

Schematy blokowe i transmitancja pętli

W części I liczyliśmy pętle, pisząc równania różniczkowe w czasie. Przy jednym członie inercyjnym i regulatorze PI to jeszcze wygodne. Przy czterech blokach (silniki, dron, czujnik, regulator) robi się z tego plątanina pochodnych i całek.

Transmitancja zamienia każdy blok w czynnik, a całą pętlę w ułamek. Ta lekcja tłumaczy wyniki części I na język zmiennej s , uczy algebry schematów blokowych i pokazuje, jak z jednego ułamka odczytać uchyb ustalony pętli.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 3 h zadań

ZADANIA

18 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rozdz. 2–3; G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 4–5; J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: wzmacniacze, które wyły
- 1 Zmienna s : częstotliwość zespolona
- 2 Transmitancje członów i regulatorów
- 3 Algebra schematów blokowych
- 4 Pętla drona w transmitancjach
- 5 Uchyb ustalony i typ układu
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: wzmacniacze, które wyły

Wzmacniacz Blacka z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta miał kłopot, którego nie widać w statyce. Część egzemplarzy zamiast wzmacniać rozmowę, zaczynała sama z siebie gwizdać. Wzmocnienie pętli $A\beta$ było duże w całym paśmie pracy, a lampy i transformatory opóźniały sygnał tym bardziej, im szybciej się zmieniał. Dla jakiejś częstotliwości sygnał wracał po obiegu pętli odwrócony w fazie i dodawał się zamiast odejmować, jak w prysznicu z długą rurą.

W 1932 r. Harry Nyquist, kolega Blacka z Bell Labs, opublikował artykuł *Regeneration Theory*, w którym podał warunek, kiedy taki wzmacniacz będzie stabilny. Kilka lat później Hendrik Bode zamienił jego wynik w praktyczną metodę projektowania. Obaj myśleli o pętli jak o *iloczynie funkcji częstotliwości*: każdy element mnoży sygnał przez swoją zespoloną funkcję, a pętla to ich iloczyn. Część II kursu to ich narzędzia. Ta lekcja przygotowuje język: transmitancje i schematy blokowe.

Pytanie na start. Dron z regulatorem PI prędkości z lekcji 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb miał przeregulowanie 7%, choć jego pętla „powinna” zachowywać się jak człon oscylacyjny z $\zeta = 1$, czyli bez przelotu. Skąd te 7%? Odpowiedź w części 4.

Zmienna s : częstotliwość zespolona

W lekcji 4.4 Transformata Laplace'a transformata Laplace'a zamieniła równanie różniczkowe w algebraiczne. Pochodna stała się mnożeniem przez s , a **transmitancja** $G(s) = Y(s)/U(s)$, policzona przy zerowych warunkach początkowych, opisała układ jednym ułamkiem. W automatyce od tej chwili jednostkę urojoną piszemy j , bo i oznacza w elektrotechnice prąd: $s = \sigma + j\omega$.

Dobrze jest mieć obraz tego, czym jest s . Podajmy na wejście układu liniowego sygnał $u(t) = e^{st}$. Pochodna takiego sygnału to se^{st} , więc układ opisany równaniem różniczkowym o stałych współczynnikach odpowie (po zaniku stanu przejściowego) sygnałem *tego samego kształtu*, pomnożonym przez liczbę $G(s)$:

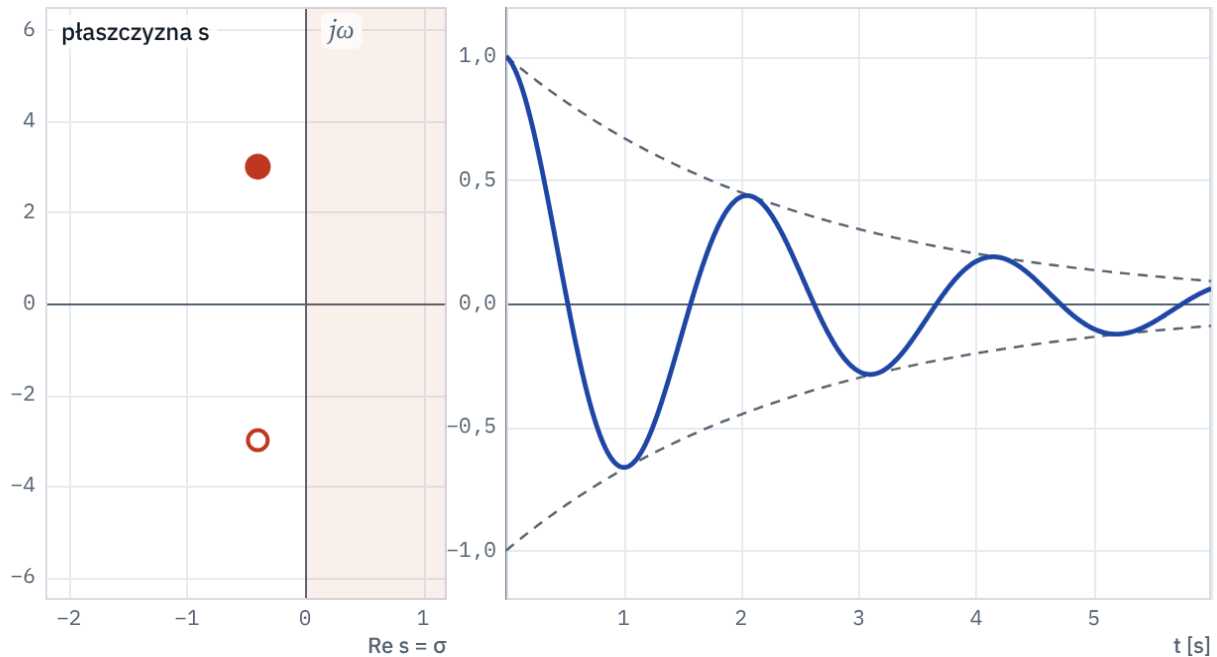
SENS TRANSMITANCJI

$$u(t) = e^{st} \Rightarrow y(t) = G(s) e^{st}.$$

Każdy punkt s płaszczyzny zespolonej to jeden kształt sygnału: e^{st} razy drgania z częstością ω . Transmitancja mówi, ile razy układ wzmacnia sygnał tego kształtu. W $s = 0$ (sygnał stały) to wzmocnienie statyczne z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta. Na osi urojonej $s = j\omega$ to odpowiedź na sinusoidę (lekcja 2.3 Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego).

