

Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego

Bieguny i zera opisują pętlę od środka, przez jej równania. Inżynierowie z Bell Labs patrzyli z zewnątrz: podawali na wejście sinusoidę i mierzyli, co wychodzi. Okazuje się, że z dwóch wykresów, amplitudy i fazy w funkcji częstotliwości, da się odczytać, jak szybka będzie pętla, jak dokładna i jak blisko jest niestabilności. Na dodatek te wykresy można zmierzyć na prawdziwym obiekcie, nie znając jego równań. Ta lekcja uczy je czytać i szkicować.

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

S. A. Frank,
*Control Theory
Tutorial* (Springer
Briefs), rozdz.
2.4–2.5; G. C.
Goodwin i in.,
*Control System
Design*, rozdz. 4.9–
4.10; J. Kowal,
*Podstawy
automatyki*, t. 1
(charakterystyki
logarytmiczne)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: obiekt bez równań
- 1 Sinusoida wchodzi, sinusoida wychodzi
- 2 Decybele i skala logarytmiczna
- 3 Asymptoty członów podstawowych
- 4 Charakterystyka pętli i częstotliwość przejścia
- 5 Dron w dziedzinie częstotliwości
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: obiekt bez równań

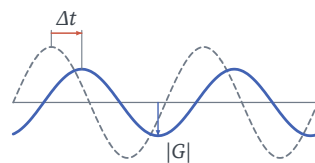
Dostajesz do sterowania urządzenie, o którym nic nie wiesz: zawór regulacyjny z kilkoma metrami rury, siłownik z przekładnią, wzmacniacz. Nie masz równań, a model z lekcji 1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa (test skokowy) daje tylko trzy liczby. Inżynierowie wzmacniaczy telefonicznych w latach 30. mieli generator sinusoid i woltomierz. Podawali sinusoidę o jednej częstotliwości, czekali, aż przebiegi się ustalą, i zapisywali dwie liczby: o ile urosła amplituda i o ile przesunęła się fala. Potem zmieniali częstotliwość i mierzyli dalej.

Z takiej tabelki Bode i Nyquist umieli przewidzieć, czy wzmacniacz z pętlą sprzężenia będzie stabilny i jak dobrze będzie działał. Wcale nie potrzebowali równań. W tej lekcji poznasz pierwszą połowę tej sztuki: jak taką charakterystykę zmierzyć, narysować i odczytać. Druga połowa, czyli stabilność, to lekcja 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie.

Pytanie na start. Pętla prędkości drona z regulatorem PI ma czas narastania ok. 0,5 s. Czy da się to przewidzieć z jednej liczby odczytanej z wykresu Bodego, bez rozwiązywania równań? Odpowiedź w części 4.

Sinusoida wchodzi, sinusoida wychodzi

W lekcji 2.1 Schematy blokowe i transmitancja pętli zobaczyliśmy, że sygnał e^{st} przechodzi przez układ liniowy, zmieniając się tylko o czynnik $G(s)$. Sinusoida to część rzeczywista $e^{j\omega t}$, czyli sygnał z osi urojonej, $s = j\omega$. Liczba zespolona $G(j\omega)$ ma moduł i argument, więc stabilny układ liniowy zmienia sinusoidę na dwa sposoby: mnoży amplitudę i przesuwa fazę. Frank 2.4



🔧 PRAWO · ODPOWIEDŹ NA SINUSOIDĘ (STAN USTALONY, UKŁAD STABILNY)

$$u(t) = \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)).$$

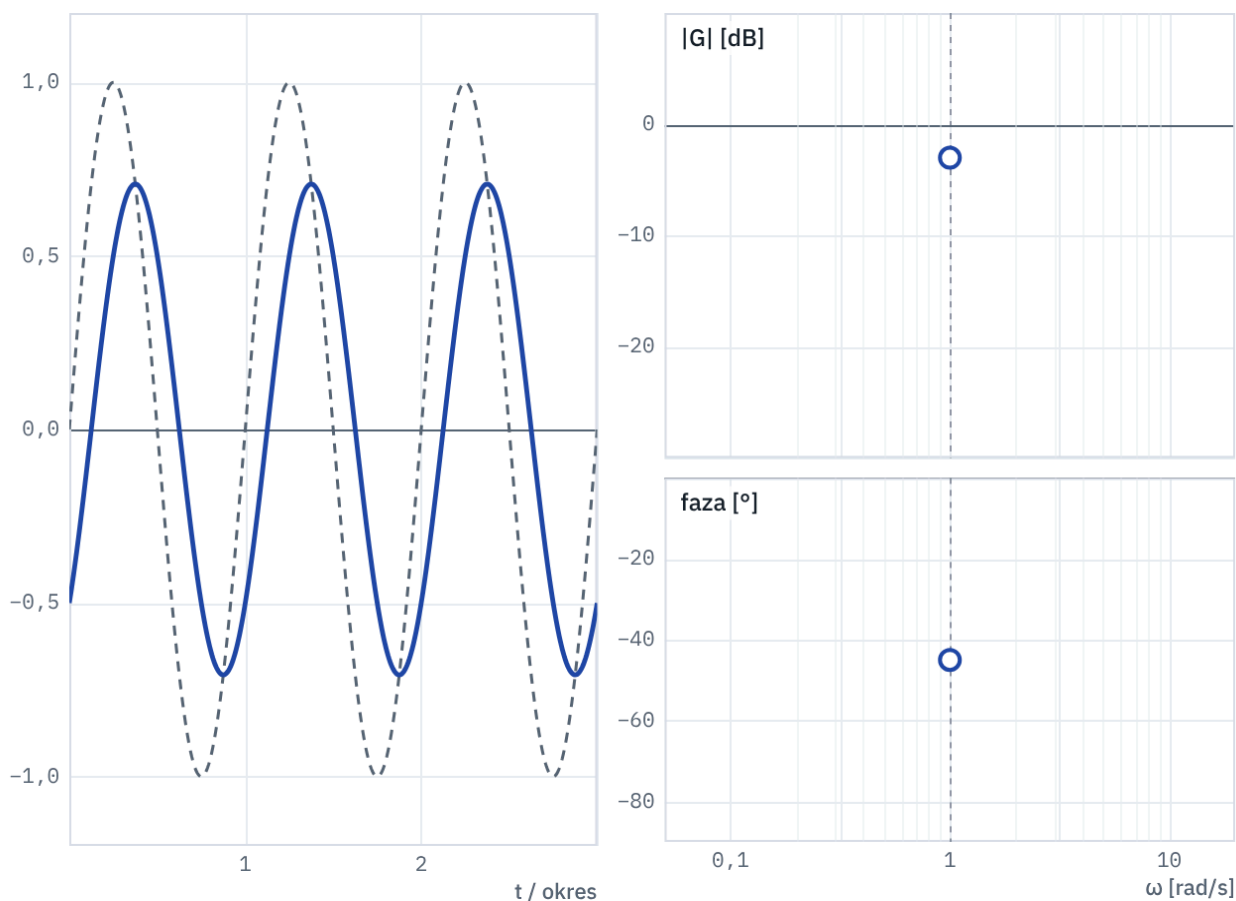
Charakterystyka amplitudowa $|G(j\omega)|$ i fazowa $\arg G(j\omega)$ to razem odpowiedź częstotliwościowa. Ujemna faza φ to opóźnienie wyjścia o $-\varphi/\omega$ sekund.

