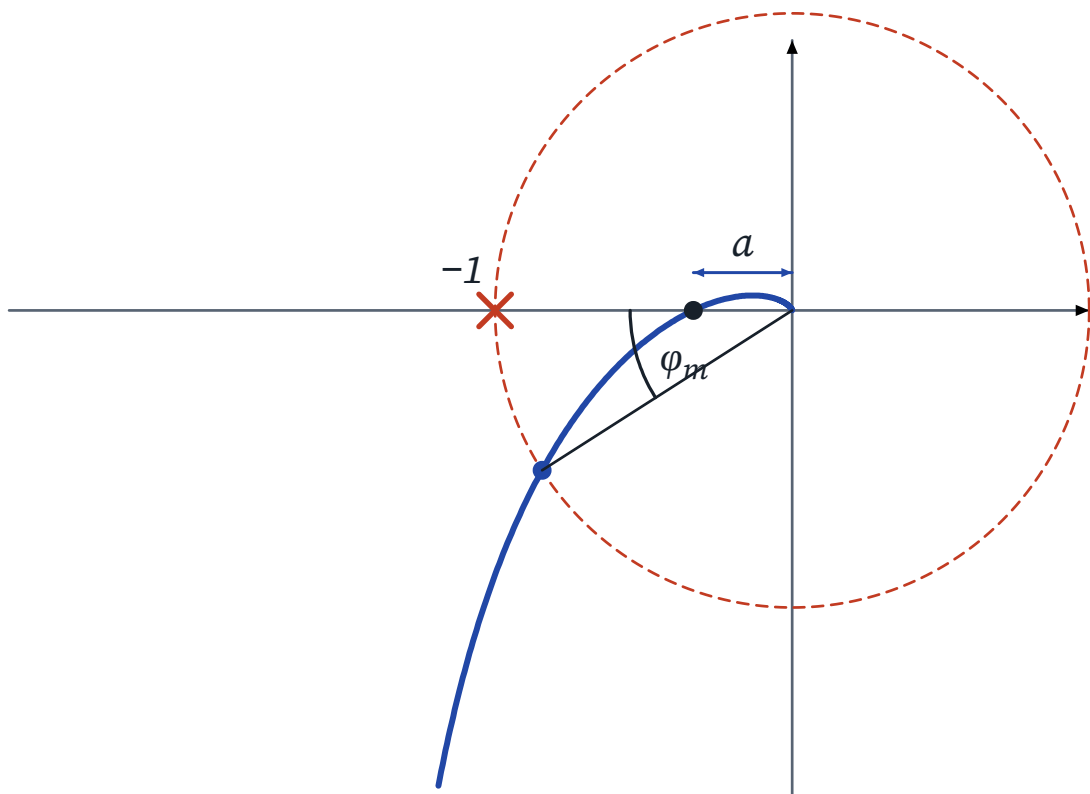
- 3 Pętla ma zapas fazy 40° . Oszacuj przeregulowanie odpowiedzi skokowej. Co się stanie, gdy czujnik doda opóźnienie zjadające 15° fazy przy ω_c ?

- 4 Dlaczego zapas wzmocnienia sam nie wystarczy? Podaj przykład pętli z nieskończonym zapasem wzmocnienia, która mimo to źle się zachowuje.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Wykres Nyquista

Wykres Bodego pokazuje moduł i fazę $L(j\omega)$ na dwóch osobnych rysunkach. Nyquist narysował $L(j\omega)$ jako krzywą na płaszczyźnie zespolonej: dla każdej częstotliwości jeden punkt. W polskich podręcznikach to **charakterystyka amplitudowo-fazowa**. Na takim rysunku od razu widać, jak blisko punktu -1 przechodzi krzywa.



Wykres $L(j\omega)$ dla ω od małych do dużych wartości. Krzyżyk to punkt -1 , przerywany okrąg to $|L| = 1$. Kąt φ_m między ujemną półosią rzeczywistą a punktem przecięcia krzywej z okręgiem to zapas fazy. Odcinek a od początku układu do przecięcia krzywej z ujemną półosią rzeczywistą to odwrotność zapasu wzmocnienia.

