

Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe

Mianownik transmitancji pętli zamkniętej ma kilka pierwiastków. Te kilka punktów na płaszczyźnie zespolonej mówi prawie wszystko o tym, jak pętla się zachowa: czy jest stabilna, jak szybko się uspokaja i jak bardzo przelatuje. Ta lekcja uczy czytać odpowiedź z położenia biegunów i zer, a potem patrzeć, jak bieguny wędrują, gdy kręcimy wzmocnieniem. Ten obraz, linie pierwiastkowe, wyjaśnia wiele zachowań, które w części I tylko obserwowaliśmy.

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

G. C. Goodwin i
in., *Control System
Design*, rozdz. 4.8,
5.6–5.7; J. Kowal,
*Podstawy
automatyki*, t. 1
(kryteria
stabilności); B.
Douglas, *Control
System Lectures*
(wykłady o
liniach
pierwiastkowych)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: suwak, którego nie było
- 1 Geometria pary biegunów
- 2 Bieguny dominujące
- 3 Zera i odpowiedź w złą stronę
- 4 Linie pierwiastkowe
- 5 Stabilność bez liczenia pierwiastków
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: suwak, którego nie było

W 1948 r. Walter Evans, inżynier z kalifornijskiej firmy lotniczej North American Aviation, zadał sobie pytanie, które dziś zadaje każdy, kto przesuwając suwak wzmocnienia w symulacji: jak zmieniają się bieguny pętli zamkniętej, gdy wzmocnienie rośnie od zera do nieskończoności? Komputerów, które w ułamku sekundy liczą pierwiastki wielomianu, nie było. Evans pokazał, że krzywe, po których wędrują bieguny, można naszkicować ołówkiem z kilku prostych reguł. Do rysowania sprzedawał potem plastikowy przyrząd, Spirule, przypominający kątomierz z obrotowym ramieniem.

Dziś pierwiastki liczy komputer, a reguły Evansa nie są już potrzebne do rysowania. Zostało to, co najcenniejsze: **obraz**. Linie pierwiastkowe pokazują od razu, czy większe wzmocnienie pomoże, czy zaszkodzi, i co trzeba dodać do regulatora, żeby bieguny poszły tam, gdzie chcemy.

Pytanie na start. W lekcji 1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa wyszło, że dla drona z regulatorem P wysokości tempo gaśnięcia kołysań $\zeta\omega_0 = b/(2m)$ nie zależy od wzmocnienia. Jak to wygląda na płaszczyźnie s ? Odpowiedź w części 4.

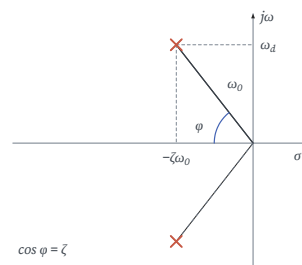
Geometria pary biegunów

Człon oscylacyjny z lekcji 1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa ma mianownik $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$, a jego bieguny to

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_d.$$

Każdy parametr odpowiedzi ma na płaszczyźnie s swój geometryczny odpowiednik:

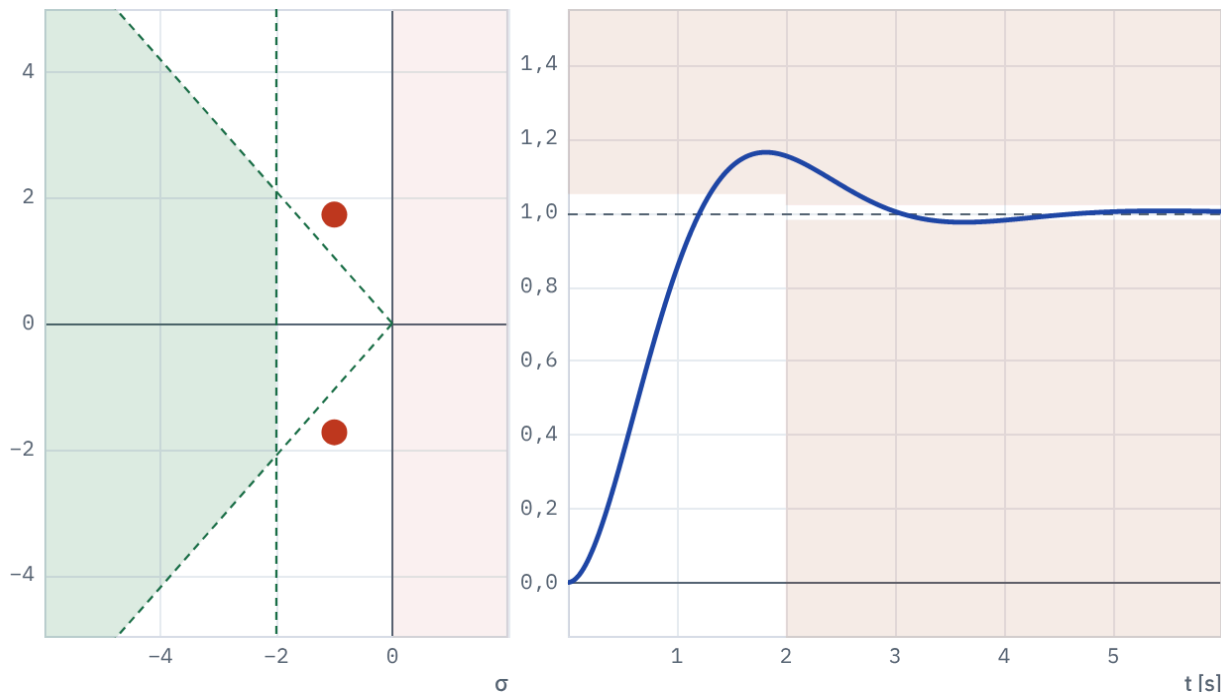
- **odległość od początku układu** to ω_0 : im dalej, tym szybciej wszystko się dzieje (skala czasu);
- **kąt φ od ujemnej półosi rzeczywistej** spełnia $\cos \varphi = \zeta$: kąt decyduje o przeregulowaniu;
- **odległość od osi urojonej** to $\zeta\omega_0$: tempo zaniku obwiedni $e^{-\zeta\omega_0 t}$, czyli czas ustalania $\approx 4/(\zeta\omega_0)$;
- **wysokość nad osią rzeczywistą** to ω_d : częstota drgań.



