

Jak reagują układy: człony podstawowe i odpowiedź skokowa

Zanim zaprojektujesz regulator, musisz wiedzieć, jak obiekt reaguje. Najprostszy test: zmienić wejście skokowo i patrzeć, co robi wyjście. Z jednej takiej krzywej odczytasz, czy obiekt jest szybki czy powolny, czy przelatuje przez cel, czy reaguje z opóźnieniem i ile razy wzmacnia sygnał. Ta lekcja przedstawia pięć podstawowych „charakterów” obiektów, uczy odczytywać ich parametry z wykresu i opisywać wymagania wobec pętli liczbami.

CZAS

ok. 3 h teorii + ok.
3,5 h zadań

ZADANIA

19 zadań w treści
+ 6 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

J. Kowal,
*Podstawy
automatyki*, t. 1,
rozdz. 4; B.
Douglas, *The
Fundamentals of
Control Theory*,
rozdz. 1.2; G. C.
Goodwin i in.,
*Control System
Design*, rozdz. 4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: jeden test, tysiące pętli
- 1 Odpowiedź skokowa
- 2 Człony podstawowe
- 3 Wskaźniki jakości i korytarz wymagań
- 4 Identyfikacja: model z wykresu
- 5 Dron rozłożony na człony
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: jeden test, tysiące pętli

W 1942 r. dwaj inżynierowie z firmy Taylor Instruments, John Ziegler i Nathaniel Nichols, opublikowali artykuł o nastawach regulatorów przemysłowych. Fabryki miały wtedy tysiące pętli regulacji: temperatury pieców, ciśnienia w kotłach, przepływu w rurociągach. Nikt nie miał ich modeli matematycznych, a strojenie każdej pętli „na wyczucie” trwało godzinami. Ziegler i Nichols zaproponowali coś prostego: zmień skokowo sterowanie, zapisz, jak zmienia się wyjście, odczytaj z wykresu kilka liczb i wstaw je do tabelki. Ich reguły są używane do dziś, a my wrócimy do nich w lekcji 3.2 Strojenie: model z testu, reguły nastaw i regulacja kaskadowa.

Ta lekcja dotyczy pierwszej połowy tego przepisu: jak z odpowiedzi na skok odczytać, z jakim obiektem mamy do czynienia. Okazuje się, że większość obiektów to kombinacje kilku podstawowych zachowań, a każde ma swój łatwy do rozpoznania podpis na wykresie.

Pytanie na start. Zwykły termometr lekarski trzeba trzymać pod pachą kilka minut. Termometr elektroniczny często piszczy już po kilkadziesiąt sekundach, choć jego czujnik też potrzebuje czasu, żeby się nagrzać. Jak to możliwe? Odpowiedź w części 4.

1

Odpowiedź skokowa

Odpowiedź skokowa to przebieg wyjścia $y(t)$, gdy obiekt spoczywa w równowadze, a w chwili $t = 0$ zmieniamy jego wejście skokowo o Δu i dalej trzymamy je stałe. Taki test łatwo wykonać: przestawić przepustnicę, włączyć grzałkę, zwiększyć ciąg. Z odpowiedzi od razu widać cztery rzeczy: *ile* (o ile zmieni się wyjście), *jak szybko*, *czy z przelotem przez cel* i *po jakim czasie coś w ogóle drgnie*. Douglas 1.2.1

Dla obiektów liniowych jedna odpowiedź skokowa wystarczy, żeby przewidzieć odpowiedź na dowolne wejście. Powód to zasada superpozycji (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”, lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne). Skok dwa razy większy daje dwa razy większą odpowiedź. Każdy przebieg wejścia można przybliżyć schodkami, czyli sumą przesuniętych w czasie skoków, a wyjście to suma odpowiedzi na te skoki. Dlatego w automatyce tak dużo mówi się o odpowiedzi skokowej: to pełny opis obiektu liniowego w jednym wykresie.

Dalej będziemy rysować odpowiedzi na skok jednostkowy, $\Delta u = 1$. Dla innego skoku wystarczy pomnożyć wykres przez Δu .

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 15 min

- 1 Odpowiedź obiektu liniowego na skok $\Delta u = 1$ ustala się na 3. Na co ustali się odpowiedź na skok $\Delta u = -0,5$?