Przykład: człon inercyjny $\tau \dot{y} + y = Ku$. Wstawiamy $u = e^{st}$, $y = Ye^{st}$: $(\tau s + 1)Ye^{st} = Ke^{st}$, więc $Y = \frac{K}{\tau s + 1}$. Bez transformat, bez całek. To ten sam wynik, który daje transformata Laplace'a.

SYMULACJA 1 Płaszczyzna s . Kliknij albo przeciągnij punkt: po prawej widać sygnał $\operatorname{Re} e^{st} = e^{\sigma t} \cos \omega t$, który mu odpowiada. Na lewo od osi urojonej sygnały gasną, na prawo rosną, na osi urojonej drgają ze stałą amplitudą. Te same obszary za chwilę powiedzą nam, czy pętla jest stabilna.



— punkt $s = \sigma + j\omega$ i jego sprzężenie — $\operatorname{Re} e^{st} = e^{\sigma t} \cdot \cos \omega t$ — — obwiednia $\pm e^{\sigma t}$

$s = -0,40 + j3,00$

czas zaniku $1/|\sigma|$ 2,50 s

okres $2\pi/\omega$ 2,09 s

Lewa półpłaszczyzna poza osią: drgania gasnące. Odległość od osi urojonej mówi, jak szybko gasną, wysokość nad osią rzeczywistą, jak szybko drgają.

Stan na rysunku: $s = -0,40 + j3,00$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

1 Jaki sygnał odpowiada punktowi $s = -0,5 + j2$? Po jakim czasie amplituda zmaleje e razy? Jaki jest okres drgań?

2 Metodą „wstaw e^{st} ” znajdź transmitancję układu $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$.

3 Dla $G(s) = \frac{1}{s+1}$ oblicz $G(0)$ i $G(j)$ (czyli $s = j \cdot 1$). Zinterpretuj oba wyniki.

2 Transmitancje członów i regulatorów

Wszystkie człony z lekcji 1.2 Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa i regulatory z lekcji 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb mają proste transmitancje. Wystarczy zamienić $\frac{d}{dt}$ na s , a całkę na $\frac{1}{s}$: Douglas 2.7

Transmitancje, których będziemy używać

element	równanie w czasie	transmitancja
proporcjonalny	$y = Ku$	K
inercyjny I rzędu	$\tau \dot{y} + y = Ku$	$\frac{K}{\tau s + 1}$
całkujący	$\dot{y} = Ku$	$\frac{K}{s}$
oscylacyjny II rzędu	$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u$	$\frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
opóźniający	$y(t) = Ku(t - \theta)$	$Ke^{-\theta s}$
regulator P	$u = K_p e$	K_p
regulator PI	$u = K_p e + K_i \int e dt$	$K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$
dron: ciąg $\rightarrow$ prędkość	$m\dot{v} + bv = \Delta T$	$\frac{1}{ms + b}$
dron: prędkość $\rightarrow$ wysokość	$\dot{z} = v$	$\frac{1}{s}$

Opóźnienie to jedyny element na liście, którego transmitancja nie jest ilorazem wielomianów. Wynika z reguły przesunięcia z lekcji 4.4 Transformata Laplace'a: sygnał przesunięty o θ ma transformatę pomnożoną przez $e^{-\theta s}$. To ta „nieułamkowość” sprawia, że opóźnienie jest tak kłopotliwe (lekcja 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie).

⚠ PO POLSKU NA EGZAMINIE

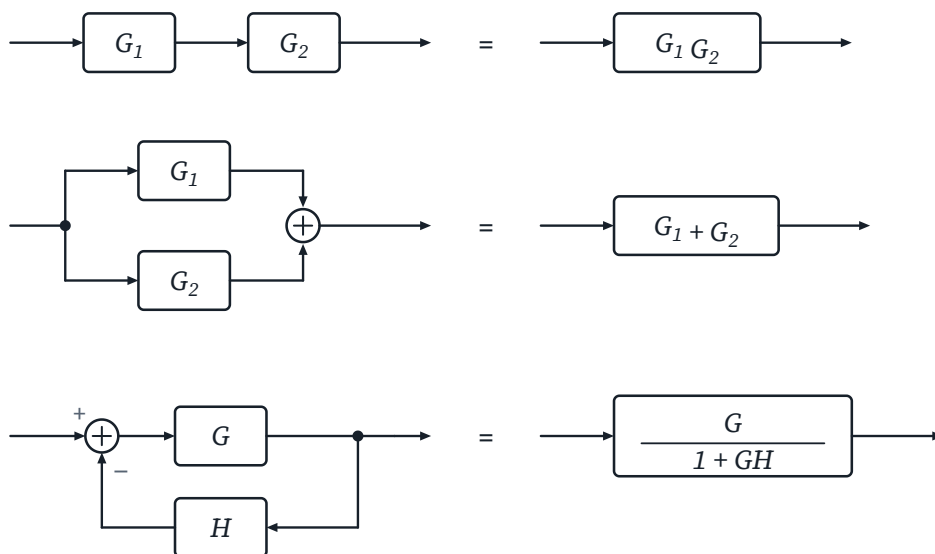
W polskich podręcznikach: *transmitancja operatorowa* $G(s)$ (u starszych autorów zmienna p zamiast s), *transmitancja widmowa* $G(j\omega)$, *człon inercyjny*, *całkujący idealny* i *rzeczywisty*, *oscylacyjny*, *opóźniający*. Regulatory oznacza się też przez *wzmocnienie* k_p i *czas zdwojenia* T_i : $K_p + \frac{K_i}{s} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$, czyli $T_i = K_p / K_i$.