To jest krzywa rezonansowa z działu 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe” fizyki, tylko dla dowolnego obiektu. Dla członu inercyjnego $G = \frac{1}{\tau s + 1}$ mamy $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$ i $\arg G = -\arctan \omega \tau$. Wolne sinusoidy ($\omega \tau \ll 1$) przechodzą bez zmian. Szybkie ($\omega \tau \gg 1$) są tłumione proporcjonalnie do $1/\omega$ i opóźnione o prawie ćwierć okresu. Na granicy, przy $\omega = 1/\tau$, amplituda maleje do $1/\sqrt{2} \approx 0,71$, a faza wynosi -45° .

Warunek „stan ustalony” jest ważny. Po włączeniu sinusoidy pojawia się też stan przejściowy, który gaśnie jak $e^{p_k t}$ dla biegunów p_k . Dlatego charakterystykę mierzy się tylko dla obiektów

stabilnych. Obiektu niestabilnego nie da się „posłuchać” sinusoidą, bo stan przejściowy rośnie zamiast gasnąć.

SYMULACJA 1 Wstrząsarka. Wybierz obiekt i częstotliwość sinusoidy. Lewy wykres: wejście (przerywane) i wyjście w stanie ustalonym, w jednostkach okresu. Prawe: charakterystyki amplitudowa i fazowa. Klikaj „Zapisz pomiar” dla kilku częstotliwości: tak, punkt po punkcie, powstaje charakterystyka. Porównaj potem z pełną krzywą. Dla obiektu z opóźnieniem zobacz, że amplituda się nie zmienia, a faza ucieka.



$|G(j\omega)|$ 0,707

w decybelach -3,0 dB

przesunięcie fazy -45,0°

opóźnienie wyjścia 0,79 s

Zmieniaj ω i zapisuj pomiary: tak, punkt po punkcie, mierzy się charakterystykę obiektu, którego równań nie znamy.

Stan na rysunku: inercyjny $\tau = 1 \text{ s}$, $\omega = 1,00 \text{ rad/s}$; zapisanych pomiarów: 0.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 25 min

- 1 Na wejście członu $G = \frac{1}{s+1}$ podano $\sin 10t$. Jaka będzie amplituda wyjścia i o ile sekund się spóźni?
- 2 Jaka jest odpowiedź częstotliwościowa członu opóźniającego $e^{-\theta s}$? Oblicz fazę dla $\theta = 0,5$ s przy $\omega = 1$ i $\omega = 10$ rad/s.
- 3 Wyprowadź $|G(j\omega)|$ i $\arg G(j\omega)$ dla członu całkującego $\frac{1}{s}$. Dlaczego faza jest stała?
- 4 Dlaczego dla obiektu o biegunie w $+1$ nie da się zmierzyć charakterystyki, podając sinusoidę i czekając?

▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀▀ feynmanowskie

2 Decybele i skala logarytmiczna

Bode wpadł na pomysł, który zamienia mnożenie w dodawanie: rysować *logarytm* amplitudy w funkcji *logarytmu* częstotliwości. Amplitudę podaje się w **decybelach**:

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G|.$$

Kilka wartości do zapamiętania: $\times 10 \rightarrow +20$ dB, $\times 2 \rightarrow +6$ dB, $\times \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -3$ dB, $\times 1 \rightarrow 0$ dB, $\times 0,1 \rightarrow -20$ dB. Na osi częstotliwości jednostką jest **dekada**, czyli dziesięciokrotny wzrost ω .

Po co to wszystko? Bloki połączone szeregowo mnożą transmitancje (lekcja 2.1). Logarytm iloczynu to suma logarytmów, a argument iloczynu to suma argumentów. **Charakterystykę Bodego łańcucha bloków otrzymuje się więc, dodając charakterystyki bloków**, zarówno amplitudowe (w dB), jak i fazowe. Do tego każdy człon podstawowy ma na skali logarytmicznej kształt bliski linii prostych.