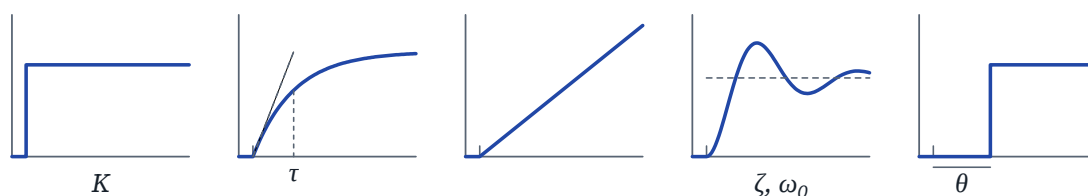
- 2 Wejście włączamy w $t = 0$ (skok o 1) i wyłączamy w $t = 5$ s (skok o -1). Jak zbudować odpowiedź z odpowiedzi skokowej $h(t)$?

- 3 Dlaczego test skokowy nie wystarcza dla obiektu nieliniowego, np. zaworu, który przy małym otwarciu prawie nie przepuszcza wody, a przy dużym przepuszcza dużo?

▣▣ podstawowe ▣▣ średnie ▣▣ feynmanowskie

2 Człony podstawowe

W polskiej tradycji (np. Kowal) obiekty opisuje się jako połączenia kilku **członów podstawowych**. Każdy ma swoje równanie i swój charakterystyczny kształt odpowiedzi skokowej.



Odpowiedzi skokowe pięciu członów podstawowych, od lewej: proporcjonalny, inercyjny I rzędu, całkujący, oscylacyjny II rzędu i opóźniający. Pionowa kreska przy osi czasu oznacza chwilę skoku wejścia.

2.1 Człon proporcjonalny

$y = Ku$. Wyjście natychmiast i dokładnie podąża za wejściem, przemnożone przez **wzmocnienie** K . Dźwignia, przekładnia zębata, dzielnik napięcia. Czysty człon proporcjonalny to idealizacja: każde prawdziwe urządzenie potrzebuje choć trochę czasu. Opisujemy tak elementy, które są dużo szybsze od reszty pętli.

2.2 Człon inercyjny I rzędu

Obiekt, który ma jeden „magazyn” (ciepła, ładunku, pędu) i wyrównuje się z otoczeniem tym szybciej, im dalej jest od równowagi. Tak nagrzewa się pokój, ładuje kondensator przez opornik, a samochód przyspiesza do prędkości maksymalnej.

🔧 PRAWO · CZŁON INERCYJNY I RZĘDU

$$\tau \dot{y} + y = Ku \Rightarrow y(t) = K\Delta u (1 - e^{-t/\tau}) \quad (\text{skok w } t = 0).$$

Stała czasowa τ mówi, jak szybko. Po czasie τ wyjście przebywa 63% drogi, po 3τ 95%, po 4τ 98%. Styczna do wykresu w $t = 0$ dochodzi do wartości ustalonej dokładnie po τ .

Rozwiązanie znasz z lekcji 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne (równanie liniowe pierwszego rzędu). Własność stycznej: $\dot{y}(0) = K\Delta u/\tau$, więc gdyby wyjście rosło cały czas tak szybko jak na starcie, doszłoby do celu po czasie τ . Naprawdę zwalnia, bo „siła napędowa” $K\Delta u - y$ maleje, im bliżej celu. Stąd liczby, które warto pamiętać: **63% po τ i 98% po 4τ** . Czas narastania od 10% do 90% wartości ustalonej wynosi $\tau \ln 9 \approx 2,2\tau$.

2.3 Człon całkujący

$\dot{y} = Ku/\tau$ (stała τ ustala tylko jednostki). Stałe wejście daje wyjście rosnące liniowo, bez końca. Wysokość drona przy nadmiarze ciągu, poziom w zbiorniku bez odpływu, kąt obrotu wału przy stałej prędkości. Obiekt całkujący nie ma wartości ustalonej odpowiedzi skokowej, dlatego (jak w lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta) nie wybacza błędów sterowania w pętli otwartej.

2.4 Człon oscylacyjny II rzędu

Dwa magazyny energii, które przelewają ją między sobą (masa i sprężyna, cewka i kondensator), plus tłumienie. To oscylator z działu 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”, zapisany w postaci, której używa się w automatyce:

🔧 PRAWO · CZŁON OSCYLACYJNY II RZĘDU

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u, \quad \zeta = \frac{\gamma}{2\omega_0} = \frac{1}{2Q}.$$

Dla $\zeta < 1$ odpowiedź skokowa przelatuje przez wartość ustaloną i drga z częstością $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ pod obwiednią $e^{-\zeta\omega_0 t}$. **Przeregulowanie** zależy tylko od ζ :

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_0} \quad (\pm 2\%).$$

Współczynnik tłumienia ζ (dzeta) to inny zapis dobroci Q z fizyki. Skąd wzór na przeregulowanie? Wychylenie od wartości ustalonej zachowuje się jak drgania gasnące: $y - K = -Ke^{-\zeta\omega_0 t}(\cos \omega_d t + \dots)$. Pierwsze maksimum wypada po pół okresie drgań, w $t_p = \pi/\omega_d$, a

obwiednia zmalała do tego czasu o czynnik $e^{-\zeta\omega_0\pi/\omega_d}$. To jest właśnie M_p . Czas ustalania wynika z obwiedni: $e^{-\zeta\omega_0 t} = 0,02$ daje $t = \ln 50/(\zeta\omega_0) \approx 3,9/(\zeta\omega_0)$.