- 1 Termometr ma stałą czasową 12 s i wzmacnienie 1. Zapisz jego transmitancję. Ile wynosi jej wartość dla sygnału stałego?
- 2 Regulator PI ma $K_p = 3,5$ i $K_i = 4$ (jednostki jak w lekcji 1.3). Ile wynosi czas zdwojenia T_i ? Skąd ta nazwa?
- 3 Piec z przykładu 6.2 lekcji 1.2 ma $K = 30$ °C/kW, $\tau = 9$ min, $\theta = 6$ min. Zapisz transmitancję (czas w minutach). Jaki kształt sygnału wejściowego wzmacnia on najbardziej: stały czy szybko zmienny?
- 4 Pokaż, że transmitancja drona od ciągu do wysokości to $\frac{1}{s(ms+b)}$. Jakie ma bieguny? Co mówi biegun w zerze?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Algebra schematów blokowych

Schemat blokowy to rysunek równań. Strzałka to sygnał, prostokąt mnoży swój sygnał wejściowy przez transmitancję, a kółko (węzeł sumacyjny) dodaje sygnały ze znakami. Trzy połączenia wystarczą, żeby uprościć każdy schemat, który spotkamy w tym kursie: Douglas 3.3



Trzy podstawowe połączenia bloków i ich transmitancje zastępcze: szeregowe (iloczyn), równoległe (suma) i ze sprzężeniem zwrotnym.

🔌 PRAWO · POŁĄCZENIA BLOKÓW

szeregowe: $G_1 G_2$, równoległe: $G_1 + G_2$, sprzężenie ujemne: $\frac{G}{1 + GH}$.

Wzór na sprzężenie: $Y = G(R - HY)$, więc $Y(1 + GH) = GR$. Licznik to „droga na wprost” od wejścia do wyjścia, mianownik to 1 plus iloczyn transmitancji wzdłuż całej pętli.

Ostatni wzór to wynik lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta, tylko że teraz wzmocnienia są funkcjami s . Dla pętli z regulatorem C , obiektem P i czujnikiem bez dynamiki ($H = 1$) oznaczamy **transmitancję pętli** $L(s) = C(s)P(s)$. Wtedy:

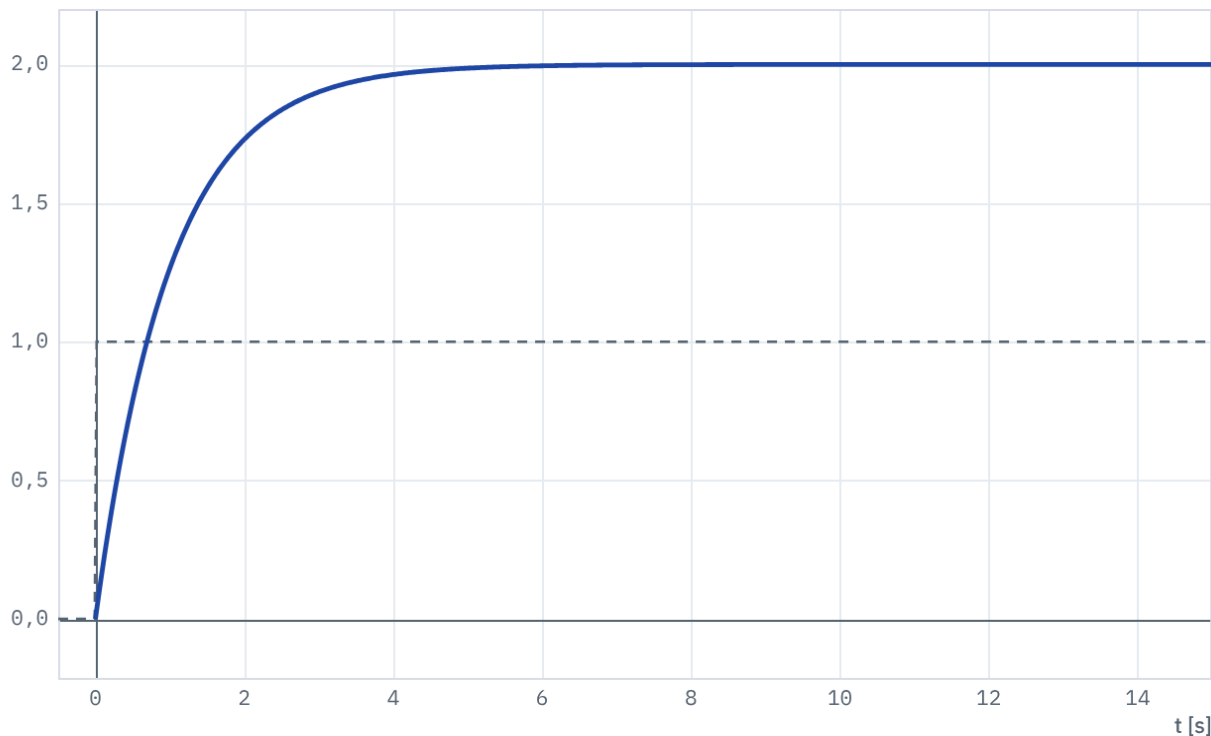
$$\frac{Y}{R} = T(s) = \frac{L}{1 + L}, \quad \frac{E}{R} = S(s) = \frac{1}{1 + L}, \quad \frac{Y}{D_{\text{wy}}} = S(s), \quad \frac{Y}{N} = -T(s).$$

Tu D_{wy} to zakłócenie dodające się do wyjścia, a N szum czujnika. S i T to te same czynniki $\frac{1}{1+L}$ i $\frac{L}{1+L}$, które w lekcji 1.1 dzieliły i przenosiły błędy. Teraz zależą od s , czyli od tego, jak szybko zmienia się sygnał. W lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S , T i kształtowanie pętli zobaczymy, że to klucz do kompromisu między tłumieniem zakłóceń a szumem.

Algebra działa tylko dla układów **liniowych i stacjonarnych** (LTI, ang. *linear time-invariant*). Bloki liniowe można zamieniać miejscami, bo mnożenie jest przemienne. Nieliniowych, takich jak nasycenie, nie wolno, a w ogóle nie mają transmitancji. Douglas 3.3.1 Dlatego nasycenie z lekcji 1.3 zawsze sprawdzamy symulacją, a nie wzorem.

SYMULACJA 2

Łańcuch do trzech bloków połączonych szeregowo i jego odpowiedź skokowa. Transmitancja łańcucha to iloczyn transmitancji bloków (wypisany pod wykresem). Zamknij pętlę sprzężeniem jednostkowym: bez członu całkującego zostaje uchyb, z nim znika. Spróbuj też całkowania z opóźnieniem albo z członem oscylacyjnym: pętla może stracić stabilność, choć każdy blok osobno jest niegroźny.