⚠ PO POLSKU NA EGZAMINIE

Na egzaminie spotkasz: *charakterystyki logarytmiczne* (amplitudowa $L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$ i fazowa $\varphi(\omega)$), *charakterystykę amplitudowo-fazową*, czyli wykres $G(j\omega)$ na płaszczyźnie zespolonej (lekcja 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie), oraz *pulsację*, czyli ω w rad/s. Uwaga na literę: w polskich książkach $L(\omega)$ to często charakterystyka amplitudowa w dB, a u nas $L(s)$ to transmitancja pętli.

1 Zamień na dB: 100; 0,5; 0,01; $\sqrt{2}$.

2 Dwa bloki mają w danej częstotliwości wzmocnienia +14 dB i -20 dB oraz fazy -30° i -60° . Ile wynosi wzmocnienie i faza łańcucha? Ile to razy?

3 Amplituda maleje o 20 dB na dekadę. Jak zależy od ω ? A przy -40 dB na dekadę?

□□□ podstawowe ▤▤▤ średnie ▨▨▨ feynmanowskie

3 Asymptoty członów podstawowych

Charakterystyki Bodego członów podstawowych: asymptoty amplitudy i faza

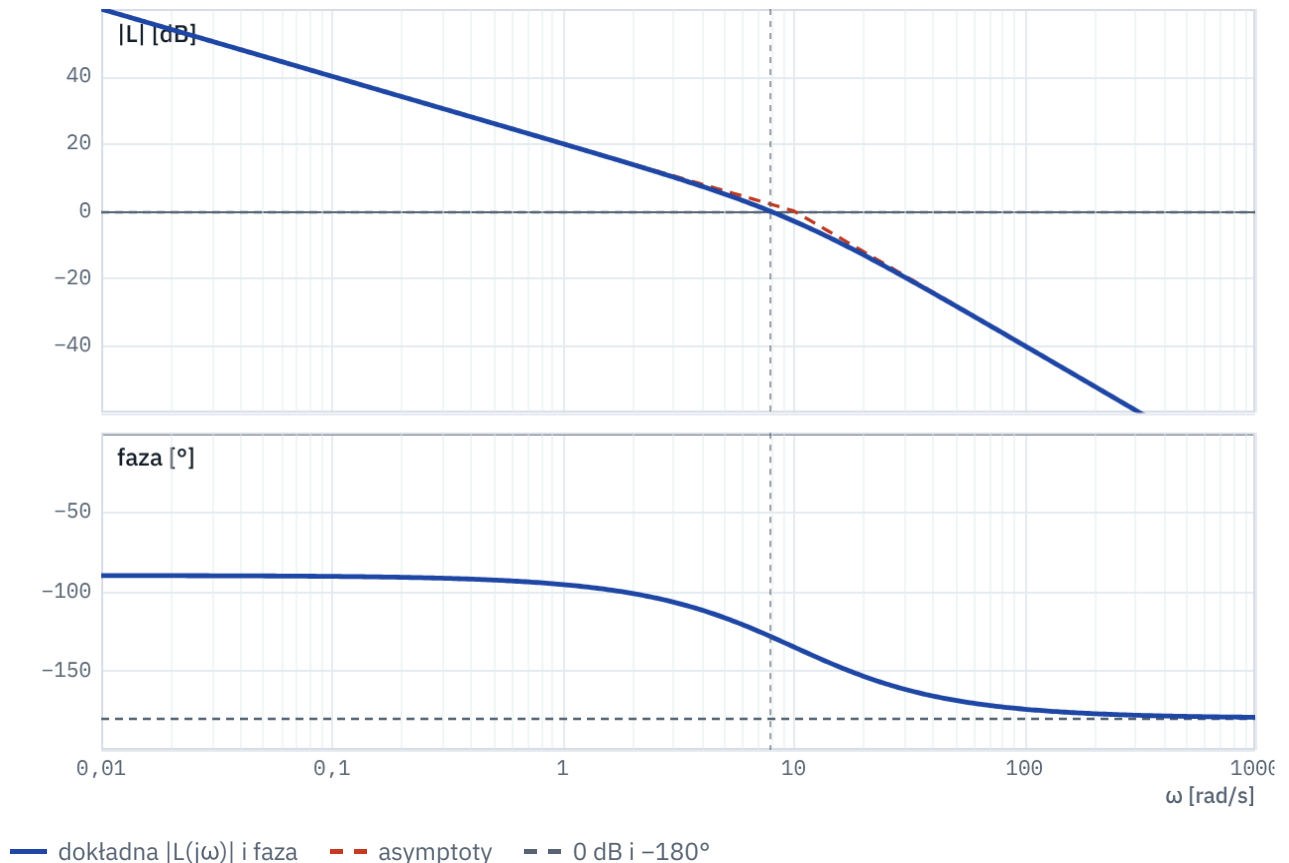
człon	amplituda (asymptoty)	faza
K	pozioma, $20 \log K$	0° (dla $K > 0$)
$\frac{1}{s}$	prosta -20 dB/dek., 0 dB przy $\omega = 1$	-90°
$\frac{1}{s/\omega_1 + 1}$	0 dB do ω_1 , potem -20 dB/dek.; w ω_1 naprawdę -3 dB	od 0° do -90° ; -45° w ω_1
$\frac{s}{\omega_z} + 1$ (zero)	0 dB do ω_z , potem +20 dB/dek.	od 0° do $+90^\circ$
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	0 dB do ω_0 , potem -40 dB/dek.; szczyt $\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ dla $\zeta < 0,71$	od 0° do -180° ; -90° w ω_0
$e^{-\theta s}$	0 dB wszędzie	$-\omega\theta$ (w radianach), bez ograniczenia

Każdy biegun to **załamanie** charakterystyki w dół o 20 dB/dek. przy swojej częstotliwości, każde zero załamanie w górę. Faza zmienia się łagodnie, mniej więcej w przedziale od dekady przed do dekady po załamaniu. Dokładna krzywa odstępkuje od asymptot najbardziej w samym punkcie załamania, o 3 dB. Wyjątkiem jest człon oscylacyjny o małym ζ , który ma tam ostry szczyt rezonansowy, np. przy $\zeta = 0,2$ szczyt sięga 8 dB ($\times 2,55$).