Wymagania z korytarza z lekcji 1.2 stają się więc **obszarem** na płaszczyźnie s . Przeregulowanie $\leq 5\%$ to $\zeta \geq 0,69$, czyli kąt $\varphi \leq 46^\circ$: bieguny w klinie wokół ujemnej półosi rzeczywistej. Czas ustalania ≤ 2 s to $\zeta\omega_0 \geq 2$, czyli bieguny na lewo od prostej $\sigma = -2$. Projektowanie regulatora sprowadza się do tego, żeby bieguny pętli zamkniętej trafiły do tego obszaru.

SYMULACJA 1

Przeciągnij parę biegunów (lewy wykres), a po prawej zobaczysz odpowiedź skokową. Zielony obszar to bieguny spełniające wymagania z korytarza lekcji 1.2; czerwone pola po prawej to ten sam korytarz w czasie. Potem dodaj trzeci biegun albo zero i sprawdź, jak bardzo zmieniają odpowiedź, gdy leżą blisko pary, a jak mało, gdy daleko.



— para biegunów (przeciągnij) — trzeci biegun — zero — obszar spełniający wymagania

bieguny $-1,00 \pm j1,73$

ζ 0,50

ω_0 2,00 rad/s

przeregulowanie 16,3 %

czas ustalania $\pm 2\%$ 4,04 s

Para biegunów: odległość od osi urojonej ($|\sigma| = \zeta\omega_0$) ustala tempo gaśnięcia, kąt ($\cos \varphi = \zeta$) ustala przeregulowanie, odległość od zera (ω_0) ustala skalę czasu.

Stan na rysunku: bieguny $-1,00 \pm j1,73$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 25 min

1 Bieguny pętli to $-2 \pm j2$. Oblicz ω_0 , ζ , przeregulowanie i przybliżony czas ustalania.

2 Jaki kąt φ odpowiada $\zeta = 0,5$? Jakie przeregulowanie?

3 Dwie pary biegunów: $-1 \pm j3$ i $-3 \pm j3$. Która odpowiedź ma większe przeregulowanie, a która szybciej się ustala? Odpowiedz bez liczenia, patrząc na kąty i odległości.

- 4 Narysuj (w zeszycie) obszar płaszczyzny s dla wymagań: przeregulowanie $\leq 16\%$, czas ustalania ≤ 1 s, częstość drgań ≤ 6 rad/s.

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

2 Bieguny dominujące

Prawdziwe pętle mają więcej niż dwa bieguny: silnik, czujnik, filtr. Odpowiedź impulsowa to suma wyrazów $e^{p_k t}$, po jednym na każdy biegun. Wyrazy od biegunów leżących daleko w lewo gasną szybko, a zostają te od biegunów najbliższych osi urojonej. Te nazywamy **dominującymi**.

Goodwin 4.8

🔧 REGUŁA · BIEGUNY DOMINUJĄCE

Jeśli pozostałe bieguny leżą co najmniej ok. pięć razy dalej od osi urojonej niż para najbliższa, odpowiedź prawie nie różni się od odpowiedzi samej pary. Wtedy wzory na przeregulowanie i czas ustalania z lekcji 1.2 obowiązują dla całej pętli.

Przykład: para $-1 \pm j 1,73$ ($\zeta = 0,5$, $\omega_0 = 2$) daje 16,3% przeregulowania. Dodatkowy biegun w -10 zmienia to na 15,9%, w -4 na 13,9%, w -2 na 8,1%. Biegun w -1 , na tej samej wysokości co para, całkowicie usuwa przelot, ale spowalnia odpowiedź. Biegun bliski pary działa jak dodatkowy człon inercyjny: wygładza i spowalnia.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Pętla ma bieguny $-0,5 \pm j 1$ i -12 . Czy można przybliżyć ją członem oscylacyjnym? Jak ζ i ω_0 ?
- 2 Silniki drona mają stałą czasową 0,05 s, czyli biegun w -20 . Pętla prędkości ma bieguny w okolicy -2 . Czy silniki trzeba uwzględnić w projekcie tej pętli? A pętli kąta pochylenia, której bieguny mają być w okolicy $-15 \pm j 10$?
- 3 W symulacji 1 ustaw parę $-1 \pm j 1,73$ i trzeci biegun w -1 . Odpowiedź nie ma przeregulowania. Czy to dobry sposób na usunięcie przelotu? Co tracisz?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