Oba zapasy mają tu prostą geometrię. Krzywa przecina okrąg jednostkowy w ω_c , a **zapas fazy** to kąt, o jaki trzeba by ten punkt obrócić, żeby trafił w -1 . Krzywa przecina ujemną półoś rzeczywistą w ω_{180} w odległości a od początku układu, a **zapas wzmocnienia** to $1/a$. Najbardziej uczciwa miara to **najmniejsza odległość krzywej od -1** , czyli $\min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$. Jest ona

odwrotnością największej wartości $|S(j\omega)|$, która wróci w lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli.

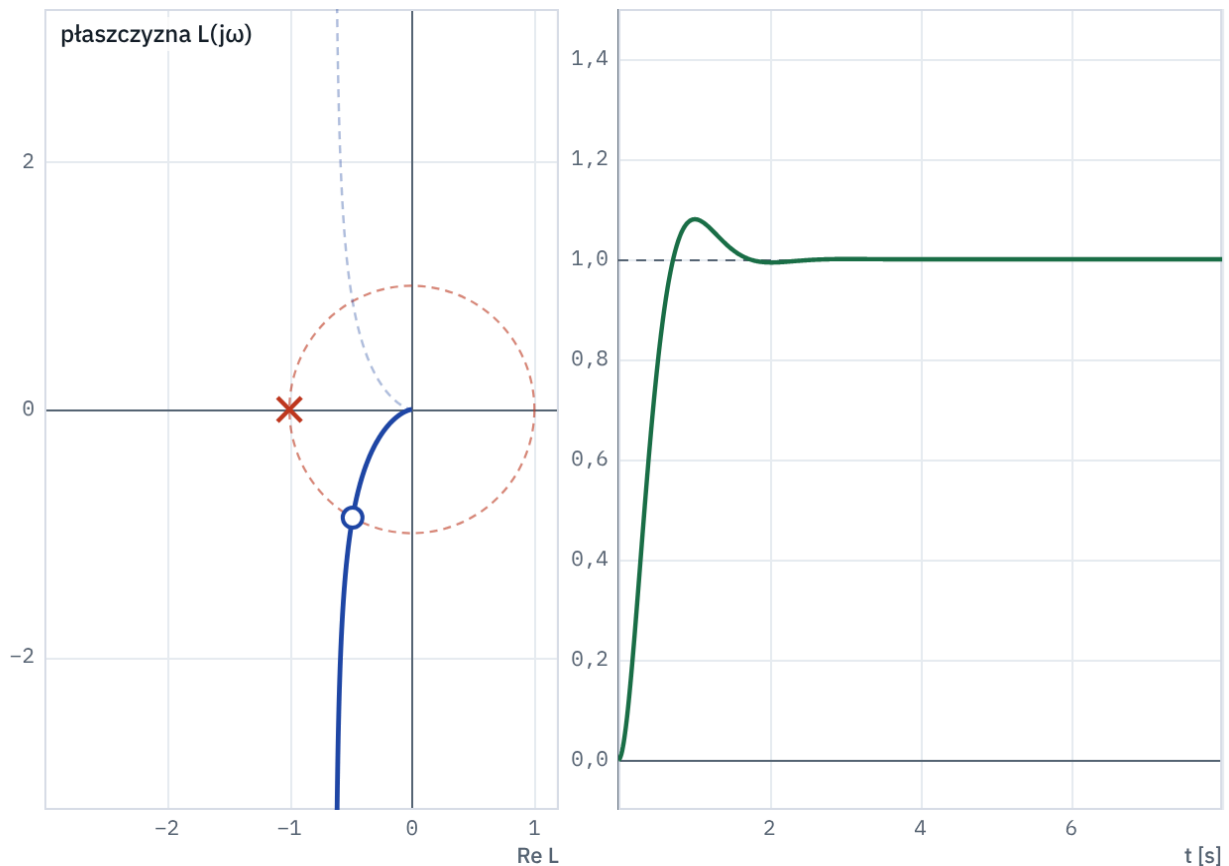
🔊 KRYTERIUM NYQUISTA (DLA OBIEKTU STABILNEGO)

Jeśli $L(s)$ nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie (bieguny na osi urojonej, np. całkowanie w $s = 0$, omija się małym półokręgiem), to pętla zamknięta jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wykres $L(j\omega)$ dla ω od $-\infty$ do $+\infty$ **nie obiega** punktu -1 .