Opóźnienie zasługuje na osobne zdanie. Nie zmienia amplitudy żadnej sinusoidy, ale jego faza spada liniowo z ω , czyli na skali logarytmicznej coraz szybciej. Inne człony kończą swój spadek fazy na -90° czy -180° . Opóźnienie nie kończy go nigdy. To dlatego, jak zobaczymy w lekcji 2.4, opóźnienie tak bardzo ogranicza szybkość pętli.

SYMULACJA 2

Konstruktor charakterystyki Bodego. Składaj transmitancję pętli z czynników: wzmocnienia, całkowań, dwóch biegunów, zera i opóźnień. Przerywane linie to asymptoty, ciągłe to dokładne wykresy. Pionowa linia pokazuje częstotliwość, przy której amplituda przechodzi przez 0 dB, a odczyt podaje fazę w tym miejscu. Sprawdź, jak zero „podnosi” fazę, a opóźnienie ją ściąga.



częstotliwość przejścia ω_c 7,86 rad/s

faza w ω_c $-128,2^\circ$

do -180° brakuje $51,8^\circ$

Każdy czynnik dokłada swoją asymptotę: biegun -20 dB/dek. powyżej swojej częstotliwości załamania, zero $+20$ dB/dek., całkowanie -20 dB/dek. wszędzie. Dokładna krzywa odstępkuje od asymptot najwyżej o ok. 3 dB przy załamaniu.

Stan na rysunku: $K = 20,0$ dB, całkowań 1, biegun $10,00$ (rad/s).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 35 min

1 Naskicuj asymptoty amplitudy dla $G = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$. Ile wynosi amplituda w dB przy $\omega = 0,1, 1, 10$ i 100 rad/s (z asymptot)?

2 Ile wynosi faza $G = \frac{1}{s/2+1}$ przy $\omega = 0,2, 2$ i 20 rad/s?

- 3 Człon oscylacyjny ma szczyt rezonansowy +14 dB. Ile wynosi ζ ? Jaki to rząd przeregulowania odpowiedzi skokowej (lekcja 1.2)?

- 4 W symulacji 2 zbuduj $L = \frac{10}{s(s+1)}$ ($K = 20$ dB, jedno całkowanie, biegun 1 rad/s). Odczytaj częstotliwość przejścia i fazę w niej. Dodaj zero w 2 rad/s: jak zmieniła się faza w (nowej) częstotliwości przejścia?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Charakterystyka pętli i częstotliwość przejścia

Najważniejszy wykres Bodego to wykres transmitancji pętli $L(j\omega)$, a nie samego obiektu. Z niego czyta się zachowanie pętli zamkniętej, choć ta jest zupełnie inną funkcją.

Pomysł jest prosty. Pętla zamknięta to $T = \frac{L}{1+L}$, uchyb to $S = \frac{1}{1+L}$. Tam, gdzie $|L| \gg 1$ (zwykle przy niskich częstotliwościach), $T \approx 1$ i $S \approx \frac{1}{L}$: pętla wiernie śledzi wartość zadaną i tłumi zakłócenia $|L|$ razy, jak w lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta. Tam, gdzie $|L| \ll 1$ (wysokie częstotliwości), $T \approx L \approx 0$: pętla nie nadaża i takie sygnały ignoruje. Granicą jest częstotliwość przejścia ω_c , przy której $|L(j\omega_c)| = 1$, czyli 0 dB.

🔧 REGUŁA · CZĘSTOTLIWOŚĆ PRZEJŚCIA

$$|L(j\omega_c)| = 1 \text{ (0 dB)}, \quad t_r \approx \frac{1,5}{\omega_c} \text{ (zwykle od } 1,2/\omega_c \text{ do } 2,2/\omega_c \text{)}.$$

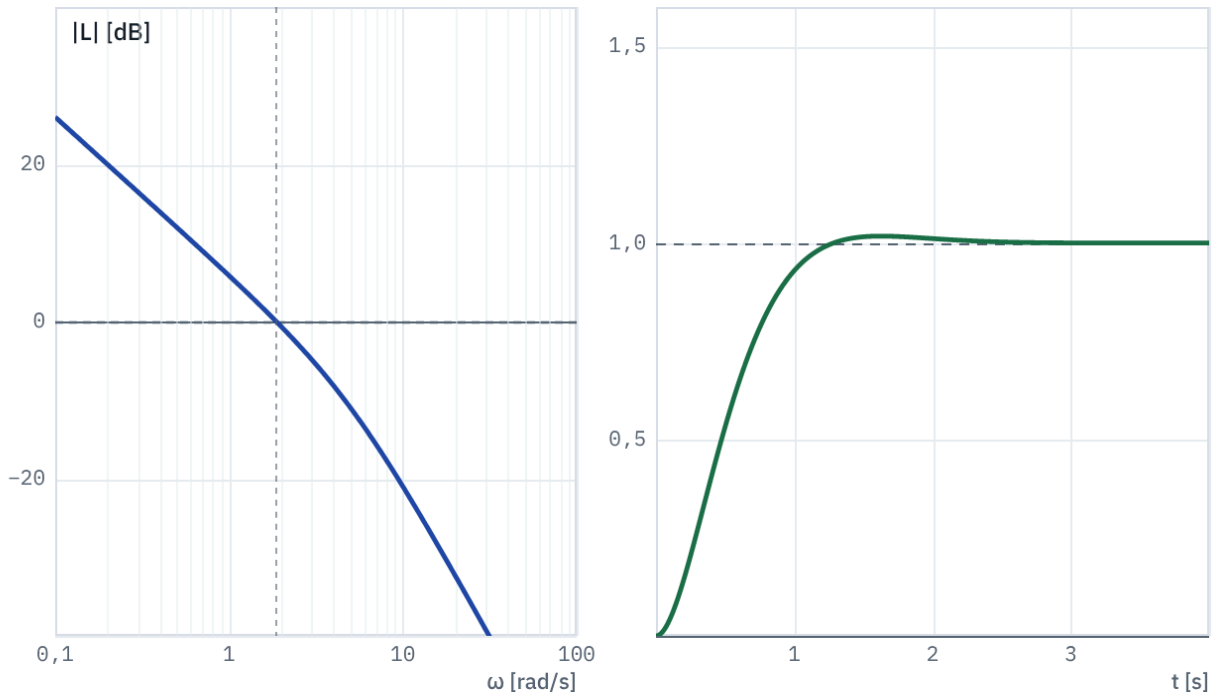
Pętla jest tak szybka, jak wysoko leży ω_c . Dokładność statyczna zależy od $|L|$ przy niskich częstotliwościach. Spokój odpowiedzi (przeregulowanie) zależy od fazy L w okolicy ω_c .