Zera i odpowiedź w złą stronę

Zero to pierwiastek licznika. Dodajmy do transmitancji $T_0(s)$ czynnik $(1 + \frac{s}{a})$, czyli zero w $s = -a$. Mnożenie przez s to pochodna, więc nowa odpowiedź to stara plus jej pochodna podzielona przez a :

$$T(s) = \left(1 + \frac{s}{a}\right) T_0(s) \Rightarrow y(t) = y_0(t) + \frac{1}{a} \dot{y}_0(t).$$

Pochodna odpowiedzi skokowej jest duża na początku, gdy wyjście szybko rośnie. Zero w lewej półpłaszczyźnie **przyspiesza start i dodaje przeregulowania**, tym bardziej, im bliżej osi urojonej leży (im mniejsze a). Dla pary $\zeta = 0,5$, $\omega_0 = 2$: zero w -10 prawie nic nie zmienia (16,7% zamiast 16,3%), w -2 daje 30%, w -1 aż 70%. Tak właśnie zero regulatora PI w $-K_i/K_p$ dodawało 7% przelotu w lekcji 2.1 Schematy blokowe i transmitancja pętli.

Zero w **prawej** półpłaszczyźnie ($a < 0$) odejmuje pochodną. Na początku pochodna przeważa i odpowiedź idzie *w złą stronę*, zanim zawróci. Takie zero nazywa się **nieminimalnofazowym**. Przykłady to kocioł parowy z lekcji 1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa (dolanie zimnej wody najpierw obniża poziom) i samolot. Gdy pilot podnosi ster wysokości, ogon dostaje siłę w dół, więc samolot przez chwilę *opada*, zanim nos się uniesie, a skrzydło da więcej siły nośnej. Zero w prawej półpłaszczyźnie to fundamentalne ograniczenie: żaden regulator go nie usunie, bo zero obiektu zostaje zerem pętli zamkniętej. Zmusza ono do wolniejszej, spokojniejszej pętli (lekcja 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pętla PI drona ma $T = \frac{3,5s+4}{(s+2)^2}$. Zapisz ją w postaci $(1 + \frac{s}{a}) T_0$. Ile wynosi a ? ■ ■ ■
- 2 W symulacji 1 ustaw parę $-1 \pm j 1,73$ i zero w $+2$. O ile procent odpowiedź idzie w złą stronę? Co się dzieje, gdy zero przesuwasz w stronę $+1$? ■ ■ ■
- 3 Dlaczego regulator nie może „skrócić” zera nieminimalnofazowego obiektu biegunem w tym samym miejscu? ■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Linie pierwiastkowe

Weźmy pętlę z regulatorem o wzmacnieniu K i resztą transmitancji pętli $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, czyli $L = KG$. Bieguny pętli zamkniętej to pierwiastki mianownika $1 + L$:

🔧 DEFINICJA · LINIE PIERWIASTKOWE

$$D(s) + K N(s) = 0, \quad K \text{ od } 0 \text{ do } \infty.$$

Dla $K = 0$ bieguny pętli zamkniętej to bieguny pętli otwartej (pierwiastki D). Dla $K \rightarrow \infty$ zmierzają do zer pętli otwartej (pierwiastki N) albo do nieskończoności.

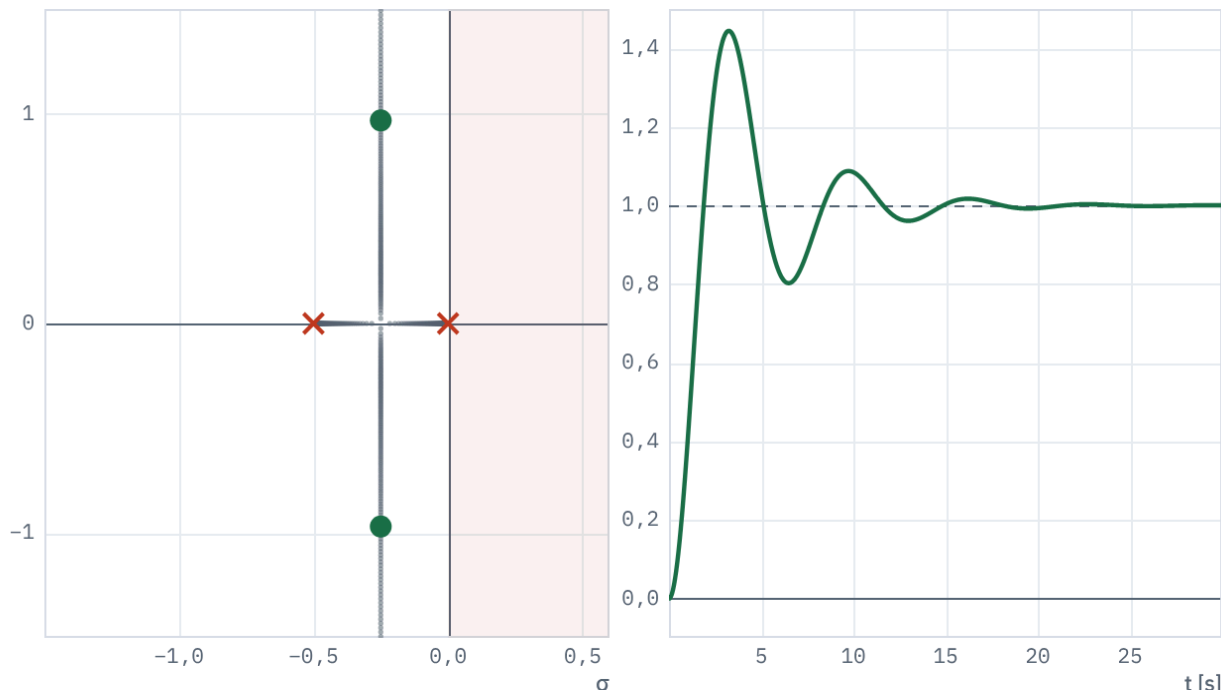
Linie pierwiastkowe to krzywe, po których wędrują pomiędzy tymi dwoma krańcami.