⚠ WERSJA OGÓLNA (DLA ZAINTERESOWANYCH)

Ogólnie: $Z = N + P$, gdzie P to liczba biegunów L w prawej półpłaszczyźnie, N to liczba obiegów punktu -1 zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a Z to liczba biegunów pętli zamkniętej w prawej półpłaszczyźnie. Wynika to z zasady argumentu w analizie zespolonej: przyrost argumentu funkcji wzdłuż zamkniętej krzywej liczy jej zera i bieguny w środku. Dla obiektu niestabilnego ($P > 0$) pętla musi obieć -1 dokładnie P razy przeciwnie do wskazówek zegara. Na egzaminach z automatyki ta wersja jest częsta. W praktyce inżynierskiej większość pętli ma stabilną L i wystarczy wersja z ramki powyżej.

SYMULACJA 2 Wykres Nyquista (lewy) i odpowiedź skokowa pętli zamkniętej (prawy) dla trzech pętli. Gruba krzywa to $L(j\omega)$ dla $\omega > 0$, cienka przerywana to jej lustrzane odbicie ($\omega < 0$). Kółeczka zaznaczają ω_c i ω_{180} . Zwiększaj K albo opóźnienie θ i obserwuj, jak krzywa zbliża się do -1 i jak zaczyna dzwonić odpowiedź. Gdy krzywa obejmie -1 , pętla jest niestabilna.



— $L(j\omega)$, $\omega > 0$ — punkt -1 i okrąg jednostkowy — odpowiedź skokowa pętli zamkniętej

ω_c 2,77 rad/s

zapas fazy 61,0°

zapas wzmocnienia ∞

zapas opóźnienia 0,385 s

najmniejsza odległość od -1 0,75

Duża odległość wykresu od -1 : dobre zapasy, spokojna odpowiedź. Zapas fazy to kąt, o jaki trzeba by obrócić punkt na okręgu jednostkowym, żeby trafić w -1 .

Stan na rysunku: $L = K/(s(0,2s + 1))$, $K = 3,16$, $\theta = 0,000$ s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 30 min

- Wykres $L(j\omega)$ przecina ujemną półoś rzeczywistą w punkcie $-0,25$. Ile wynosi zapas wzmocnienia (w razach i w dB)?

2 Jak wygląda wykres Nyquista członu całkującego $\frac{K}{s}$? Czy pętla z takim L może być niestabilna?

3 W symulacji 2 dla „trzech inercji” ustaw $K = 4$ i odczytaj najmniejszą odległość krzywej od -1 . Ile wynosi największa wartość $|S|$?

4 Dlaczego dla obiektu niestabilnego (np. kulki na odwróconej misce) wykres Nyquista stabilnej pętli *musi* obiegać -1 ?

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

4 Opóźnienie: najgorszy wróg

Opóźnienie $e^{-\theta s}$ nie zmienia modułu L , ale obraca każdy punkt wykresu Nyquista o kąt $-\omega\theta$. Punkt przy ω_c obraca się o $\omega_c\theta$ radianów, prosto w stronę -1 . Dlatego **zapas opóźnienia** $\theta_m = \varphi_m/\omega_c$ mówi dokładnie, ile opóźnień pętla zniesie. Przy tym samym zapasie fazy szybkość pętli (duże ω_c) znosi mniej opóźnień niż wolna.

🔧 REGUŁA · SZYBKOŚĆ PĘTLI A OPÓŹNIENIE

$$\omega_c \theta \lesssim \frac{\pi}{4} \quad (\text{zapas fazy ok. } 45^\circ \text{ dla pętli } L \approx \frac{\omega_c}{s} e^{-\theta s}).$$

Pętla z opóźnieniem θ nie może mieć częstotliwości przejścia wiele większej niż ok. $0,8/\theta$. Opóźnienia nie da się „przeregulować” większym wzmocnieniem; można je tylko skrócić albo pogodzić się z wolniejszą pętlą.

Sprawdźmy na prysznicu z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta: $L = \frac{k}{s} e^{-\theta s}$, $\omega_c = k$, zapas fazy $90^\circ - k\theta \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$. Zero zapasu przy $k\theta = \pi/2$, dokładnie jak wtedy. Dla $k = 0,3$ 1/s i $\theta = 2$ s zapas fazy wynosi ok. 56° , stąd mały przelot w symulacji z lekcji 1.1.