Przeregulowanie członu oscylacyjnego w zależności od ζ									
ζ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1
M_p	73%	53%	37%	25%	16%	9,5%	4,6%	1,5%	0

Dwie liczby warto zapamiętać. Przy $\zeta \approx 0,7$ przeregulowanie jest małe (ok. 5%), a odpowiedź wciąż szybka: to częsty cel projektowy. Przy $\zeta \geq 1$ drgań nie ma wcale. Taki obiekt to już **człon inercyjny II rzędu**: dwa człony inercyjne w szeregu. Jego odpowiedź startuje płasko, z zerowym nachyleniem, bo pierwszy magazyn musi się trochę napełnić, zanim drugi w ogóle zacznie.

2.5 Człon opóźniający

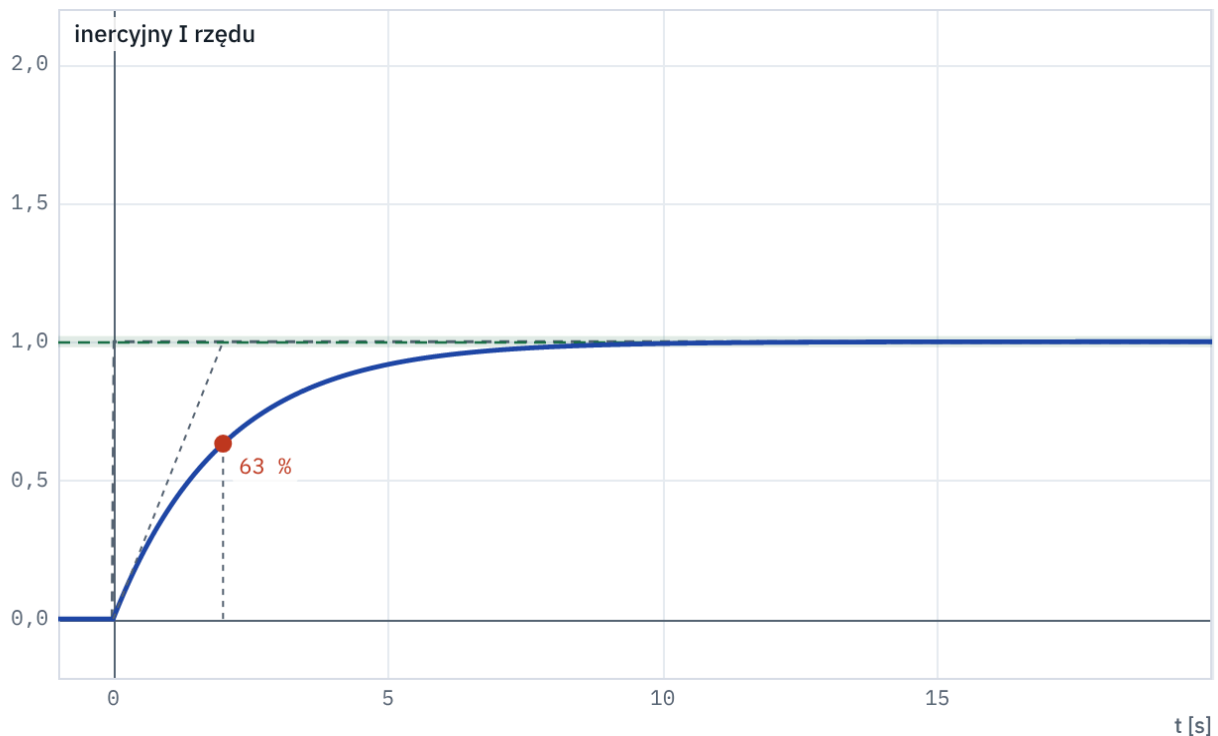
$y(t) = Ku(t - \theta)$. Wyjście to wejście, ale później. Przez czas θ (**opóźnienie transportowe**, ang. *dead time*) nic się nie dzieje. Woda płynąca rurą (prysznic z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta), taśmociąg, sygnał z łazika marsjańskiego, czas obliczeń w komputerze sterującym. Opóźnienie różni się od inercji: obiekt inercyjny reaguje od razu, tylko powoli, a opóźniający przez chwilę wcale.