Najprostszy przykład to dron z regulatorem P wysokości ($m = 1 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$): $D = s(s + 0,5)$, $N = 1$, więc bieguny to pierwiastki $s^2 + 0,5s + K$. Dla $K = 0$ są w 0 i $-0,5$. Gdy K rośnie, zbliżają się do siebie, spotykają w $-0,25$ (przy $K = 0,0625$) i rozchodzą w górę i w dół po **pionowej prostej** $\sigma = -0,25$. Odpowiedź na pytanie z prologu: część rzeczywista biegunów, czyli tempo gaśnięcia, utknęła na $-b/(2m)$. Większe K podnosi tylko bieguny wyżej, co daje szybsze, ale słabiej tłumione kołysanie. Regulator P po prostu nie ma jak przesunąć biegunów w lewo.

Co by je przesunęło? Zero. Linie pierwiastkowe kończą się w zerach, więc zero po lewej stronie „przyciąga” gałęzie w lewo. Człon D (regulator PD, $K(T_d s + 1)$) wnosi do pętli zero w $-1/T_d$. Dla $T_d = 0,575 \text{ s}$ i $K = 4 \text{ N/m}$ bieguny przechodzą do $-1,4 \pm j 1,43$, czyli do $\zeta = 0,7$, $\omega_0 = 2$ (przykład 6.3). To obraz tego, co w lekcji 1.1 opisywaliśmy jako „dodać tłumienie przez pomiar prędkości”.

SYMULACJA 2

Linie pierwiastkowe dla czterech pętli. Krzyżyki to bieguny pętli otwartej (start), kółka to jej zera (koniec), szare kropki to drogi biegunów pętli zamkniętej przy rosnącym K , a zielone punkty to bieguny przy wybranym K . Po prawej odpowiedź skokowa pętli zamkniętej. Porównaj drona z P i z PD; zobacz, przy jakim K traci inercję tracąc stabilność; sprawdź, kiedy cała na wysokości psuje pętlę.



— bieguny pętli otwartej (start, $K = 0$) — zera pętli otwartej (koniec, $K \rightarrow \infty$) — linie pierwiastkowe
— bieguny przy wybranym K

K 1,00

$L(s) K / (s(s + 0,5))$

ζ pary zespolonej 0,25

najwolniejszy biegun $-0,250 \pm j0,97$

Bieguny startują z 0 i $-0,5$, spotykają się w $-0,25$ i dalej biegną pionowo: część rzeczywista $-b/(2m)$ już się nie zmienia. To obraz faktu z lekcji 1.2: regulator P nie przyspiesza gaśnięcia kotysań drona.

Stan na rysunku: dron: P wysokości, $K = 1,000$.

⚠️ REGUŁY SZKICOWANIA (RAMKA DLA ZAINTERESOWANYCH)

Gdy liczy się na kartce: (1) gałęzi jest tyle, ile biegunów pętli otwartej; (2) na osi rzeczywistej linia leży tam, gdzie na prawo od danego punktu jest nieparzysta liczba biegunów i zer; (3) gałęzie, które nie kończą się w zerach, biegną do nieskończoności wzdłuż asymptot, które wychodzą z punktu $\frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$ pod kątami $\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}$ (n biegunów, m zer). Dla trzech biegunów w -1 asymptoty wychodzą z -1 pod kątami 60° , 180° i 300° : dwie z nich muszą przeciąć oś urojoną. To wystarcza do rozpoznania kształtu; resztę liczy komputer.

- 1 Dla $L = \frac{K}{s(s+0,5)}$ znajdź K , przy którym bieguny są podwójne, i K , przy którym $\zeta = 0,5$.
- 2 W symulacji 2 dla „trzech inercji” znajdź K , przy którym bieguny przechodzą przez oś urojoną. Z jaką częstością drgałaby wtedy pętla?
- 3 Wyjaśnij z linii pierwiastkowych, dlaczego w lekcji 1.2 większe K regulatora P drona zwiększało przeregulowanie, a czas ustalania stał w miejscu.
- 4 Regulator PI wysokości: $L = \frac{K(s+a)}{s^2(s+0,5)}$. W symulacji 2 sprawdź, co się dzieje dla $a = 0,25$ i dla $a = 1$. Jak to się ma do warunku $bK_p > mK_i$ z lekcji 1.3?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

5 Stabilność bez liczenia pierwiastków

Pętla jest stabilna, gdy wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie (lekcja 4.4 Transformata Laplace'a). Czasem chcemy to wiedzieć bez liczenia pierwiastków, np. żeby znaleźć zakres wzmocnienia w postaci wzoru. Służą do tego kryteria algebraiczne, na egzaminach z automatyki bardzo popularne.