Odpowiedź na pytanie z prologu. Człowiek z opóźnieniem $\theta \approx 0,25$ s, który steruje czymś „całkującym” (kierownica i kurs samochodu, drążek i przechylenie samolotu), może utrzymać zapas fazy 45° przy $\omega_c \lesssim 0,8/0,25 \approx 3$ rad/s. Gdy samolot wymaga szybszych poprawek, bo jest zbyt czuły albo sam reaguje ze zwłoką, zapas fazy pętli pilot-samolot topnieje i zaczyna się PIO. Doświadczeni piloci wiedzą, że w takiej sytuacji najlepiej puścić drążek: otwarcie pętli przerywa oscylacje.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pętla ma $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ i zapas fazy 50° . Ile opóźnień (np. czasu obliczeń komputera) może jeszcze dodać, zanim straci stabilność?
- 2 Łazik marsjański jest sterowany z Ziemi z opóźnieniem sygnału do ok. 20 minut w jedną stronę (od ok. 3 do 22 minut, zależnie od położenia planet). Jaka byłaby największa sensowna częstotliwość przejścia pętli „operator na Ziemi + łazik”? Co z tego wynika dla projektu łazika?
- 3 Pętla PI prędkości drona ma $\omega_c = 3,6 \text{ rad/s}$ i zapas fazy 80° . Ile opóźnień czujnika zniesie? Jaki zapas fazy zostanie przy opóźnieniu 0,2 s? Sprawdź przeregulowanie w symulacji 2.

□□□ podstawowe ■■■ średnie ■■■■ feynmanowskie

5 Zapasy pętli drona

Zapasy trzech pętli drona ($m = 1 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$)

pętla	ω_c	zapas fazy	zapas opóźnień	ζ z reguły / rzeczywiste
P wysokości, $K = 4$	1,97 rad/s	14°	0,13 s	0,14 / 0,125
PD wysokości, $K = 4$, $T_d = 0,575 \text{ s}$	2,69 rad/s	68°	0,44 s	0,68 / 0,70
PI prędkości, $K_p = 3,5$, $K_i = 4$	3,64 rad/s	80°	0,39 s	bliskie 1 / 1,0

Reguła $\zeta \approx \varphi_m/100^\circ$ trafia zaskakująco dobrze. Pętla P wysokości ma zapas opóźnień zaledwie 0,13 s: barometr, który uśrednia pomiar przez 0,1 s, zjadłby prawie cały zapas. PD i PI znoszą prawie 0,4 s, ponad trzy razy więcej.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 15 min

- 1 Barometr drona ma filtr, który działa w przybliżeniu jak opóźnienie 0,1 s. Ile zapasu fazy zostanie pętli PD wysokości z tabeli? Czy to akceptowalne?

2

Te same dane dla pętli P wysokości. Co się stanie?



▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: OCENA STABILNOŚCI I ZAPASÓW

1. **Transmitancja pętli** $L = CP \cdot (\text{czujnik}) \cdot e^{-\theta s}$; sprawdź, czy L ma bieguny w prawej półpłaszczyźnie.
2. **Bode**: ω_c (moduł 0 dB) i faza w niej $\rightarrow$ zapas fazy; ω_{180} i moduł w niej $\rightarrow$ zapas wzmocnienia.
3. **Zapas opóźnienia** φ_m/ω_c : porównaj z opóźnieniami, których nie ma w modelu (obliczenia, czujnik, magistrala).
4. **Przelot**: $\zeta \approx \varphi_m/100^\circ$.
5. **Nyquist** (gdy coś jest nietypowe: kilka przejść przez 0 dB, obiekt niestabilny): czy krzywa obiega -1 i jak blisko przechodzi.

Przykład 6.1

Trzy inercje z zapasami

$L = \frac{K}{(s+1)^3}$. Wyznacz zapas wzmocnienia i fazy dla $K = 4$. Jakie K daje zapas fazy 45° ?

- 1 $\omega_{180} = \sqrt{3}$, $|L(j\sqrt{3})| = K/8 = 0,5$: zapas wzmocnienia 2 (6 dB).
- 2 ω_c : $\frac{4}{(1+\omega^2)^{3/2}} = 1$, $\omega_c = \sqrt{4^{2/3} - 1} \approx 1,23$ rad/s; faza $-3 \arctan 1,23 \approx -153^\circ$; zapas fazy ok. 27° .
- 3 Zapas 45° : $3 \arctan \omega_c = 135^\circ$, $\omega_c = \tan 45^\circ = 1$; $K = (1+1)^{3/2} \approx 2,83$.