2.6 Inercyjny z opóźnieniem

Połączenie członu inercyjnego i opóźnienia ma osobną nazwę, bo jest koniem roboczym automatyki przemysłowej. Po angielsku to FOPDT (*first order plus dead time*). Opisują go trzy liczby: K , τ i θ . Wiele obiektów złożonych z kilku inercji, np. piec, wymiennik ciepła czy kolumna destylacyjna, ma odpowiedź skokową w kształcie litery S. Da się ją dobrze przybliżyć członem inercyjnym z opóźnieniem. Wtedy powolny początek „S” pełni rolę opóźnienia.

SYMULACJA 1

Odpowiedzi skokowe członów podstawowych. Wybierz człon i zmieniaj jego parametry. Zielony pas to wartość ustalona $\pm 2\%$. Dla członów inercyjnych zaznaczono styczną w chwili startu i punkt 63%. Sprawdź, że przeregulowanie członu oscylacyjnego nie zależy od ω_0 , a czas ustalania zależy od iloczynu $\zeta\omega_0$.



— skok wejścia u (wysokość 1) — odpowiedź $y(t)$ — wartość ustalona i pasmo $\pm 2\%$

czas narastania 10–90 % 4,40 s

przeregulowanie 0,0 %

czas ustalania $\pm 2\%$ 7,82 s

$2,2\tau$ (narastanie) 4,40 s

4τ (ustalanie) 8,00 s

Człon inercyjny startuje od razu, z nachyleniem K/τ , ale zwalnia, im bliżej celu. Po czasie τ jest na 63 % drogi, po 3τ na 95 %, po 4τ na 98 %. Styczna w $t = 0$ dochodzi do wartości ustalonej dokładnie po τ .

Stan na rysunku: człon inercyjny I rzędu, $K = 1,00$, $\tau = 2,00$ s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

5 zadań · ok. 40 min

1 Kondensator $100 \mu\text{F}$ ładuje się przez opornik $10 \text{ k}\Omega$ ze źródła 5 V. Jaka jest stała czasowa? Po jakim czasie napięcie przekroczy 4,9 V?

2 Sprawdź, że $y = K(1 - e^{-t/\tau})$ spełnia $\tau\dot{y} + y = K$ i $y(0) = 0$. Policz $\dot{y}(0)$.

- 3 Zawieszenie samochodu ma $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ i $\zeta = 0,3$. Oblicz przeregulowanie, czas pierwszego maksimum i przybliżony czas ustalania.
-
- 4 Wahadło ma dobroć $Q = 50$. Jakie jest jego ζ i przeregulowanie w odpowiedzi na skok (np. nagłe przesunięcie punktu zawieszenia)?
-
- 5 W symulacji 1 wybierz człon oscylacyjny i ustaw $\zeta = 1,5$. Porównaj początek odpowiedzi z członem inercyjnym I rzędu. Dlaczego jeden startuje płasko, a drugi z nachyleniem?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