🔊 KRYTERIUM · HURWITZ I ROUTH DLA WIELOMIANÓW NISKICH STOPNI

Warunek konieczny (każdy stopień): wszystkie współczynniki $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ są tego samego znaku i niezerowe.

Stopień 2: warunek konieczny wystarcza. **Stopień 3:** $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$ ($a_i > 0$) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1a_2 > a_0a_3$.

Dla wyższych stopni buduje się **tablicę Routha**. Dwa pierwsze wiersze to współczynniki na przemian: $[a_0, a_2, a_4, \dots]$ i $[a_1, a_3, a_5, \dots]$. Każdy kolejny wiersz liczy się z dwóch poprzednich: jeśli przedostatni wiersz to $[b_1, b_2, \dots]$, a ostatni $[c_1, c_2, \dots]$, to k -ty element nowego wiersza wynosi $\frac{c_1b_{k+1} - b_1c_{k+1}}{c_1}$ (brakujące elementy to zera). Liczba zmian znaku w pierwszej kolumnie to liczba pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie. Przykład: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$. Wiersze: $[1, 3, 5]$, $[2, 4]$, $[1, 5]$, $[-6]$, $[5]$. Pierwsza kolumna 1, 2, 1, -6, 5 ma dwie zmiany znaku, czyli dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie (numerycznie: $0,29 \pm j 1,42$). W polskich podręcznikach to samo sprawdza się wyznacznikami Hurwitza.

Zastosowanie dla trzech inercji: $(s + 1)^3 + K = s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + K)$. Warunek $3 \cdot 3 > 1 + K$ daje $K < 8$. Na granicy, przy $K = 8$, wielomian ma pierwiastki $\pm j\sqrt{3}$: pętla drga z częstotnością $\sqrt{3}$ rad/s, dokładnie jak w symulacji 2.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Czy wielomian $s^3 + 2s^2 - s + 4$ może mieć wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie?

- 2 Dla jakich $K > 0$ stabilny jest wielomian $s^3 + 4s^2 + 5s + K$?

- 3 Wyprowadź warunek stabilności regulatora PI wysokości drona z lekcji 1.3: $ms^3 + bs^2 + K_p s + K_i$.

- 4 Zbuduj tablicę Routha dla $s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2$ i rozstrzygnij o stabilności.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: PROJEKT PRZESZCZEPIONOŚĆ BIEGUNÓW

1. Wymagania na obszar: przeregulowanie $\rightarrow \zeta$ (kąt), czas ustalania $\rightarrow \zeta\omega_0$ (pionowa prosta), szybkość $\rightarrow \omega_0$.
2. Mianownik pętli zamkniętej $D + KN$ jako funkcja nastaw regulatora.
3. Porównanie współczynników z $(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2) \cdot (\dots)$, z pozostałymi biegunami daleko w lewo.
4. Zera: sprawdź, gdzie leżą; zero bliżej osi niż bieguny zwiększy przelot.
5. Stabilność w całym zakresie nastaw: Routh albo linie pierwiastkowe.
6. Symulacja z nasyceniem i szumem.

Przykład 6.1

Od korytarza do obszaru

Korytarz z lekcji 1.2: przeregulowanie $\leq 5\%$, ustalenie $\pm 2\%$ przed 2 s. Które z par biegunów $-2 \pm j2$, $-2,5 \pm j2$ i $-2 \pm j3$ go spełniają?

1. Obszar: $\zeta \geq 0,69$ i $\zeta\omega_0 \geq 2$.
2. $-2 \pm j2$: $\zeta = 0,71$, $\zeta\omega_0 = 2$, na samej granicy; symulacja: 4,3% i 2,11 s, czas ustalania minimalnie za długi.
3. $-2,5 \pm j2$: $\zeta = 0,78$; 2,0% i 1,13 s ✓.
4. $-2 \pm j3$: $\zeta = 0,55$; 12,3% ✗.

Wynik: tylko $-2,5 \pm j2$ spełnia oba wymagania z zapasem.

Sprawdzenie: granica $\sigma = -2$ pochodzi z przybliżenia $t_s \approx 4/(\zeta\omega_0)$, które przy $\zeta \approx 0,7$ jest trochę za optymistyczne (lekcja 1.2). Dlatego biegun na samej granicy minimalnie nie przechodzi ✓.

Przykład 6.2

Kiedy trzeci biegun przestaje być mały

Para $-1 \pm j 1,73$ i trzeci biegun $-p$ (wzmocnienie statyczne 1). Jak przeregulowanie zależy od p ?

- 1 Bez trzeciego bieguna: 16,3%.
- 2 $p = 10$: 15,9%; $p = 4$: 13,9%; $p = 2$: 8,1%; $p = 1$: 0%.

Wynik: przy $p \geq 5|\sigma|$ (tu $p \geq 5$) para dominuje, a wzory członu oscylacyjnego obowiązują z dokładnością do kilku procent.