Skąd $1,5/\omega_c$? W okolicy ω_c wiele dobrze zaprojektowanych pętli wygląda jak $L \approx \frac{\omega_c}{s}$ (spadek -20 dB/dek. przez 0 dB). Wtedy $T \approx \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$, czyli człon inercyjny o stałej czasowej $1/\omega_c$ i czasie narastania $2,2/\omega_c$. Gdy faza w ω_c jest bliżej -180° , odpowiedź jest szybsza, ale z przelotem, i iloczyn $t_r\omega_c$ spada do ok. 1,2. Symulacja 3 pokazuje oba efekty naraz.

Odpowiedź na pytanie z prologu: pętla PI prędkości drona ma $\omega_c \approx 3,6$ rad/s, więc $t_r \approx 1,5/3,6 \approx 0,4$ s. Symulacja daje ok. 0,49 s.

SYMULACJA 3

Pętla $L = \frac{K}{s(0,2s+1)}$. Lewy wykres: $|L(j\omega)|$ z zaznaczoną częstotliwością przejścia. Prawy: odpowiedź skokowa pętli zamkniętej. Zwiększaj K : ω_c rośnie i pętla przyspiesza (iloczyn $t_r \omega_c$ zostaje między ok. 1,2 a 1,7). Ale faza w ω_c zbliża się do -180° i rośnie przeregulowanie: zapowiedź lekcji 2.4.



— $|L(j\omega)| = K/|j\omega(0,2j\omega + 1)|$ — odpowiedź skokowa pętli zamkniętej

ω_c 1,87 rad/s

czas narastania t_r 0,772 s

$t_r \cdot \omega_c$ 1,44

faza L w ω_c $-110,5^\circ$

przeregulowanie 1,7 %

Częstotliwość przejścia mówi, jak szybka jest pętla: czas narastania to ok. 1,5–2 razy $1/\omega_c$. Faza w ω_c jest daleko od -180° , więc odpowiedź jest spokojna.

Stan na rysunku: $K = 2,00$, $\omega_c = 1,87$ rad/s, faza w ω_c $-110,5^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pętla ma $L = \frac{5}{s}$. Ile wynosi ω_c ? Wyznacz $T(s)$ i jego czas narastania.
- 2 Regulator P prędkości drona: $L = \frac{K_p}{s+0,5}$ ($m = 1$ kg). Wyznacz ω_c dla $K_p = 3,5$ i porównaj z $1/\tau_z$ z lekcji 1.3.
- 3 Wymaganie: uchyb ustalony dla wolnych zmian wartości zadanej (do 0,1 rad/s) poniżej 1%. Ile musi wynosić $|L|$ w tym zakresie, w dB?

5 Dron w dziedzinie częstotliwości

Porównajmy trzy pętle drona ($m = 1 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$), które znamy z odpowiedzi w czasie:

Trzy pętle drona w liczbach z wykresu Bodego

pętla	$L(s)$	ω_c	faza w ω_c	odpowiedź w czasie
PI prędkości (1.3)	$\frac{3,5s+4}{s(s+0,5)}$	3,6 rad/s	-100°	szybka, przelot 7%
P wysokości, $K = 4$ (1.1)	$\frac{4}{s(s+0,5)}$	2,0 rad/s	-166°	kołysanie, $\zeta = 0,125$
PD wysokości (2.2)	$\frac{4(0,575s+1)}{s(s+0,5)}$	2,7 rad/s	-112°	spokojna, $\zeta = 0,7$

Widać regułę, którą lekcja 2.4 uczyni dokładną: im bliżej -180° jest faza w częstotliwości przejścia, tym słabiej tłumiona pętla. Regulator P wysokości ma fazę -166° , tylko 14° od katastrofy, i kołysze się. Człon D dokłada w okolicy ω_c fazę dodatnią (zero!) i odsuwa ją do -112° .

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- Wyjaśnij z asymptot, dlaczego faza $L = \frac{K}{s(s+0,5)}$ zbliża się do -180° , gdy zwiększamy K .
- Ile fazy dodaje zero $(0,575s + 1)$ przy $\omega = 2,7 \text{ rad/s}$? Porównaj z różnicą między wierszami 2 i 3 tabeli (pamiętaj, że ω_c też się przesunęło).