3 Wskaźniki jakości i korytarz wymagań

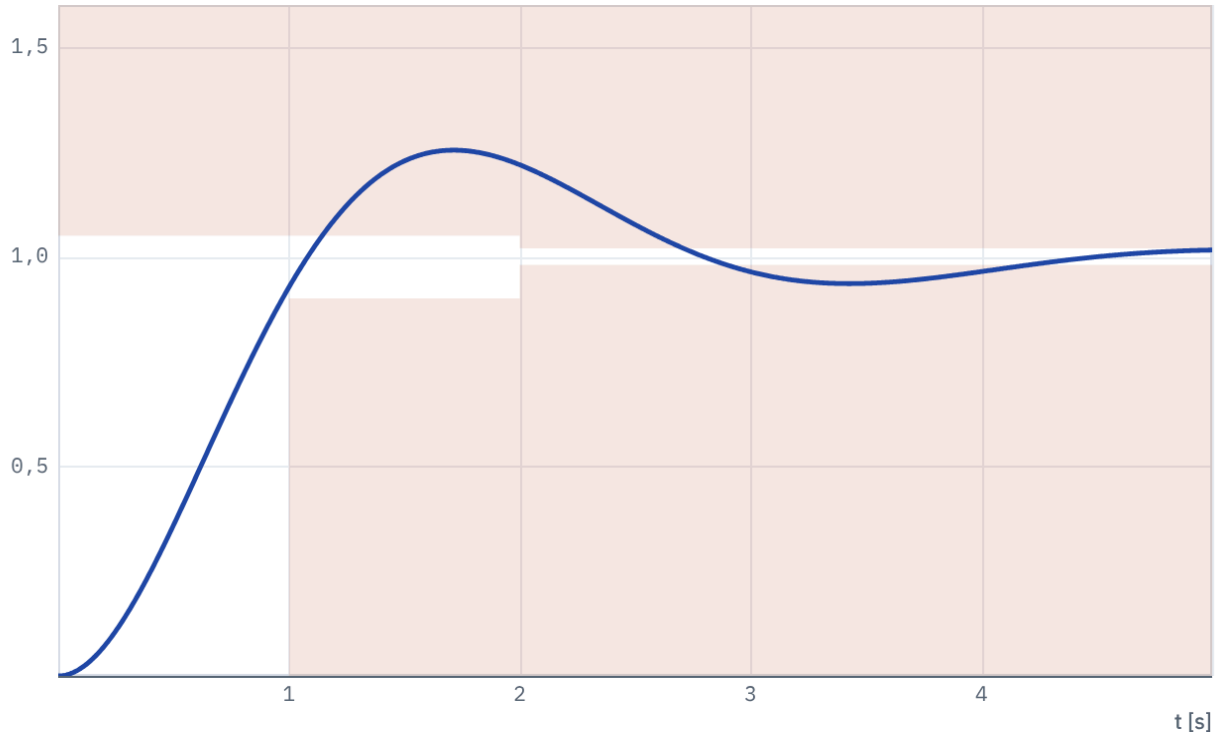
Żeby powiedzieć, czy pętla regulacji działa dobrze, trzeba to umieć zmierzyć. Wymagania zapisuje się zwykle przez kilka liczb odczytanych z odpowiedzi na skok wartości zadanej:

- **czas narastania** t_r : od 10% do 90% wartości ustalonej (szybkość),
- **przeregulowanie** M_p : o ile procent wyjście przekracza wartość ustaloną (spokój),
- **czas ustalania** t_s : od kiedy wyjście zostaje w paśmie $\pm 2\%$ (albo $\pm 5\%$) wokół wartości ustalonej,
- **uchyb ustalony** e_∞ : różnica między wartością zadaną a ustaloną (dokładność).

Razem wyznaczają **korytarz wymagań**: obszar na wykresie, z którego odpowiedź nie może wyjść. Dla członu oscylacyjnego tłumaczenie wymagań na parametry jest proste, bo każdy wskaźnik zależy od innej kombinacji. Przeregulowanie ustala ζ . Tempo gaśnięcia ustala $\zeta\omega_0$. Szybkość narastania ustala głównie ω_0 . W lekcji 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe zobaczysz, że ζ i $\zeta\omega_0$ to kąt i odległość pewnych punktów na płaszczyźnie zespolonej, ale już teraz da się nimi projektować.

SYMULACJA 2

Korytarz wymagań: przeregulowanie najwyżej 5%, 90% wartości ustalonej przed 1 s, ustalenie w paśmie $\pm 2\%$ przed 2 s. Zacięzione obszary są zabronione. Dobierz ζ i ω_0 tak, żeby odpowiedź skokowa członu oscylacyjnego zmieściła się w korytarzu. Spróbuj też $\zeta = 1$: jakie ω_0 jest wtedy potrzebne?



— odpowiedź skokowa — obszar zabroniony

przeregulowanie 25,4 % ✗

czas ustalania $\pm 2\%$ 4,20 s ✗

90 % wartości po 0,97 s ✓

$\zeta\omega_0$ 0,80 1/s

Za małe tłumienie: przeregulowanie zależy tylko od ζ , a 5 % wymaga $\zeta \geq 0,69$. Zwiększ ζ .

Stan na rysunku: $\zeta = 0,40$, $\omega_0 = 2,00$ rad/s; wymagania: przeregulowanie $\leq 5\%$, 90 % przed 1 s, ustalenie $\pm 2\%$ przed 2 s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

4 zadania · ok. 30 min

1 Odwróć wzór na przeregulowanie: pokaż, że $\zeta = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}}$. Jakie ζ daje przeregulowanie 10%?

2 Ramię robota ma $\zeta = 0,5$ i $\omega_0 = 4$ rad/s. Czy spełnia wymaganie „przeregulowanie poniżej 20%, ustalenie w 2 s”?