Wynik: przy $K = 4$: 6 dB i 27° ; zapas 45° wymaga $K \approx 2,8$ (uchyb statyczny wtedy $1/3,8 \approx 26\%$).

Sprawdzenie: 6 dB zapasu wzmocnienia brzmi przyzwoicie, a zapas fazy pokazuje, że pętla mocno dzwoni: przeregulowanie ok. 54%, nawet więcej, niż przewiduje reguła $\zeta \approx \varphi_m/100^\circ$ (ok. 40%), bo pętla trzeciego rzędu nie jest członem oscylacyjnym. Zawsze sprawdzaj oba zapasy ✓.

Przykład 6.2

Ile czasu ma komputer pokładowy

Pętla stabilizacji kąta drona ma $\omega_c = 30 \text{ rad/s}$ i zapas fazy 60° . Ile czasu mogą łącznie zająć: odczyt czujnika, obliczenia i wysłanie polecenia do silników, jeśli zapas fazy ma nie spaść poniżej 40° ?

- 1 Dozwolona strata fazy: $20^\circ = 0,349 \text{ rad}$.
- 2 $\theta = 0,349/30 \approx 0,0116 \text{ s}$.

Wynik: ok. 12 ms na cały łańcuch, w tym próbkowanie (ok. $\Delta t/2$, lekcja 1.3).

Sprawdzenie: dlatego pętle orientacji w kontrolerach lotu dronów działają z częstotliwością setek herców ✓. Przy 500 Hz samo próbkowanie to 1 ms.

Przykład 6.3

Prysznic jeszcze raz

Prysznic z $\theta = 3 \text{ s}$ (przykład 6.3 lekcji 1.1). Jakie k daje zapas fazy 60° ? Porównaj z regułą „bez przeregulowania” $k\theta \leq 1/e$.

- 1 Zapas fazy: $90^\circ - k\theta \cdot 57,3^\circ = 60^\circ$, czyli $k\theta = 0,524$, $k \approx 0,17 \text{ 1/s}$.
- 2 Reguła z lekcji 1.1: $k \leq 1/(3e) \approx 0,12 \text{ 1/s}$.

Wynik: zapas 60° przy $k \approx 0,17 \text{ 1/s}$, tuż obok wartości 0,16, która w lekcji 1.1 dawała najszybsze dojście z przelotem o pół stopnia.

Sprawdzenie: zapas fazy 60° odpowiada $\zeta \approx 0,6$ i przelotowi kilku procent ✓. Brak jakiegokolwiek przelotu wymaga większego zapasu (ok. 69° przy $k\theta = 1/e$: $90^\circ - 21^\circ$).

Przykład 6.4

Wymagania na regulator z zapasów

Regulator P dla obiektu $\frac{1}{s(0,2s+1)}$ (np. silnik z obciążeniem). Wymagany zapas fazy 50° . Wyznacz K , ω_c i spodziewany czas narastania.

- 1 Faza: $-90^\circ - \arctan 0,2\omega_c$. Zapas 50° : $\arctan 0,2\omega_c = 40^\circ$, $\omega_c = 5 \tan 40^\circ \approx 4,2 \text{ rad/s}$.
- 2 $|L(j\omega_c)| = 1$: $K = \omega_c \sqrt{1 + 0,04\omega_c^2} \approx 4,2 \cdot 1,31 \approx 5,5$.
- 3 $t_r \approx 1,5/\omega_c \approx 0,36 \text{ s}$; przeregulowanie ok. 16–18% ($\zeta \approx 0,5$). Symulacja: 0,31 s i 18%.

Wynik: $K \approx 5,5$, $\omega_c \approx 4,2 \text{ rad/s}$, czas narastania ok. 0,3 s.

Sprawdzenie: symulacja 3 lekcji 2.3 przy $K = 5$ daje $\omega_c = 3,9 \text{ rad/s}$, fazę -128° (zapas 52°) i przeregulowanie 16% ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

✗ „Stabilna pętla to dobra pętla.”

Pętla z zapasem fazy 5° jest stabilna, ale dzwoni długo i straci stabilność od byle opóźnień. Liczy się odległość od -1 .