☰ METODA: SZKIC CHARAKTERYSTYKI BODEGO

1. **Postać czasowa:** zapisz L jako $K \cdot \frac{1}{s^n} \cdot \prod \frac{s/\omega_z+1}{s/\omega_p+1}$ (czynniki o wzmacnieniu 1 przy niskich częstotliwościach).
2. **Start:** przy małym ω asymptota $20 \log K - 20n \log \omega$, nachylenie $-20n$ dB/dek., faza $-90^\circ n$.
3. **Załamania:** idąc w prawo, przy każdym biegunie nachylenie -20 , przy każdym zerze $+20$ dB/dek.
4. **Faza:** suma faz czynników; opóźnienie dodaje $-\omega\theta$.
5. **Odczyt:** ω_c (szybkość), $|L|$ przy niskich częstotliwościach (dokładność), faza w ω_c (spokój).

Przykład 6.1

Model z dwóch pomiarów

Pomiar na wstrząsarce: przy 0,5 rad/s amplituda wyjścia to 71% amplitudy wejścia, a opóźnienie fazy 45° . Przy niskich częstotliwościach wyjście równa się wejściu. Zaproponuj model i przewidyż wynik pomiaru przy 2 rad/s.

1. -3 dB i -45° w jednym punkcie to podpis załamania członu inercyjnego: $\omega_1 = 0,5$ rad/s, $\tau = 2$ s.
2. Model $\frac{1}{2s+1}$. Przy 2 rad/s: $|G| = 1/\sqrt{17} \approx 0,24$, faza $-\arctan 4 \approx -76^\circ$.

Wynik: człon inercyjny, $\tau = 2$ s; przy 2 rad/s przewidujemy 24% amplitudy i opóźnienie fazy ok. 76° .

Sprawdzenie: gdyby pomiar przy 2 rad/s dał wyraźnie większe opóźnienie fazy przy tej samej amplitudzie, w obiekcie jest też opóźnienie transportowe ✓. Faza zdradza opóźnienie, którego amplituda nie widzi.

Przykład 6.2

Szkic i dokładna wartość

Naszkicuj $L = \frac{10}{s(0,1s+1)}$, odczytaj z asymptot częstotliwość przejścia i porównaj z dokładną.

- 1 Start: $\frac{10}{s}$, czyli 20 dB przy 1 rad/s i -20 dB/dek. Załamanie przy 10 rad/s, potem -40 dB/dek.
- 2 Z asymptot: prosta $\frac{10}{\omega}$ przecina 0 dB w 10 rad/s, czyli dokładnie w punkcie załamania.
- 3 Dokładnie: $\frac{10}{\omega\sqrt{1+0,01\omega^2}} = 1$ daje $\omega_c \approx 7,9$ rad/s; faza $-90^\circ - \arctan 0,79 \approx -128^\circ$.

Wynik: $\omega_c \approx 7,9$ rad/s (asymptoty: 10 rad/s), faza w ω_c ok. -128° .

Sprawdzenie: asymptoty mylą się najbardziej w punkcie załamania (o 3 dB, czyli $\times 0,71$), a tu ω_c wypadła prawie w nim. Na szkicu to wystarcza, do projektu liczy się dokładnie ✓.

Przykład 6.3

Prysznic na wykresie Bodego

Pętla prysznicowa z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta: $L = \frac{k e^{-\theta s}}{s}$. Wyznacz ω_c i fazę w ω_c . Przy jakim k faza osiąga -180° ?

- 1 $|L(j\omega)| = \frac{k}{\omega}$ (opóźnienie nie zmienia amplitudy), więc $\omega_c = k$.
- 2 Faza: -90° od całkowania plus $-\omega\theta$ od opóźnienia; w ω_c : $-90^\circ - k\theta \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$.
- 3 -180° przy $k\theta = \pi/2$.

Wynik: dla $k = 0,3$ 1/s i $\theta = 2$ s: $\omega_c = 0,3$ rad/s, faza -124° . Granica $k\theta = \pi/2$: dokładnie warunek stabilności z lekcji 1.1.

Sprawdzenie: w lekcji 1.1 ten warunek wyszedł z równania z opóźnieniem i trygonometrii. Tu wypada z wykresu Bodego w trzech liniijkach ✓. Dlaczego „faza -180° w ω_c ” to granica stabilności, wyjaśni lekcja 2.4.

Przykład 6.4

Tłumienie z wykresu rezonansowego

Charakterystyka amplitudowa obiektu ma szczyt +8,1 dB przy 1,92 rad/s, a przy niskich częstotliwościach 0 dB. Wyznacz ζ i ω_0 , zakładając człon oscylacyjny.

- 1 8,1 dB to $\times 2,55$; z $\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 2,55$: $\zeta \approx 0,2$.
- 2 Szczyt leży w $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2}$, więc $\omega_0 = 1,92/\sqrt{0,92} \approx 2,0$ rad/s.

Wynik: $\zeta \approx 0,2$, $\omega_0 \approx 2,0$ rad/s.

Sprawdzenie: odpowiedź skokowa takiego obiektu ma ok. 53% przeregulowania (lekcja 1.2). Szczyt rezonansowy i przeregulowanie mierzą to samo tłumienie z dwóch stron ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Faza jest mniej ważna od amplitudy.”

O stabilności pętli decyduje właśnie faza w okolicy ω_c . Opóźnienie ma płaską amplitudę i potrafi zabić pętlę samą fazą.

× „-3 dB to połowa amplitudy.”

To $\times 0,71$ amplitudy, czyli połowa mocy. Połowa amplitudy to -6 dB.

× „Wykres Bodego obiektu wystarczy do oceny pętli.”

Liczy się wykres pętli $L = CP$, z regulatorem.

× „Charakterystykę można zmierzyć dla każdego obiektu.”

Tylko dla stabilnego. Niestabilny mierzy się w pętli zamkniętej.