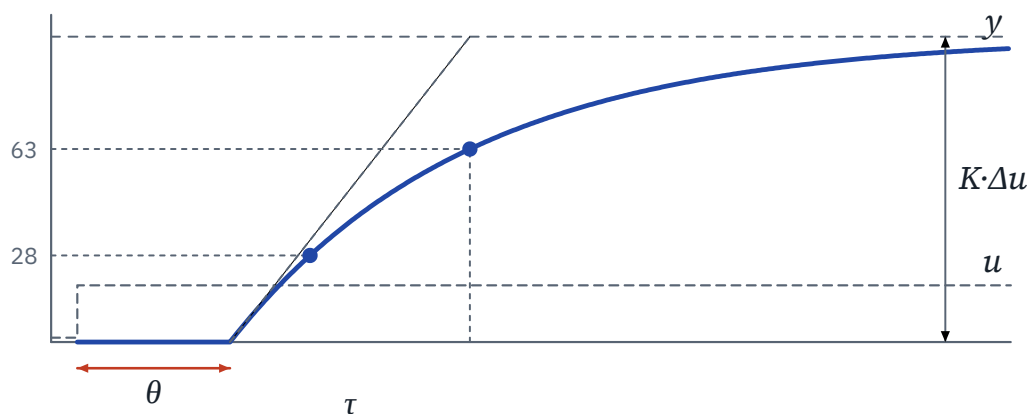
- 3 Wymagania: przeregulowanie $\leq 5\%$, czas ustalania $\pm 2\% \leq 2$ s. Wyznacz najmniejsze ζ i, przy $\zeta = 0,7$, najmniejsze ω_0 z przybliżonego wzoru. Sprawdź wynik w symulacji 2.
- 4 W symulacji 2 ustaw $\zeta = 1$. Jakie najmniejsze ω_0 mieści odpowiedź w korytarzu?
Porównaj z $\zeta = 0,7$. Które wymaganie jest przy $\zeta = 1$ „wąskim gardłem”?

▣ podstawowe ▤ średnie ▥ feynmanowskie

4 Identyfikacja: model z wykresu

Douglas nazywa to **problemem identyfikacji**: znamy wejście i wyjście, szukamy obiektu.

Douglas 1.2.1 Dla członu inercyjnego z opóźnieniem wystarczy jeden test skokowy i trzy odczyty.



Odczyt parametrów członu inercyjnego z opóźnieniem z odpowiedzi na skok wejścia u . Wzmocnienie K to zmiana wyjścia podzielona przez zmianę wejścia. Opóźnienie θ to czas do pierwszej reakcji. Stała czasowa τ to czas od końca opóźnienia do osiągnięcia 63% zmiany. Punkty 28% i 63% służą metodzie dwóch punktów.

🔧 METODA · PARAMETRY K , T , θ Z ODPOWIEDZI SKOKOWEJ

Wzmocnienie: $K = \Delta y_{\infty} / \Delta u$ (zmiana wartości ustalonej przez zmianę wejścia).

Metoda dwóch punktów: odczytaj chwile t_{28} i t_{63} , w których wyjście przebyło 28,3% i 63,2% swojej zmiany. Wtedy