✗ „Duży zapas wzmocnienia wystarcza.”

Pętla drona z P ma nieskończony zapas wzmocnienia i 14° zapasu fazy. Trzeba sprawdzać oba albo najmniejszą odległość od -1 .

✗ „Opóźnienie można nadrobić większym wzmocnieniem.”

Odwrotnie: większe wzmocnienie podnosi ω_c , a opóźnienie zjada fazę proporcjonalnie do ω_c . Z opóźnieniem trzeba zwolnić.

✗ „Punkt -1 to sztuczka matematyczna.”

To fizyczny warunek: sygnał wraca po obiegu tej samej amplitudy i w tej samej fazie, więc pętla go podtrzymuje.

✖ „Kryterium Nyquista trzeba stosować zawsze w pełnej wersji.”

Dla obiektów stabilnych wystarczy sprawdzić, czy krzywa nie obiega -1 , a w praktyce odczytać zapasy z wykresu Bodego.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Huśtawka.** Dziecko na huśtawce popychane przez rodzica, który pcha za każdym razem, gdy huśtawka dotrze najbliższej niego i zawraca, w kierunku jej ruchu. Opisz to jako pętlę. Kiedy jest „niestabilna”, czyli amplituda rośnie? Dlaczego to dobrze?
- 2 **Zbyt szybki autopilot.** Inżynier podwaja wzmocnienie autopilota, żeby szybciej trzymał kurs. Zapas fazy spada z 50° do 20° . Dlaczego, skoro faza obiektu się nie zmieniła?
- 3 **Najmniejsza odległość od -1 .** Pokaż, że $\min_{\omega} |1 + L(j\omega)| = 1 / \max_{\omega} |S(j\omega)|$. Dlaczego ta liczba lepiej opisuje odporność pętli niż dwa klasyczne zapasy?
- 4 **Smith i jego predyktor.** W procesach z długim opóźnieniem (np. walcownia, gdzie grubość blachy mierzy się kilka metrów za walcami) stosuje się regulator z wbudowanym modelem obiektu, który „przewiduje” wyjście przed upływem opóźnienia. Dlaczego to pozwala zwiększyć ω_c ? Co jest ceną?
- 5 **Dwa przejścia przez 0 dB.** Słabo tłumiony rezonans obiektu powyżej ω_c może ponownie podnieść $|L|$ powyżej 0 dB. Co wtedy znaczy „zapas fazy”? Dlaczego tu przydaje się wykres Nyquista?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Dlaczego punkt -1 ?

Bo $1 + L = 0$ to biegun pętli zamkniętej; dla $s = j\omega$ sygnał wraca po obiegu tej samej amplitudy i w tej samej fazie.

2 Jak zdefiniowany jest zapas fazy?

$$180^\circ + \arg L(j\omega_c).$$

3 Jak zdefiniowany jest zapas wzmacnienia?

$$1/|L(j\omega_{180})|, \text{ gdzie faza wynosi } -180^\circ.$$

4 Ile wynosi zapas opóźnienia?

φ_m (w radianach) przez ω_c .

5 Jak zapas fazy przekłada się na tłumienie?

$$\zeta \approx \varphi_m/100^\circ \text{ (do ok. } 60^\circ\text{)}.$$

6 Co mówi kryterium Nyquista dla stabilnego obiektu?

Pętla zamknięta stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wykres $L(j\omega)$ nie obiega -1 .

7 Jak szybka może być pętla z opóźnieniem θ ?

$$\omega_c \lesssim 0,8/\theta \text{ dla zapasu fazy ok. } 45^\circ.$$

8 Co to jest PIO?

Oscylacje wywołane przez pilota: pętla pilot-samolot traci zapas fazy przez opóźnienia i zbyt dużą czułość.