Sprawdzenie: zgadza się z symulacją 1 ✓. Biegun bliski pary nie psuje stabilności, ale zmienia kształt odpowiedzi tak, że wzory z lekcji 1.2 przestają pasować.

Przykład 6.3

PD wysokości drona

Dron ($m = 1 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$) ma mieć regulator wysokości $\Delta T = K(e + T_d \dot{e})$. Dobierz K i T_d tak, żeby bieguny pętli zamkniętej miały $\zeta = 0,7$ i $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$.

- 1 $L = \frac{K(T_d s + 1)}{s(s + 0,5)}$; mianownik pętli zamkniętej: $s^2 + (0,5 + K T_d)s + K$.
- 2 Porównanie z $s^2 + 2 \cdot 0,7 \cdot 2 s + 4$: $K = 4 \text{ N/m}$, $0,5 + 4 T_d = 2,8$, czyli $T_d = 0,575 \text{ s}$.
- 3 Bieguny $-1,4 \pm j 1,43$. Zero pętli w $-1/T_d = -1,74$, blisko biegunów: przeregulowanie 14% zamiast 4,6%.
- 4 Człon D liczony od pomiaru (od $-\dot{z}$, a nie od $\dot{e}$) usuwa zero z $T(s)$: przeregulowanie 4,6%.

Wynik: $K = 4 \text{ N/m}$, $T_d \approx 0,58 \text{ s}$; człon D najlepiej liczyć z pomiaru prędkości.

Sprawdzenie: regulator P z lekcji 1.1 przy $K = 4$ miał $\zeta = 0,125$. Człon D podniósł tłumienie do 0,7 bez zmiany ω_0 ✓. To ta sama sztuczka co „P od pomiaru” w lekcji 1.3.

Przykład 6.4

Zakres wzmocnienia z kryterium Routha

Obiekt to trzy jednakowe człony inercyjne o stałej czasowej 1 s, regulator P o wzmocnieniu K . Przy jakim K pętla traci stabilność? Jaki uchyb ustalony daje największe dopuszczalne K z zapasem dwa razy?

- 1 Mianownik: $(s + 1)^3 + K = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K$. Warunek: $9 > 1 + K$, czyli $K < 8$.
- 2 Z zapasem: $K = 4$. Typ 0, uchyb $\frac{1}{1+4} = 20\%$.

Wynik: granica $K = 8$; przy $K = 4$ uchyb 20%.

Sprawdzenie: statyka chciałaby K jak największego (lekcja 1.1), dynamika pozwala najwyżej na 8. Żeby mieć i stabilność, i zerowy uchyb, trzeba całki, a nie większego K ✓.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Bieguny pętli zamkniętej to bieguny obiektu.”

Regulator je przesuwają; to jest jego zadanie. Bieguny obiektu to tylko punkt startowy linii pierwiastkowych ($K = 0$).

× „Większe wzmocnienie przesuwają bieguny w lewo, czyli przyspiesza gaśnięcie.”

Zależy od linii pierwiastkowych. Dla drona z P bieguny idą pionowo, dla trzech inercji w końcu w prawo.

× „O odpowiedzi decydują tylko bieguny.”

Zera zmieniają kształt: lewe dodają przelotu, prawe każą startować w złą stronę.

× „Zero nieminimalnofazowe można skompensować regulatorem.”

Nie bez niestabilnego bieguna. To ograniczenie samego obiektu, a nie złego regulatora.

× „Kryterium Routha jest potrzebne do projektowania.”

Do sprawdzania stabilności w postaci wzoru, np. zakresu K . Pierwiastki liczy komputer, a do projektowania przydaje się raczej obraz linii pierwiastkowych.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Dlaczego zero przyciąga.** Wyjaśnij bez wzorów, dlaczego bieguny pętli zamkniętej dążą do zer pętli otwartej przy $K \rightarrow \infty$.

- 2 **Samolot, który opada.** Pilot ciągnie drążek, żeby się wznieść. Przez ułamek sekundy samolot opada o kilkadziesiąt centymetrów. Co to oznacza dla autopilota wysokości, który reagowałby bardzo szybko?

- 3 **Skracanie bieguna.** Regulator PI z $K_i/K_p = b/m$ ma zero dokładnie w biegunie obiektu $-b/m$. Pokaż, że pętla prędkości drona staje się wtedy członem I rzędu. Jaki problem kryje to rozwiązanie?

- 4 **Trzy inercje z bliska.** Wyjaśnij z reguły asymptot, dlaczego obiekt z trzema (lub więcej) członami inercyjnymi zawsze traci stabilność przy dostatecznie dużym K , a obiekt z dwoma nigdy.

- 5 **Dron, który za szybko reaguje.** W lekcji 2.1 czujnik z inercją 0,1 s zamieniał pętlę P prędkości w pętlę z przeregulowaniem 29% przy $K_p = 10$. Opisz to w języku linii pierwiastkowych.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Co na płaszczyźnie s odpowiada ζ , ω_0 i $\zeta\omega_0$?
Kąt ($\cos \varphi = \zeta$), odległość od początku, odległość od osi urojonej.
- 2 Kiedy para biegunów jest dominująca?
Gdy pozostałe bieguny leżą co najmniej ok. pięć razy dalej od osi urojonej.