— skok wejścia — odpowiedź łańcucha (pętla otwarta) — odpowiedź pętli zamkniętej $L/(1 + L)$

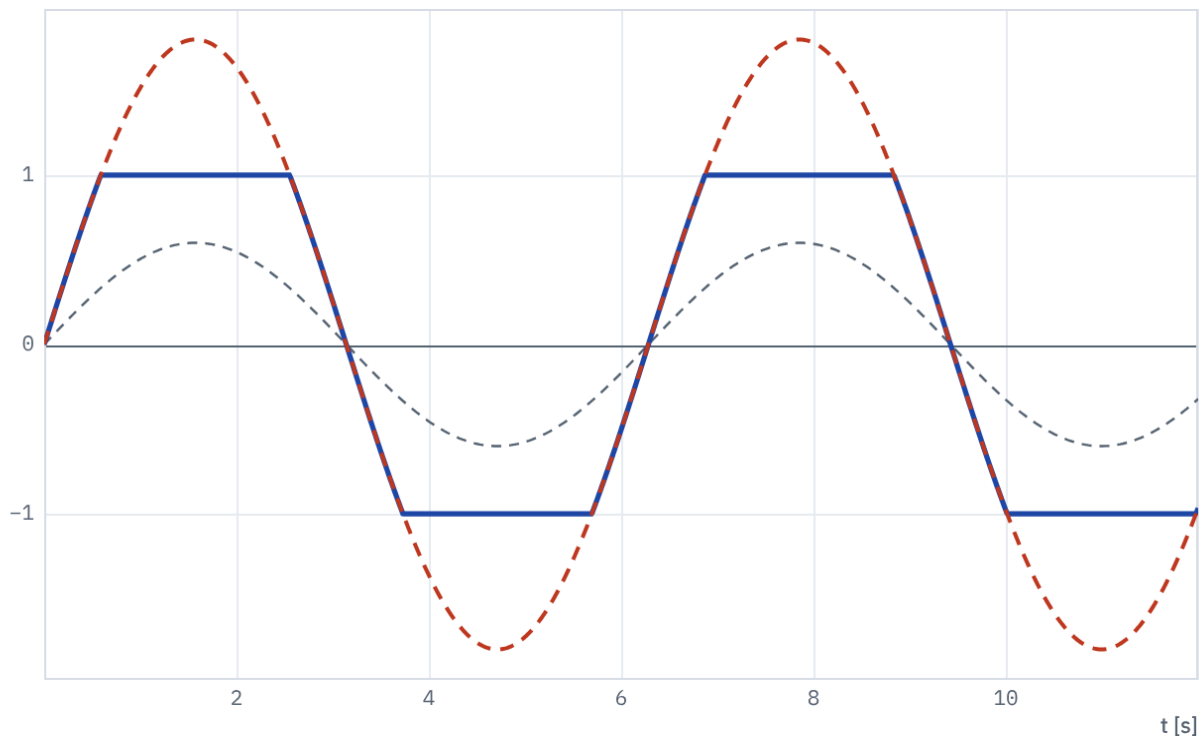
$$L(s) \quad 2 \cdot \frac{1}{(s + 1)}$$

Łańcuch szeregowy: w dziedzinie czasu trzeba by liczyć splot odpowiedzi kolejnych bloków, w dziedzinie s wystarczy pomnożyć transmitancje. Zamknij pętlę.

Stan na rysunku: $L(s) = 2 \cdot 1/(s + 1)$, pętla otwarta.

SYMULACJA 3

Czy kolejność bloków ma znaczenie? Sygnał przechodzi przez wzmacnienie $\times 3$ i blok B w dwóch kolejnościach. Dla bloku liniowego (inercyjnego) wyniki są identyczne. Dla nasycenia różnią się, gdy sygnał jest duży, a dla kwadratu zawsze.



— — wejście $\sin t$ — najpierw $\times 3$, potem blok B — najpierw blok B, potem $\times 3$

największa różnica wyjść 0,800

Nasycenie jest nieliniowe: przy dużym sygnale kolejność bloków zmienia wynik. Algebra schematów blokowych dotyczy tylko układów liniowych.

Stan na rysunku: blok B = nasycenie ± 1 , amplituda 0,60.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Pętla ma $G = \frac{10}{s+1}$ w torze głównym i $H = 1$. Oblicz transmitancję zamkniętej pętli, jej biegun i wzmacnienie statyczne. Porównaj z G .
- 2 Dwa bloki $\frac{2}{s+2}$ i $\frac{1}{s+1}$ połączono równolegle. Zapisz transmitancję zastępczą jako jeden ułamek.
- 3 Wyprowadź transmitancję od zakłócenia D działającego na wejście obiektu (np. podmuch to siła, a nie przesunięcie wyjścia) do wyjścia Y w pętli z C i P .

- 4 Czujnik ma transmitancję $H(s) = \frac{1}{0,1s+1}$. Ile wynosi $\frac{Y}{R}$ w pętli z $C = K_p$ i $P = \frac{1}{s+0,5}$? Czy wzmocnienie statyczne się zmieniło?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

4 Pętla drona w transmitancjach

Przepiszmy pętlę prędkości z lekcji 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb. Obiekt $P = \frac{1}{ms+b}$, regulator $C = \frac{K_p s + K_i}{s}$, więc

$$L = \frac{K_p s + K_i}{s(ms + b)}, \quad T = \frac{L}{1 + L} = \frac{K_p s + K_i}{ms^2 + (b + K_p)s + K_i}.$$

Mianownik to dokładnie równanie z lekcji 1.3, $m\ddot{v} + (b + K_p)\dot{v} + K_i v$, tylko zapisane literą s . Ale w liczniku jest coś, czego w członie oscylacyjnym nie było: $K_p s + K_i$. Ten wielomian ma pierwiastek $s = -K_i/K_p$, który nazywa się **zerem** transmitancji. Dla $K_p = 3,5$ i $K_i = 4$ (przy $m = 1$ kg): mianownik $s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2$ to podwójny biegun w -2 , czyli $\zeta = 1$. Zero leży w $-1,14$.