× „Większe ω_c to zawsze lepsza pętla.”

Szybsza, ale zwykle z gorszą fazą w ω_c , a do tego wpuszcza więcej szumu (lekcja 2.5).

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Głośnik i pokój.** Akustycy mierzą charakterystykę głośnika w pokoju, puszczaając szum albo sweep (sinusoidę o rosnącej częstotliwości). Dlaczego nie mierzą punkt po punkcie, jak w symulacji 1? Co ryzykują, mierząc zbyt szybko?
- 2 **Dlaczego minus 180.** Bez wzorów: dlaczego faza -180° pętli jest groźna? Co się dzieje z sinusoidą o tej częstotliwości po obiegu pętli z ujemnym sprzężeniem?
- 3 **Faza z amplitudy.** Bode pokazał, że dla obiektów bez opóźnień i bez zer oraz biegunów w prawej półpłaszczyźnie faza wynika z nachylenia amplitudy (nachylenie -20 dB/dek. odpowiada ok. -90° , -40 dB/dek. ok. -180°). Jak tę regułę wykorzystać przy projektowaniu L w okolicy ω_c ?
- 4 **Rezonans konstrukcji.** Ramię robota ma rezonans przy 50 rad/s z $\zeta = 0,02$. Pętla położenia ma $\omega_c = 10$ rad/s. Czy rezonans może zaszkodzić, choć leży dekadę nad ω_c ?
- 5 **Pasmo pętli zamkniętej.** Pasmem nazywa się częstotliwość, przy której $|T(j\omega)|$ spada do -3 dB. Dla $L = \frac{\omega_c}{s}$ pokaż, że pasmo równa się ω_c . Czy tak jest zawsze?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Co robi układ liniowy z sinusoidą?**
Mnoży amplitudę przez $|G(j\omega)|$ i przesuwą fazę o $\arg G(j\omega)$; częstotliwość się nie zmienia.
- 2 **Ile to jest 20 dB, 6 dB i -3 dB?**
 $\times 10$, $\times 2$, $\times 0,71$.

3 Jak wygląda asymptota biegunu i zera?

Pozioma do częstotliwości załamania, potem -20 dB/dek. (biegun) lub $+20$ dB/dek. (zero).

4 Co robi opóźnienie z amplitudą i fazą?

Amplitudy nie zmienia, fazę obniża o $\omega\theta$ bez ograniczenia.

5 Co to jest ω_c i co z niej wynika?

Częstotliwość, przy której $|L| = 1$; szybkość pętli: $t_r \approx 1,5/\omega_c$.

6 Co mówi $|L|$ przy niskich częstotliwościach?

Dokładność: uchyb i wpływ wolnych zakłóceń maleją jak $1/|L|$.

7 Co mówi faza L w ω_c ?

Jak spokojna jest pętla: im bliżej -180° , tym większe przeregulowanie.

8 Dlaczego Bode rysował logarytmy?

Bo iloczyn transmitancji staje się sumą wykresów, a człony mają kształt prostych.

ODPOWIEDŹ CZĘSTOTLIWOŚCIOWA

$$\sin \omega t \rightarrow |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$$|G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G|: \times 10 = 20 \text{ dB}, \times 2 = 6 \text{ dB}, \times 0,71 = -3 \text{ dB}$$

$$\text{inercyjny: } |G| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \arg G = -\arctan \omega\tau$$

$$\frac{1}{s}: -20 \text{ dB/dek.}, -90^\circ; e^{-\theta s}: 0 \text{ dB}, -\omega\theta$$

$$\text{rezonans: } M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

PĘTLA

$$|L(j\omega_c)| = 1; t_r \approx 1,5/\omega_c$$

$$|L| \gg 1: T \approx 1, S \approx 1/L; |L| \ll 1: T \approx L$$

faza w ω_c bliżej $-180^\circ \rightarrow$ większy przelot

prysznic: $\omega_c = k$, faza $-90^\circ - k\theta$

dron PI: $\omega_c \approx 3,6 \text{ rad/s}$, faza -100°

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** S. A. Frank, *Control Theory Tutorial*, rozdz. 2.4–2.5 (odpowiedź częstotliwościowa i wykresy Bodego, zwięźle i z przykładami).
- **Dla chętnych:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 4.9–4.10; J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1 (charakterystyki logarytmiczne członów, polska terminologia).

Następna lekcja: **Stabilność pętli: punkt -1, zapasy i opóźnienie**. Kilka razy zatrzymaliśmy się przy fazie -180° w częstotliwości przejścia. Teraz zobaczymy, dlaczego to dokładnie granica stabilności, jak zmierzyć odległość od niej (zapasy wzmocnienia, fazy i opóźnienia) i jak ta odległość przekłada się na przeregulowanie.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $|G(j10)| = 1/\sqrt{101} \approx 0,0995$; faza $-\arctan 10 \approx -84,3^\circ = -1,47$ rad, czyli opóźnienie $1,47/10 \approx 0,147$ s.
2. $|e^{-j\omega\theta}| = 1$, faza $-\omega\theta$ rad: $-0,5$ rad $\approx -29^\circ$ i -5 rad $\approx -286^\circ$. Amplituda bez zmian, faza bez ograniczenia.
3. $\frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$: moduł $1/\omega$, faza -90° dla każdego ω . Całka z $\sin \omega t$ to $-\frac{1}{\omega} \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t - 90^\circ)$: zawsze ćwierć okresu spóźnienia.
4. Stan przejściowy zawiera składnik e^{+t} , który rośnie zamiast gasnąć: wyjście ucieka, zanim zdąży się ustalić sinusoida. Taki obiekt mierzy się w pętli zamkniętej, z regulatorem, który go stabilizuje, i przelicza wynik.