$$\tau = 1,5 (t_{63} - t_{28}), \quad \theta = t_{63} - \tau.$$

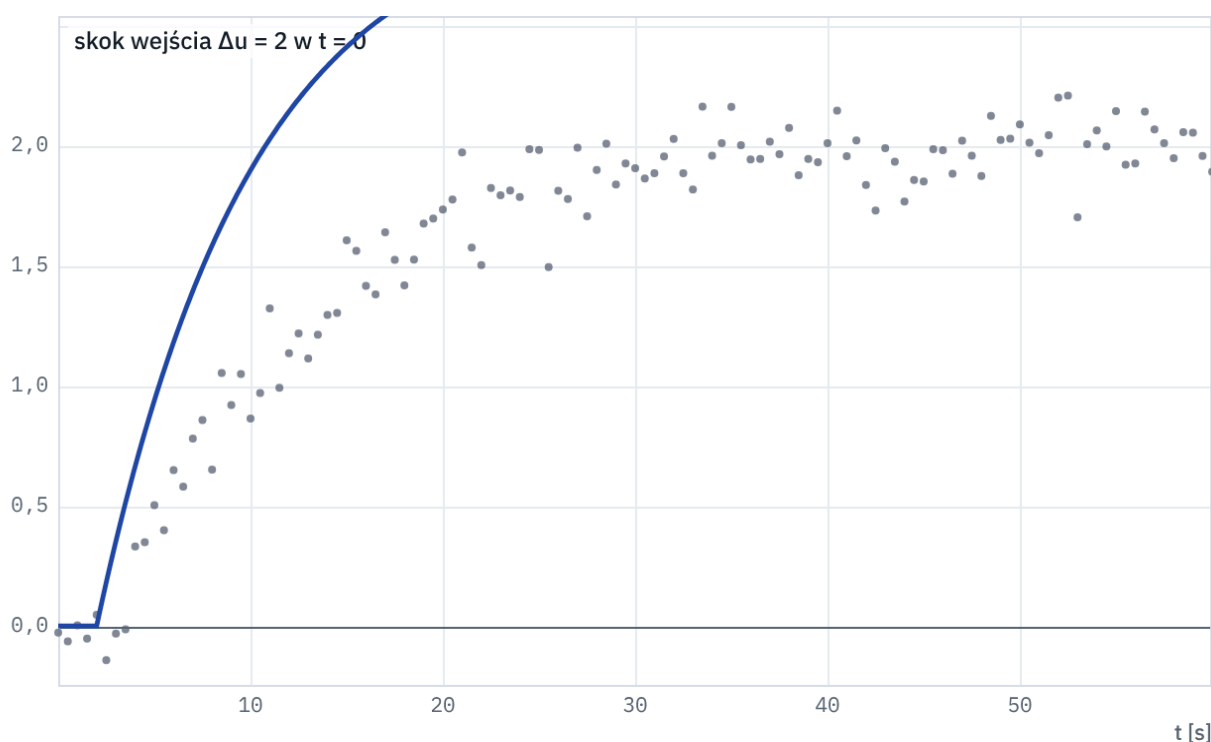
Skąd te liczby? Dla członu inercyjnego z opóźnieniem 63,2% to $1 - e^{-1}$, czyli chwila $\theta + \tau$. 28,3% to $1 - e^{-1/3}$, czyli chwila $\theta + \tau/3$. Różnica tych chwil to $\frac{2}{3}\tau$, stąd mnożnik 1,5. Dwa punkty ze środkowej części krzywej są pewniejsze niż odczyt początku reakcji, który zwykle tonie w

szumie. Odczyt „z linijką” można też zastąpić dopasowaniem metodą najmniejszych kwadratów (lekcja 5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania): szukamy takich K , τ , θ , przy których suma kwadratów różnic między modelem a pomiarami jest najmniejsza.

Dla członu oscylacyjnego odczytujemy przeregulowanie i okres drgań T_d . Z przeregulowania wzór z zadania 3.1 daje ζ , a z okresu $\omega_d = 2\pi/T_d$, czyli $\omega_0 = \omega_d/\sqrt{1-\zeta^2}$.

Teraz odpowiedź na pytanie z prologu. Termometr elektroniczny nie czeka, aż jego czujnik dojdzie do temperatury ciała. Mierzy pierwsze kilkadziesiąt sekund krzywej nagrzewania, dopasowuje do niej model (w najprostszej wersji człon inercyjny) i *wylicza*, na czym ustaliłaby się temperatura. Wiele termometrów tak działa (tzw. tryb predykcyjny). To identyfikacja w czasie rzeczywistym, a ceną jest gorsza dokładność, gdy termometr źle przylega.

SYMULACJA 3 Czarna skrzynka. Kropki to zaszumiony pomiar wyjścia nieznanego obiektu po skoku wejścia o 2 w chwili 0. Odczytaj K , θ i τ z wykresu, ustaw je suwakami i obserwuj błąd średniokwadratowy (RMS). Potem porównaj z dopasowaniem metodą najmniejszych kwadratów i z prawdziwymi wartościami. „Nowy obiekt” losuje inną skrzynkę.



— pomiar (z szumem) — twój model — — — dopasowanie najmniejszych kwadratów

RMS błędu twojego modelu 0,946

Odczytaj z wykresu: $K = (\text{wartość ustalona}) / \Delta u$, θ = kiedy wyjście rusza, τ = czas od końca opóźnienia do 63 % wartości ustalonej. Potem dopasuj suwakami tak, by RMS było jak najmniejsze. Szum to ok. 6 % wartości ustalonej, więc RMS nie spadnie dużo poniżej tej wartości.

Stan na rysunku: twój model $K = 1,50$, $\tau = 8,0$ s, $\theta = 2,0$ s; RMS = 0,946.

- 1 Grzałkę włączono skokowo z 0 na 500 W. Temperatura wzrosła z 20 °C i ustaliła się na 70 °C. Jakie jest wzmocnienie obiektu (z jednostką)?
- 2 Sprawdź, że $1 - e^{-1/3} \approx 0,283$ i $1 - e^{-1} \approx 0,632$. W których chwilach członu inercyjnego z opóźnieniem wypadają te poziomy?
- 3 Przy skoku wejścia o 2 wyjście ustala się na 5,0; 28,3% zmiany osiąga po 7 s, a 63,2% po 13 s. Wyznacz K , τ i θ .
- 4 Odpowiedź skokowa ma przeregulowanie 25%, a kolejne maksima są oddalone o 2 s. Wyznacz ζ i ω_0 .