Odpowiedź na pytanie z prologu: zero w liczniku to człon $K_p s$, czyli pochodna wartości zadanej, przepuszczona przez człon oscylacyjny. Skok wartości zadanej daje przez K_p natychmiastowe szarpnięcie, które dodaje się do łagodnej odpowiedzi z $\zeta = 1$. Zero leży bliżej osi urojonej niż bieguny, więc jego wpływ jest wyraźny: 70% przeregulowania. Jak zera kształtują odpowiedź, zobaczymy w lekcji 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe.

Podmuch (siła F na wejściu obiektu) przechodzi na prędkość przez

$$\frac{V}{F} = \frac{P}{1 + CP} = \frac{s}{ms^2 + (b + K_p)s + K_i}.$$

Licznik ma zero w $s = 0$, więc dla stałej siły ($s = 0$) wzmocnienie jest zerowe: całka usuwa wpływ stałego zakłócenia. W lekcji 1.3 udowodniliśmy to rozumowaniem o stanie ustalonym. Tu wystarczy spojrzeć na licznik.

Te same rachunki można zlecić komputerowi. Pakiet `python-control` robi to w kilku liniijkach i będzie nam towarzyszył do końca kursu (odpowiada skrzynce narzędziowej MATLAB-a, której używa Tewari):

Python · petla_tf.py (pip install control)

```
import control as ct          # pip install control
s = ct.tf('s')
m, b = 1.0, 0.5
P = 1 / (m * s + b)          # obiekt: ciąg -> prędkość pionowa
C = 3.5 + 4 / s               # regulator PI z lekcji 1.3
L = C * P                    # transmitancja pętli
T = ct.feedback(L, 1)         # r -> v: L/(1 + L)
Fv = ct.feedback(P, C)        # podmuch F -> v: P/(1 + CP)
print(T)                     # (3.5 s + 4) / (s^2 + 4 s + 4)
print("bieguny:", ct.poles(T), " zera:", ct.zeros(T))
print("przeregulowanie: %.1f %" % ct.step_info(T)["0vershoot"]) # 7.3 %
print("podmuch, wartość ustalona:", ct.dcgain(Fv))               # 0.0
```

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Dla regulatora P ($K_i = 0$) zapisz $T(s)$ pętli prędkości drona. Odczytaj stałą czasową i wzmocnienie statyczne i porównaj z ramką z lekcji 1.3.
- 2 Gdzie leży zero $T(s)$ dla nastaw $K_p = 3,7$, $K_i = 9$ z przykładu 6.2 lekcji 1.3? Bliżej czy dalej od osi urojonej niż bieguny ($\zeta = 0,7$, $\omega_0 = 3$)? Czy to zgadza się z dużym przeregulowaniem (17%), które wtedy wyszło?
- 3 W lekcji 1.3 człon P liczony tylko od pomiaru, $u = -K_p v + K_i \int e$, usuwał nadmiarowe przeregulowanie. Wyprowadź $T(s)$ dla tego wariantu i wyjaśnij, gdzie zniknęło zero.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

5 Uchyb ustalony i typ układu

Uchyb to $E = S R = \frac{R}{1+L}$. Twierdzenie o wartości końcowej z lekcji 4.4 Transformata Laplace'a ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, o ile pętla jest stabilna) daje wszystkie wyniki o uchybie z części I jednym ruchem. Dla skoku $R = \frac{1}{s}$ i dla rampy $R = \frac{a}{s^2}$:

WYNIK · UCHYB USTALONY STABILNEJ PĘTLI

$$e_{\infty}^{\text{skok}} = \frac{1}{1 + L(0)}, \quad e_{\infty}^{\text{rampa}} = \frac{a}{K_v}, \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s).$$

Typ układu to liczba biegunów w zerze (całkowań) w $L(s)$. Typ 0: skończony uchyb dla skoku. Typ 1: zerowy dla skoku, skończony dla rampy. Typ 2: zerowy także dla rampy.

Sprawdźmy na przykładach z części I. Regulator P z obiektem inercyjnym: $L(0) = K_p/b$, typ 0, uchyb $\frac{b}{b+K_p}$ (lekcja 1.3). Regulator PI: biegun $\frac{1}{s}$ w regulatorze daje typ 1 i zerowy uchyb dla skoku. Dla rampy $K_v = \lim sL = \frac{K_i}{b}$, czyli uchyb $\frac{ab}{K_i}$: dokładnie wynik zadania do przemysłenia 2 z lekcji 1.3 (0,0625 m/s). Pętla wysokości drona z regulatorem P ma typ 1 *bez* całki w regulatorze, bo całkowanie jest w samym obiekcie ($\frac{1}{s}$ od prędkości do wysokości). Zostaje jednak uchyb od stałej siły, bo ta wchodzi *przed* całkowaniem (zadanie 5.3).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

4 zadania · ok. 30 min

- 1 $L(s) = \frac{9}{s+1}$. Ile wynosi uchyb dla skoku? A dla rampy?

- 2 $L(s) = \frac{4}{s(s+2)}$. Jaki to typ? Ile wynosi uchyb dla rampy o nachyleniu 1?

- 3 Pętla wysokości drona: $C = K$ (regulator P), obiekt $\frac{1}{s(ms+b)}$, a stała siła F działa na wejściu obiektu (błąd masy). Wyprowadź uchyb wysokości. Dlaczego typ 1 tu nie pomaga?

- 4 Dlaczego twierdzenie o wartości końcowej trzeba stosować ostrożnie? Podaj $L(s)$, dla którego wzór daje skończony uchyb, a pętla wcale się nie ustala.


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: OD SCHEMATU DO ODPOWIEDZI

1. Zapisz transmitancję każdego bloku (tabela z części 2).
2. Uprość schemat od środka: najpierw pętle wewnętrzne, potem zewnętrzne; szeregowo mnożysz, równolegle dodajesz, sprzężenie to $\frac{G}{1+GH}$.
3. Odczytaj: bieguny (mianownik), zera (licznik), wzmacnienie statyczne ($s = 0$).
4. Uchyb: typ układu i $e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, ale tylko dla stabilnej pętli.
5. Sprawdź symulacją (np. `python-control`), zwłaszcza gdy są nieliniowości.