STABILNOŚĆ I ZAPASY

granica: $L(j\omega) = -1$ ($|L| = 1$ i faza -180°)

$\varphi_m = 180^\circ + \arg L(j\omega_c)$; $GM = 1/|L(j\omega_{180})|$

$\theta_m = \varphi_m[\text{rad}]/\omega_c$

$\zeta \approx \varphi_m/100^\circ$; cel: φ_m 45–60°, GM 6–12 dB

$\min |1 + L| = 1/\max |S|$; cel: $\max |S| < 2$

NYQUIST I OPÓŹNIENIE

obiekt stabilny: stabilnie $\Leftrightarrow L(j\omega)$ nie obiega -1

ogólnie: $Z = N + P$

$e^{-\theta s}$: obrót o $-\omega\theta$, moduł bez zmian

$\omega_c\theta \lesssim \pi/4$ (zapas ok. 45°)

prysznic: $\varphi_m = 90^\circ - k\theta$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 5.7–5.8 (kryterium Nyquista, zapasy stabilności).
- **Dla chętnych:** S. A. Frank, *Control Theory Tutorial*, rozdz. 8.2 (zapasy) i 13 (opóźnienia, predyktor Smitha); H. Nyquist, *Regeneration Theory*, Bell System Technical Journal 11 (1932), oryginał zaskakująco czytelny.

Następna lekcja: **Zakłócenia, szum i wrażliwość**. Wiemy, jak daleko pętla jest od niestabilności. Ostatnia lekcja części II pokazuje, że funkcje S i T ustalają dwa przeciwstawne cele: tłumić zakłócenia (duże $|L|$) i nie przepuszczać szumu czujnika (małe $|L|$). Zobaczymy, jak kształtować L korektorami, żeby pogodzić jedno z drugim, i dlaczego nie da się wygrać na wszystkich częstotliwościach naraz.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Każdy z trzech czynników daje -60° przy $\arctan \omega = 60^\circ$, czyli $\omega = \sqrt{3}$. $|L| = \frac{4}{(\sqrt{1+3})^3} = \frac{4}{8} = 0,5 < 1$: stabilna. Granica: $K = 8$, jak z kryterium Routha w lekcji 2.2.
2. Faza to $-90^\circ - \arctan \omega$, czyli zawsze powyżej -180° (dochodzi do niej tylko w nieskończoności). Pętla nie straci stabilności, ale przy dużym K faza w ω_c zbliża się do -180° i odpowiedź będzie słabo tłumiona (linie pierwiastkowe w lekcji 2.2 biegną pionowo).
3. Minus w węźle dokładnie 180° ; razem z -180° pętli daje pełny obrót. Przy sprzężeniu dodatnim brak tego minusa, więc groźna jest faza 0° (lub -360°), a warunek graniczny to $L(j\omega) = +1$.

Zadania · część 2

1. $\varphi_m = 45^\circ = 0,785 \text{ rad}$; $\theta_m = 0,785/2 \approx 0,39 \text{ s}$.
2. $GM = 1/0,5 = 2$, czyli 6 dB. $\omega_c \approx 1,23 \text{ rad/s}$, zapas fazy ok. 27° : mały, więc odpowiedź będzie mocno dzwonić, choć zapas wzmocnienia jest przyzwoity.
3. $\zeta \approx 0,4$, przeregulowanie ok. 25%. Po stracie 15° : $\varphi_m = 25^\circ$, $\zeta \approx 0,25$, przeregulowanie ok. 45%.
4. $L = \frac{K}{s(s+0,5)}$ (dron z regulatorem P) nie ma częstotliwości z fazą -180° , więc $GM = \infty$. Przy $K = 4$ zapas fazy to tylko ok. 14° : kołysanie z $\zeta \approx 0,125$. Trzeba patrzeć na oba zapasy, a najlepiej na najmniejszą odległość wykresu od -1 (część 3).

Zadania · część 3

1. 4 razy, czyli 12 dB.
2. $\frac{K}{j\omega} = -j\frac{K}{\omega}$: ujemna półoś urojona, od $-j\infty$ (małe ω) do 0. Nigdy nie zbliża się do -1 : zapas fazy 90° , pętla stabilna przy każdym K .
3. Ok. 0,33, więc $\max |S| \approx 3$. Pętla w pewnym paśmie częstotliwości *wzmacnia* zakłócenia trzykrotnie: o tym w lekcji 2.5.
4. $Z Z = N + P$: żeby $Z = 0$ przy $P = 1$, potrzeba $N = -1$, czyli jednego obiegu przeciwnie do wskazówek zegara. Intuicja: sprzężenie musi „przeciągnąć” niestabilny biegun na lewą stronę, a to wymaga, by krzywa owinęła się wokół -1 . Taka pętla jest stabilna tylko w pewnym zakresie wzmocnień, także od dołu: za małe K nie stabilizuje.