3 Co robi zero w lewej półpłaszczyźnie blisko osi?

Przyspiesza start i dodaje przeregulowania ($y = y_0 + \dot{y}_0/a$).

4 Co robi zero w prawej półpłaszczyźnie?

Odpowiedź startuje w złą stronę; ogranicza szybkość pętli.

5 Skąd startują i dokąd biegną linie pierwiastkowe?

Z biegunów pętli otwartej ($K = 0$) do jej zer albo do nieskończoności ($K \rightarrow \infty$).

6 Dlaczego regulator P nie przyspieszy gaśnięcia kołysań drona?

Bieguny biegną po pionowej prostej $\sigma = -b/(2m)$.

7 Warunek stabilności wielomianu trzeciego stopnia?

Współczynniki dodatnie i $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

8 Co daje członowi P dodanie członu D na liniach pierwiastkowych?

Zero w $-1/T_d$, które przyciąga gałęzie w lewo: więcej tłumienia.

BIEGUNY I ZERA

$$p = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}; \cos\varphi = \zeta, |p| = \omega_0$$

$$t_s \approx 4/(\zeta\omega_0); M_p \text{ z } \zeta \text{ (lekcja 1.2)}$$

dominacja: reszta biegunów $\geq$ ok. 5× dalej od osi

$$\text{zero: } \left(1 + \frac{s}{a}\right) T_0 \Rightarrow y = y_0 + \dot{y}_0/a$$

zero w prawej półpłaszczyźnie: start w złą stronę

LINIE PIERWIASTKOWE I STABILNOŚĆ

$D(s) + KN(s) = 0$: start w biegunach D , koniec w zerach N lub w ∞

asymptoty: środek $\frac{\sum p - \sum z}{n-m}$, kąty $\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}$

$$\text{dron P: } s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}, \text{ prosta } \sigma = -\frac{b}{2m}$$

stopień 3: $a_i > 0$ i $a_1a_2 > a_0a_3$

$$(s+1)^3 + K: \text{stabilny dla } K < 8$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 4.8 (bieguny dominujące, wpływ zer) i 5.6–5.7 (stabilność, linie pierwiastkowe).
- **Dla chętnych:** B. Douglas, seria *Control System Lectures* na YouTube, wykłady o liniach pierwiastkowych; J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1 (kryteria Hurwitza i Routha, polska terminologia egzaminacyjna).

Następna lekcja: **Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego**. Bieguny opisują pętlę od środka. Inżynierowie z Bell Labs patrzyli na nią z zewnątrz: podawali sinusoidy i mierzyli, co wychodzi. Ten punkt widzenia ma wielką zaletę: daje się zmierzyć na prawdziwym obiekcie, bez znajomości jego równań.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $\omega_0 = \sqrt{8} \approx 2,83 \text{ rad/s}$; $\zeta = 2/2,83 \approx 0,71$; przeregulowanie ok. 4,3%; $t_s \approx 4/2 = 2 \text{ s}$ (dokładnie ok. 2,1 s).
2. $\varphi = \arccos 0,5 = 60^\circ$; przeregulowanie ok. 16%.
3. Pierwsza ma większy kąt (bliżej osi urojonej przy tej samej wysokości), więc mniejsze ζ (0,32 wobec 0,71) i większe przeregulowanie (ok. 35% wobec 4%). Druga jest dalej od osi urojonej (3 wobec 1), więc ustala się ok. trzy razy szybciej.
4. Klin o połowie kąta 60° ($\zeta \geq 0,5$), na lewo od $\sigma = -4$ ($\zeta\omega_0 \geq 4$), między prostymi $\omega = \pm 6$. Ramiona klina nie są tu aktywne: przy $\sigma = -4$ klin dopuszcza $|\omega| \leq 4 \tan 60^\circ \approx 6,9$, więcej niż 6. Obszar to więc półpas: na lewo od $\sigma = -4$ i między prostymi $\omega = \pm 6$. Warunek na ζ jest tu spełniony automatycznie.

Zadania · część 2

1. Tak: -12 jest 24 razy dalej od osi niż para. $\omega_0 = \sqrt{1,25} \approx 1,12 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0,5/1,12 \approx 0,45$.
2. Pętla prędkości: -20 jest dziesięć razy dalej od osi niż -2 , można pominąć. Pętla kąta: biegun silników leży prawie tam, gdzie mają być bieguny pętli. Nie jest „daleko”, więc trzeba go uwzględnić (ten sam wniosek co w zadaniu 5.3 lekcji 1.2).
3. Tracisz szybkość: biegun w -1 to człon inercyjny o stałej czasowej 1 s, który spowalnia start (czas ustalania rośnie z ok. 4,0 do ok. 4,6 s). Wolny biegun to także gorsze tłumienie zakłóceń. Lepiej zmienić kąt pary.

Zadania · część 3

1. $T = \left(1 + \frac{s}{4/3,5}\right) \frac{4}{(s+2)^2}$, czyli $a = 4/3,5 \approx 1,14$. Zero leży bliżej osi urojonej niż podwójny biegun -2 , stąd wyraźny przelot.
2. Przy zerze w $+2$ ok. 28% w złą stronę, przy $+1$ aż ok. 75%. Im bliżej osi urojonej zero, tym silniej pochodna przeważa na początku.
3. Biegun regulatora w prawej półpłaszczyźnie to regulator niestabilny. Skrócenie na papierze nigdy nie jest dokładne, więc w pętli został by niestabilny mod, który przy najmniejszym błędzie modelu rośnie wykładniczo. Zero nieminimalnofazowe trzeba zaakceptować i dostosować do niego szybkość pętli.