Zadania · część 2

1. 40 dB; -6 dB; -40 dB; +3 dB.
2. -6 dB, czyli ok. $\times 0,5$; faza -90° .
3. Spadek o 20 dB to czynnik 10 na dziesięciokrotny wzrost ω , czyli $|G| \propto 1/\omega$. Przy -40 dB/dek.: $|G| \propto 1/\omega^2$.

Zadania · część 3

1. W postaci $\frac{10}{(s+1)(s/10+1)}$: 20 dB do 1 rad/s, potem -20 dB/dek. do 10, potem -40 dB/dek. Odczyty: 20; 20; 0; -40 dB. Dokładnie: 20,0; 17,0; -3,0; -40,0 dB.
2. $-\arctan 0,1 \approx -5,7^\circ$; -45° ; $-\arctan 10 \approx -84,3^\circ$. Prawie całe przejście fazy mieści się w dwóch dekadach wokół załamania.
3. 14 dB to $\times 5$, więc $\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 5$ i $\zeta \approx 0,1$. Przeregulowanie ok. 73%. Ostry rezonans i duży przelot to dwa oblicza słabego tłumienia.
4. Bez zera: $\omega_c \approx 3,1$ rad/s, faza ok. -162° . Z zerem: amplituda rośnie powyżej 2 rad/s, ω_c przesuwa się do ok. 5,3 rad/s, a faza poprawia się do ok. -100° . Zero podnosi fazę tam, gdzie liczy się ona najbardziej (lekcja 2.4).

Zadania · część 4

1. $\omega_c = 5$ rad/s; $T = \frac{5}{s+5}$, $t_r = 2,2/5 = 0,44$ s.
2. $\frac{K_p}{\sqrt{\omega^2+0,25}} = 1$: $\omega_c = \sqrt{K_p^2 - 0,25} \approx 3,46$ rad/s. $1/\tau_z = K_p + 0,5 = 4$ 1/s. Bliskie: dla pętli z dużym L częstotliwość przejścia to w przybliżeniu odwrotność stałej czasowej pętli zamkniętej.
3. $|S| = \frac{1}{|1+L|} \approx \frac{1}{|L|} < 0,01$, czyli $|L| > 100$, ponad 40 dB. Pętla PI drona ma przy 0,1 rad/s ok. 38 dB, prawie spełnia.

Zadania · część 5

1. Całkowanie daje stałe -90° , a biegun w 0,5 rad/s dokłada od 0° do -90° , prawie całe -90° powyżej ok. 5 rad/s. Większe K przesuną ω_c w prawo, gdzie suma faz jest bliższa -180° .
2. $\arctan(0,575 \cdot 2,7) \approx +57^\circ$. Przy $\omega_c = 2,7$ sama część $\frac{4}{s(s+0,5)}$ ma fazę $-90^\circ - \arctan 5,4 \approx -169,5^\circ$; z zerem: $\approx -112^\circ \checkmark$. Zero „kupiło” prawie 60° fazy.

Zadania do przemyślenia

1. Punkt po punkcie trwa długo: przy każdej częstotliwości trzeba poczekać na zanik stanu przejściowego. Szum zawiera wszystkie częstotliwości naraz, a transformata Fouriera rozdziela je w jednym pomiarze (lekcja 4.3 Transformata Fouriera i delta Diraca).
2. Zbyt szybki sweep nie daje stanowi przejściowemu wygasnąć. Ostre rezonanse (małe ζ , długie wybrzmiewanie) wychodzą wtedy rozmyte i przesunięte.
2. 1. Ujemne sprzężenie odwraca sygnał (-1 , czyli 180°). Pętla dokłada kolejne 180° . Razem pełny obrót: sygnał wraca w tej samej fazie, czyli sprzężenie dla tej częstotliwości staje się dodatnie.
2. Jeśli przy tym $|L| \geq 1$, sygnał po każdym obiegu jest co najmniej tak duży jak poprzednio: drgania się podtrzymują albo rosną. To mikrofon przy głośniku z lekcji 1.1 i warunek z lekcji 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie.
3. 1. Jeśli przez 0 dB przechodzimy z nachyleniem ok. -20 dB/dek., faza jest w okolicy -90° do -120° , daleko od -180° : pętla spokojna.
2. Przejście z nachyleniem -40 dB/dek. oznacza fazę bliską -180° , czyli kłopot. Praktyczna reguła: przechodzić przez 0 dB z nachyleniem -20 dB/dek. przez mniej więcej dekadę wokół ω_c . Opóźnienia i zera prawe łamią tę regułę i dlatego są groźne.
4. 1. Szczyt rezonansu to $\frac{1}{2\zeta} = 25$, czyli ok. 28 dB. Jeśli $|L|$ przy 50 rad/s wynosi np. -20 dB, rezonans podnosi ją do $+8$ dB: amplituda znów przekracza 0 dB, a faza jest tam daleko poza -180° .
2. Tak: potrzebny filtr wycinający (notch) albo dużo niższa ω_c . Słabo tłumione rezonanse konstrukcji to typowy wróg pętli w robotach, dronach i rakietach (zginanie, lekcja 11 Rakieta: orientacja i ciąg wektorowany).
5. 1. $T = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$, $|T(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli -3 dB $\checkmark$.
2. Nie zawsze: przy fazie bliskiej -180° w ω_c , $|T|$ ma szczyt rezonansowy i pasmo jest większe niż ω_c (do ok. 1,5–2 razy). Reguła „pasmo $\approx \omega_c$ ” działa dla pętli z rozsądnym zapasem fazy.

Automatyka · Lekcja 2.3: Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego · Źródła: S. A. Frank, *Control Theory Tutorial: Basic Concepts Illustrated by Software Examples* (Springer 2018), rozdz. 2; G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 4; J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c2_3.py).