Zadania · część 4

1. $\theta_m = 0,873/10 \approx 0,087 \text{ s}$, czyli ok. 87 ms. Żeby zostawić zapas fazy 30° , wolno dodać tylko ok. 35 ms.
2. Opóźnienie pętli to ok. 40 minut (tam i z powrotem), czyli 2400 s: $\omega_c \lesssim 0,8/2400 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$, jedna poprawka na kilka godzin. Dlatego łaziki mają lokalne pętle autonomiczne (omijanie przeszkód, nawigacja), a z Ziemi wysyła się tylko cele.
3. $\theta_m = 1,40/3,64 \approx 0,39 \text{ s}$. Przy 0,2 s: $80^\circ - 3,64 \cdot 0,2 \cdot 57,3^\circ \approx 39^\circ$. Przeregulowanie rośnie z 7% do ok. 40%.

Zadania · część 5

1. $68^\circ - 2,69 \cdot 0,1 \cdot 57,3^\circ \approx 68^\circ - 15^\circ = 53^\circ$. Tak, mieści się w typowym przedziale 45–60°.
2. $14^\circ - 1,97 \cdot 0,1 \cdot 57,3^\circ \approx 14^\circ - 11^\circ = 3^\circ$: pętla na skraju niestabilności, dron kołysze się prawie bez tłumienia.

Zadania do przemyslenia

1. Huśtawka to oscylator, rodzic to regulator pchający w fazie z prędkością (w rezonansie siła pompuje energię, dział 6 fizyki). Pętla ma dla częstotliwości własnej huśtawki fazę „zgodną”: sprzężenie jest w praktyce dodatnie.
2. Jeśli energia dodana w każdym cyklu przewyższa straty, amplituda rośnie. To niestabilność celowa, jak w generatorach drgań. Rodzic sam ogranicza amplitudę, pchając słabiej, czyli działa jak nieliniowe nasycenie.
2. 1. Faza każdej częstotliwości jest ta sama, ale większe wzmocnienie przesuwają ω_c w prawo, tam gdzie faza jest niższa (inercje, opóźnienia).
2. Zapas fazy to faza w ω_c , więc zależy od wzmocnienia pośrednio, przez przesunięcie punktu, w którym ją odczytujemy.
3. 1. $|S| = \frac{1}{|1+L|}$, więc maksimum $|S|$ odpowiada minimum $|1+L|$, czyli najbliższemu punktowi krzywej względem -1 .
2. Zapas fazy patrzy tylko na okrąg jednostkowy, zapas wzmocnienia tylko na oś rzeczywistą. Krzywa może podejść blisko -1 gdzie indziej, np. przy jednoczesnej zmianie wzmocnienia i fazy. Typowe wymaganie to $\max |S| < 2$ (6 dB), czyli odległość co najmniej 0,5.
4. 1. Regulator zamyka wewnętrzną pętlę na wyjściu modelu *bez opóźnienia*, więc z jego punktu widzenia opóźnienie znika z pętli i nie zjada fazy. Rzeczywisty pomiar służy tylko do korekcji błędu modelu.
2. Cena: działa dobrze tylko przy dokładnym modelu, zwłaszcza dokładnej wartości opóźnienia. Opóźnienie i tak zostaje w odpowiedzi na zakłócenia: ich wpływ zobaczysz dopiero po czasie θ (Frank, rozdz. 13.5).
5. 1. Są dwie (lub więcej) częstotliwości przejścia; trzeba sprawdzić fazę w każdej. Przy rezonansie faza jest często daleko poza -180° i drugie przejście może oznaczać niestabilność, choć pierwsze ma duży zapas.
2. Wykres Nyquista pokazuje całą krzywą naraz: rezonans to dodatkowa pętelka, która może objąć -1 .
Pojedyncze liczby z Bodego mogą to przeoczyć (zadanie 8.4 lekcji 2.3).

Automatyka · Lekcja 2.4: Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie · Źródła: G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 5; S. A. Frank, *Control Theory Tutorial* (Springer 2018), rozdz. 8, 13; H. Nyquist, *Regeneration Theory* (1932); opis wypadku JAS 39 Gripen z 2 lutego 1989 r. według ogólnodostępnych źródeł o PIO. Wszystkie liczby policzone na nowo ([tools/verify/c2_4.py](https://tools.verify/c2_4.py)).