Zadania · część 4

1. $s^2 + 0,5s + K$: podwójny pierwiastek dla $K = 0,0625$. $2\zeta\omega_0 = 0,5$, $\omega_0 = \sqrt{K}$: $\zeta = 0,25/\sqrt{K} = 0,5$ dla $K = 0,25$.
2. $K = 8$; bieguny $\pm j\sqrt{3} \approx \pm j 1,73$, czyli drgania z częstością ok. 1,73 rad/s (okres ok. 3,6 s). Wynik potwierdza kryterium Routha (część 5).
3. Przy rosnącym K bieguny idą w górę po pionowej prostej $\sigma = -0,25$ (dla $m = 1 \text{ kg}$). Odległość od osi urojonej, czyli tempo gaśnięcia, się nie zmienia (stały czas ustalania). Kąt rośnie do 90° , czyli ζ maleje do zera, a przeregulowanie rośnie.

4. $K_p = K$, $K_i = Ka$, więc warunek to $0,5K > Ka$, czyli $a < 0,5$, niezależnie od K . Dla $a = 0,25$ pętla jest stabilna przy każdym K , ale słabo tłumiona. Dla $a = 1$ dwie gałęzie od razu idą w prawo i pętla jest niestabilna przy każdym K .

Zadania · część 5

1. Nie: jeden współczynnik jest ujemny, więc warunek konieczny nie jest spełniony.
2. $4 \cdot 5 > K$, czyli $0 < K < 20$.
3. Wszystkie współczynniki dodatnie oraz $bK_p > mK_i$. To ten sam warunek, który podaliśmy w lekcji 1.3 bez dowodu, i ten sam, który widać w symulacji 2 ($a < b/m$).
4. Wiersze: $[1, 5, 2]$, $[3, 4]$, $[\frac{15-4}{3}, 2] = [3,67, 2]$, $[\frac{3,67 \cdot 4 - 3 \cdot 2}{3,67}] = [2,36]$, $[2]$. Pierwsza kolumna bez zmian znaku: stabilny.

Zadania do przemyślenia

1. Bieguny spełniają $D(s) + KN(s) = 0$, czyli $N(s) = -D(s)/K$. Przy ogromnym K prawa strona jest prawie zerem, więc $N(s) \approx 0$: pierwiastki zbliżają się do pierwiastków N .
2. Jeśli N ma mniej pierwiastków niż D , pozostałe bieguny nie mają dokąd iść i odchodzą do nieskończoności wzdłuż asymptot.
1. Odpowiedź wysokości na ster ma zero nieminimalnofazowe. Szybki autopilot widzi spadek wysokości po swojej własnej poprawce i dokłada jeszcze więcej steru: początkowy spadek się pogłębia.
2. Pętla wysokości musi być wolna w porównaniu z tym efektem. Dlatego autopiloty sterują wysokością przez wolną pętlę zewnętrzną, która zadaje kąt pochylenia szybkiej pętli wewnętrznej (kaskada, lekcja 9 Autopilot: pętłe wewnętrzne i zewnętrzne).
1. $L = \frac{K_p(s+b/m)}{s} \cdot \frac{1}{m(s+b/m)} = \frac{K_p}{ms}$, więc $T = \frac{K_p}{ms+K_p}$: człon I rzędu, bez przelotu.
2. Biegun obiektu nie zniknął: został skrócony tylko w drodze od wartości zadanej. Dla zakłócenia działającego na wejście obiektu (PS) wolny biegun $-b/m = -0,5$ zostaje i podmuch usuwa się powoli (stała czasowa 2 s). Skracanie wolnych biegunów obiektu poprawia odpowiedź na polecenia, a pogarsza na zakłócenia.
1. Dwa bieguny, bez zer: asymptoty pod kątami 90° i 270° , pionowo, nigdy nie przecinają osi urojonej.
2. Trzy bieguny: asymptoty co 120° , dwie z nich pod $\pm 60^\circ$ biegną w prawą półpłaszczyznę. Każdy kolejny biegun (np. czujnik, silnik) pogarsza sprawę. Dlatego „nieważne” małe inercje decydują w końcu o granicy wzmocnienia.
1. Bez inercji czujnika jest jeden biegun, który przy rosnącym K_p idzie po osi rzeczywistej w lewo. Czujnik dodaje biegun w -10 . Dwa bieguny spotykają się na osi rzeczywistej i rozchodzą pionowo (przy $\sigma = -5,25$).
2. Przy $K_p = 10$ para jest już wysoko ($-5,25 \pm j 8,8$, $\zeta \approx 0,51$), stąd przelot. Każdy dodatkowy biegun w pętli, choćby szybki, ogranicza wzmocnienie.

Automatyka · Lekcja 2.2: Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe · Źródła: G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 4–5; J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1; W. R. Evans, *Graphical analysis of control systems*, Trans. AIEE 67 (1948). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c2_2.py).