Przykład 6.1

Tempomat jako schemat blokowy

Samochód zmienia prędkość jak człon inercyjny: wzmacnienie $\frac{10}{3}$ (km/h)/% i stała czasowa 20 s (przyjmujemy). Tempomat P z $K_p = 3$ %/(km/h). Wyznacz $T(s)$, stałą czasową pętli i uchyb. Co zmieni człon I z $K_i = 0,3$ %/(km/h·s)?

- 1 $L = \frac{3 \cdot 10/3}{20s+1} = \frac{10}{20s+1}$; $T = \frac{10}{20s+11}$: stała czasowa $20/11 \approx 1,8$ s, wzmacnienie $\frac{10}{11}$, uchyb 9%.
- 2 Z członem I: $L = \frac{10}{3} \cdot \frac{3s+0,3}{s(20s+1)}$. Typ 1, uchyb zerowy. Mianownik T : $20s^2 + 11s + 1 = 20(s + 0,435)(s + 0,115)$.

Wynik: P: szybko (1,8 s), ale 9% uchybu. PI: bez uchybu, ale wolny biegun w $-0,115$ oznacza powolne „dociąganie” ostatnich procent (ok. 20 s do pasma $\pm 2\%$), z 5% przeregulowania od zera w $-0,1$.

Sprawdzenie: `python-control` daje te same bieguny i przeregulowanie 4,9% ✓. W tempomacie uchyb 9% to błąd liczony od całej prędkości, bez odpowiedzi z modelu. Z podpowiedzią (lekcja 1.1) byłby to 9% błędu modelu, czyli dużo mniej.

Przykład 6.2

Kaskada: pętla wysokości nad pętlą prędkości

Wewnętrzna pętla prędkości drona to $T_v = \frac{3,5s+4}{(s+2)^2}$ (PI z lekcji 1.3, $m = 1$ kg). Zewnętrzny regulator P wysokości daje zadaną prędkość: $v_{\text{zad}} = K_z(z_{\text{zad}} - z)$. Wyznacz transmitancję od z_{zad} do z i dobierz K_z .

- 1 Od v_{zad} do z : $T_v \cdot \frac{1}{s}$. Pętla zewnętrzna: $L_z = \frac{K_z T_v}{s}$, $T_z = \frac{K_z T_v}{s + K_z T_v}$.
- 2 Typ 1 (całkowanie $\frac{1}{s}$ w pętli zewnętrznej): wysokość bez uchybu dla skoku. Stała siła jest już usuwana przez całą pętlę wewnętrzną.
- 3 Biegundy dla kilku K_z (python-control): $K_z = 1$ 1/s: $-0,82$ i $-1,59 \pm j 1,54$, bez przeregulowania, czas ustalania ok. 3,9 s. $K_z = 2$ 1/s: przeregulowanie 7%, czas ustalania 3,0 s.

Wynik: $K_z \approx 1-1,5$ 1/s daje wysokość bez uchybu i bez kołysania, czego regulator P na samej wysokości (lekcja 1.1) nie umiał.

Sprawdzenie: pętla wewnętrzna jest szybka (bieguny w -2), a zewnętrzna wolniejsza: to reguła kaskady (lekcja 3.2 Strojenie: model z testu, reguły nastaw i regulacja kaskadowa). Przy $K_z \rightarrow$ duże pętle zaczynają się „przeszkadzać” i rośnie przeregulowanie ✓.

Przykład 6.3

Czujnik, który się spóźnia

Pętla prędkości drona ($m = 1$ kg) z regulatorem P . Czujnik prędkości ma inercję $H = \frac{1}{0,1s+1}$. Porównaj odpowiedź z czujnikiem idealnym dla $K_p = 3,5$ i $K_p = 10$.

- 1 Bez inercji: $T = \frac{K_p}{s+0,5+K_p}$, człon I rzędu, bez przeregulowania.
- 2 Z inercją: mianownik $(s + 0,5)(0,1s + 1) + K_p = 0,1s^2 + 1,05s + 0,5 + K_p$. Po pomnożeniu przez 10: dla $K_p = 3,5$ to $s^2 + 10,5s + 40$ ($\zeta \approx 0,83$), dla $K_p = 10$ to $s^2 + 10,5s + 105$ ($\zeta \approx 0,51$).
- 3 Przeregulowanie prawdziwej prędkości: 1,4% i 29%.

Wynik: czujnik spóźniony o 0,1 s zamienia spokojną pętlę I rzędu w oscylacyjną. Przy $K_p = 10$ przelot to prawie 30%, choć wzmocnienie statyczne (0,95) jest takie samo jak z idealnym czujnikiem.

Sprawdzenie: spóźniony czujnik działa jak mała rura w prysznicu: regulator reaguje na stan sprzed chwili. Statyka tego nie widzi, bo $H(0) = 1 \checkmark$.

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Transmitancja to stosunek wyjścia do wejścia w każdej chwili.”

To stosunek *transformat* przy zerowych warunkach początkowych, a nie $y(t)/u(t)$. W chwili t wyjście zależy od całej historii wejścia (Douglas pokazuje ten błąd w rozdz. 2).

× „Schemat blokowy pokazuje, którędy płynie energia.”

Pokazuje zależności między sygnałami (informację). Strzałka od czujnika do regulatora nie przenosi energii, a sprzężenie zwrotne może biec „pod prąd” fizycznego przepływu.

× „Kolejność bloków nie ma znaczenia.”

Tylko dla bloków liniowych. Nasycenie i inne nieliniowości trzeba zostawić tam, gdzie są.

× „Całka w pętli usuwa uchyb od każdego zakłócenia.”

Tylko od zakłóceń wchodzących *za* całkowaniem, czyli gdy całka leży na drodze od uchybu do miejsca wejścia zakłócenia. Całkowanie w obiekcie, które leży dopiero *za* miejscem wejścia siły, nie pomaga (zadanie 5.3).

× „Mianownik mówi wszystko o odpowiedzi.”

O stabilności i rodzaju ruchu tak, ale zera z licznika zmieniają kształt odpowiedzi, np. dodają przeregulowania (część 4).

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Dlaczego e^{st} ?** Wyjaśnij, dlaczego dla układów liniowych o stałych współczynnikach funkcje e^{st} są wyjątkowe, a np. t^2 nie. Co się stanie, gdy podasz t^2 na wejście członu inercyjnego?
■■■
- 2 **Zakłócenie na wyjściu i na wejściu.** W pętli z $C = K_p$ i $P = \frac{1}{s+1}$ porównaj wpływ zakłócenia D dodawanego do wyjścia ($Y/D = S$) i do wejścia obiektu ($Y/D = PS$) dla szybko zmiennych zakłóceń ($|s|$ duże). Które łatwiej tłumić?
■■■
- 3 **Dwie drogi do wyjścia.** Regulator ma odpowiedź z modelu $F(s)$ równoległą do sprzężenia: $U = FR + C(R - Y)$. Wyprowadź Y/R . Jakie F daje $Y = R$ niezależnie od C , jeśli znamy P dokładnie?
■■■
- 4 **Pętla z opóźnieniem.** Prysznic z lekcji 1.1: $\dot{u} = k(r - y)$, $y(t) = u(t - \theta)$. Zapisz go jako schemat blokowy i podaj $L(s)$. Jaki to typ układu?
■■■
- 5 **Dwa czujniki, jeden regulator.** Dron mierzy prędkość pionową wprost (szybki, ale szumiący akcelerometr scałkowany) i pośrednio (różniczkując barometr, wolno i z opóźnieniem). Narysuj schemat blokowy pętli z czujnikiem będącym sumą $H_1V + H_2V$. Co musi spełniać $H_1 + H_2$, żeby w stanie ustalonym czujnik nie kłamał?
■■■

■■■ podstawowe ■■■ średnie ■■■ feynmanowskie

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Co oznacza wartość $G(s)$ w danym punkcie s ?

Ile razy układ wzmacnia sygnał e^{st} ; w $s = 0$ to wzmocnienie statyczne.

- 2 Jaka jest transmitancja członu inercyjnego, całkującego i opóźniającego?

$\frac{K}{\tau s + 1}$, $\frac{K}{s}$, $Ke^{-\theta s}$.

- 3 Jak połączyć transmitancje szeregowo, równolegle i w pętli ze sprzężeniem?

Iloczyn, suma, $\frac{G}{1+GH}$.

- 4 Co to są L , S i T ?

$L = CP$ (pętla), $S = \frac{1}{1+L}$ (od wartości zadanej do uchybu, od zakłócenia na wyjściu do wyjścia), $T = \frac{L}{1+L}$ (od wartości zadanej do wyjścia).

- 5 Skąd przeregulowanie pętli PI z $\zeta = 1$?

Z zera $-K_i/K_p$ w liczniku T : człon P przepuszcza szarpnięcie od skoku wartości zadanej.

- 6 Co to jest typ układu i co z niego wynika?

Liczba całkowań w L ; typ 0: uchyb dla skoku, typ 1: zerowy dla skoku, skończony dla rampy.

- 7 Kiedy wolno zamieniać bloki miejscami?

Gdy są liniowe i stacjonarne.

- 8 Kiedy twierdzenie o wartości końcowej daje bzdurę?

Gdy pętla jest niestabilna.

TRANSMITANCJE

$$u = e^{st} \Rightarrow y = G(s)e^{st}; \quad s = \sigma + j\omega$$

$$\text{inercyjny } \frac{K}{\tau s + 1}; \text{ całkujący } \frac{K}{s};$$

$$\text{opóźnienie } Ke^{-\theta s}$$

$$\text{oscylacyjny } \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\text{PI: } K_p + \frac{K_i}{s}; \quad T_i = K_p/K_i$$

$$\text{dron: } \frac{1}{ms + b} \text{ (prędkość), } \frac{1}{s(ms + b)} \text{ (wysokość)}$$

PĘTLA

szeregowo $G_1 G_2$, równolegle $G_1 + G_2$,

$$\text{pętla } \frac{G}{1 + GH}$$

$$L = CP; \quad T = \frac{L}{1 + L}, \quad S = \frac{1}{1 + L}, \quad S + T = 1$$

$$\text{zakłócenie na wejściu obiektu: } \frac{Y}{D} = PS$$

$$e_{\infty}^{\text{skok}} = \frac{1}{1 + L(0)}, \quad e_{\infty}^{\text{rampa}} = \frac{a}{K_v}, \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rozdz. 2.7 (transmitancje) i 3 (schematy blokowe: nazewnictwo, algebra, upraszczanie, dłaczego LTI).
- **Dla chętnych:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 4–5 (modele ciągłe i analiza pętli); dokumentacja pakietu `python-control` (funkcje `tf`, `feedback`, `step_response`).

Następna lekcja: **Bieguny i zera pętli zamkniętej**. Zobaczyliśmy, że mianownik $T(s)$ decyduje o stabilności i charakterze ruchu, a licznik dokłada swoje. Teraz popatrzymy, jak bieguny pętli zamkniętej wędrują po płaszczyźnie s , gdy zwiększamy wzmocnienie, i nauczymy się przewidywać odpowiedź z samego położenia biegunów i zer.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $e^{-0,5t} \cos 2t$; amplituda maleje e razy po 2 s; okres $\pi \approx 3,14$ s.
2. $(s^2 + 3s + 2)Y = 1$, czyli $G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.
3. $G(0) = 1$: sygnał stały przechodzi bez zmian. $G(j) = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$, moduł $1/\sqrt{2} \approx 0,71$, argument -45° : sinusoida o częstotliwości 1 rad/s wychodzi o 29% słabsza i opóźniona o ósmą część okresu.

Zadania • część 2

1. $\frac{1}{12s+1}$; $G(0) = 1$: w stanie ustalonym termometr pokazuje prawdziwą temperaturę.
2. $T_i = 3,5/4 \approx 0,88$ s. Przy stałym uchybie e_0 człon P daje od razu $K_p e_0$, a człon I dokładnie $K_i e_0 t$. Po czasie T_i człon I dorównuje członowi P, więc sterowanie się podwaja.
3. $G(s) = \frac{30e^{-6s}}{9s+1}$. Dla $s = j\omega$ moduł to $\frac{30}{\sqrt{81\omega^2+1}}$: największy dla sygnału stałego, coraz mniejszy dla szybszych zmian. Piec „wygładza” szybkie zmiany mocy.
4. Iloczyn $\frac{1}{ms+b} \cdot \frac{1}{s}$. Bieguny: 0 i $-b/m$. Biegun w zerze to całkowanie: odpowiedź na stały nadmiar ciągu nie ustala się, wysokość rośnie bez końca.

Zadania • część 3

1. $T = \frac{10}{s+11}$; biegun -11 (pętla otwarta: -1 , więc pętla jest 11 razy szybsza); $T(0) = 10/11 \approx 0,91$, uchyb 9%, dokładnie jak $\frac{1}{1+L}$ z lekcji 1.1.
2. $\frac{2(s+1)+(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$.
3. $Y = P(D + U)$, $U = -CY$ (dla $R = 0$). Stąd $Y(1 + CP) = PD$: $\frac{Y}{D} = \frac{P}{1+CP} = PS$. Zakłócenie na wejściu obiektu jest najpierw filtrowane przez sam obiekt.
4. $\frac{Y}{R} = \frac{CP}{1+CPH} = \frac{K_p(0,1s+1)}{(s+0,5)(0,1s+1)+K_p}$. W $s = 0$: $\frac{K_p}{0,5+K_p}$, tak samo jak bez inercji czujnika, bo $H(0) = 1$. Zmienia się dynamika (przykład 6.3).

Zadania • część 4

1. $T = \frac{K_p}{ms+b+K_p}$: człon inercyjny o $\tau_z = \frac{m}{b+K_p}$ i wzmacnieniu $\frac{K_p}{b+K_p}$, czyli uchyb $\frac{b}{b+K_p}$ na jednostkę skoku ✓.
2. Zero w $-9/3,7 \approx -2,43$. Bieguny: $-2,1 \pm j 2,14$, czyli część rzeczywista $-2,1$. Zero leży mniej więcej tak daleko od osi jak bieguny, więc mocno wpływa na odpowiedź i przeregulowanie rośnie z 4,6% do ok. 16-17% ✓.
3. $U = \frac{K_i}{s}(R - V) - K_p V$. Z $V = PU$: $V(ms + b + K_p + \frac{K_i}{s}) = \frac{K_i}{s}R$, czyli $T = \frac{K_i}{ms^2 + (b+K_p)s + K_i}$. Ten sam mianownik, ale w liczniku tylko stała: zera nie ma, bo wartość zadana nie przechodzi przez człon P.

Zadania • część 5

1. Typ 0: skok $\frac{1}{1+g} = 0,1$; rampa: $K_v = 0$, uchyb rośnie bez końca.
2. Typ 1. $K_v = \lim s \cdot \frac{4}{s(s+2)} = 2$, uchyb $\frac{1}{2}$.

3. $\frac{Z}{F} = \frac{P}{1+CP} = \frac{1}{s(ms+b)+K}$; dla $s \rightarrow 0$: $\frac{1}{K}$, czyli uchyb F/K , jak w lekcji 1.1. Całkowanie w obiekcie leży za miejscem, gdzie wchodzi siła, więc z punktu widzenia zakłócenia pętla nie ma całki. Na zakłócenie działa tylko całkowanie leżące między miejscem jego wejścia a uchybem, czyli w regulatorze.
4. Twierdzenie wymaga stabilnej pętli. Np. $L = \frac{10}{(s+1)^3}$ z wzmocnieniem $K = 10$: wzór daje $\frac{1}{11}$, ale pętla jest niestabilna (warunek Routha dla $(s+1)^3 + K$: $K < 8$; lekcja 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe) i uchyb rośnie bez końca.

Zadania do przemyślenia

1. 1. Pochodna e^{st} to ta sama funkcja razy stała. Każde równanie liniowe o stałych współczynnikach zamienia więc e^{st} w e^{st} razy liczbę: kształt się nie zmienia (to funkcja własna różniczkowania).
2. Pochodna t^2 to $2t$, inny kształt. Człon inercyjny odpowie na t^2 kombinacją t^2 , t , 1 i $e^{-t/\tau}$: kształt się zmienia, więc nie da się opisać tego jedną liczbą.
2. 1. Dla dużego $|s|$: $L \rightarrow 0$, więc $S \rightarrow 1$: szybkie zakłócenie wyjściowe przechodzi bez osłabienia, pętla nie zdąży zareagować.
2. $PS \approx P \rightarrow 0$: szybkie zakłócenie na wejściu obiektu jest wygładzane przez sam obiekt. Takie łatwiej znieść, nawet bez pętli. Podmuch działa na drona jak siła, więc szybkie podmuchy obiekt wygładza sam, a pętla zajmuje się wolnymi.
3. 1. $Y = P(FR + CR - CY)$, więc $\frac{Y}{R} = \frac{P(F+C)}{1+PC}$.
2. Dla $F = 1/P$: $\frac{P(1/P+C)}{1+PC} = 1$. Podpowiedź z modelu to odwrotność obiektu (lekcja 1.1, Goodwin 2.5), a pętla poprawia tylko błąd tej odwrotności. W praktyce $1/P$ trzeba przybliżyć, bo czysta odwrotność wymagałaby różniczkowania (sprzężenie w przód, lekcja 3.3 Nieliniowa rzeczywistość: nasycenie, windup, feedforward i gain scheduling).
4. 1. Regulator $\frac{k}{s}$ (całkowanie nastawy), obiekt $e^{-\theta s}$: $L = \frac{k e^{-\theta s}}{s}$.
2. Typ 1: stała temperatura zadana jest osiągnięta bez uchybu, jeśli pętla jest stabilna. Warunek $k\theta < \pi/2$ wyprowadzimy z $L(j\omega)$ w lekcji 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie.
5. 1. Czujnik to blok $H = H_1 + H_2$ w torze sprzężenia (połączenie równoległe).
2. Potrzeba $H(0) = H_1(0) + H_2(0) = 1$. Dobór H_1 przepuszczającego szybkie zmiany i H_2 przepuszczającego wolne, z $H_1 + H_2 = 1$ dla każdego s , to filtr komplementarny (lekcja 4.5 Rozszerzony filtr Kalmana i fuzja czujników w jednej osi).

Automatyka · Lekcja 2.1: Schematy blokowe i transmitancja pętli · Źródła: B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rev. 1.6 (2019), rozdz. 2–3; G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 4–5; H. Nyquist, *Regeneration Theory*, Bell System Technical Journal 11 (1932). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c2_1.py).