□□ podstawowe ▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

5 Dron rozłożony na człony

Wróćmy do drona z lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta. Jego pion składa się z kilku członów połączonych szeregowo. Dla każdego przyjmujemy prosty model z liczbami, które będą nam służyć w całym kursie.

1. **Silniki: polecenie** → **ciąg**. Śmigło musi się rozpędzić, więc ciąg dochodzi do zadanego jak w członie inercyjnym. Przyjmujemy $\tau_m = 0,05$ s. Jest to dużo szybciej niż reszta, więc często traktujemy silniki jak człon proporcjonalny.
2. **Ciąg** → **prędkość pionowa**. Wokół zawisu, z $\Delta T = T - mg$, równanie $m\dot{v} = \Delta T - bv$ to $\frac{m}{b}\dot{v} + v = \frac{1}{b}\Delta T$: człon inercyjny o $K = 1/b = 2$ (m/s)/N i $\tau = m/b = 2$ s (dla $m = 1$ kg, $b = 0,5$ N·s/m).
3. **Prędkość** → **wysokość**. $\dot{z} = v$: człon całkujący.
4. **Barometr**. Mierzy wysokość z szumem i z pewnym opóźnieniem filtrowania. Na razie zaniedbujemy opóźnienie, szumem zajmiemy się w lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli.

Skok ciągu o 1 N daje więc prędkość wznoszenia rosnącą do 2 m/s ze stałą czasową 2 s, a wysokość rosnącą bez końca. Po 10 s dron jest ok. 16 m wyżej.

A dron z regulatorem P z lekcji 1.1? Jego równanie $m\ddot{z} + b\dot{z} + Kz = \dots$ to człon oscylacyjny z $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ i $2\zeta\omega_0 = b/m$. Wynika stąd coś ważnego: **tempo gaśnięcia** $\zeta\omega_0 = b/(2m)$ w ogóle nie zależy od K . Większe wzmocnienie przyspiesza kołysanie i zmniejsza uchyb, ale gaśnie ono tak samo wolno: przy $m = 1,1$ kg czas ustalania to ok. $4/0,227 \approx 18$ s, niezależnie od K . Regulator, który patrzy tylko na położenie, nie potrafi dodać tłumienia. Do tego potrzebny jest pomiar prędkości:

człon D (lekcja 3.1 Regulator PID: działanie P, I, D i uchyb ustalony) albo osobna pętla prędkości (lekcja 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Dron o masie 1 kg ($b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$) dostaje skok ciągu o 0,5 N. Jaka będzie ustalona prędkość wznoszenia? Jaka po 2 s?

- 2 Pokaż, że dla drona z regulatorem P $\zeta = b/(2\sqrt{Km})$, a $\zeta\omega_0 = b/(2m)$. Co się dzieje z przeregulowaniem, gdy K rośnie (dla $m = 1,1 \text{ kg}$)?

- 3 Dlaczego silniki o $\tau_m = 0,05 \text{ s}$ można przy projektowaniu pętli wysokości pominąć, a przy projektowaniu pętli stabilizacji kąta pochylenia drona (która musi działać w setnych sekundy) już nie?


 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: ROZPOZNAJ OBIEKT PO ODPOWIEDZI SKOKOWEJ

1. Czy jest wartość ustalona? Nie: w obiekcie jest całkowanie. Tak: $K = \Delta y_{\infty} / \Delta u$.
2. Czy coś dzieje się od razu? Nie: jest opóźnienie (albo kilka inercji, kształt S).
3. Start płaski czy stromy? Stromy: człon I rzędu. Płaski: II rzędu lub więcej.
4. Czy jest przeregulowanie? Tak: człon oscylacyjny; ζ z M_p , ω_0 z okresu.
5. Parametry: τ z punktu 63% albo metodą dwóch punktów; najlepiej dopasowanie najmniejszymi kwadratami.
6. Sprawdzenie: nałóż model na pomiar; reszty powinny wyglądać jak szum, bez wyraźnego kształtu.

Przykład 6.1

Termometr w wodzie

Termometr o temperaturze 20 °C wkładamy do wody o temperaturze 80 °C. Po 12 s pokazuje 57,9 °C. Jaka jest jego stała czasowa? Po jakim czasie pomyli się o mniej niż 0,5 °C?

- 1 Zmiana: 60 °C. Po 12 s przebył $37,9/60 = 0,632$ drogi, więc $\tau = 12$ s.
- 2 Błąd maleje jak $60 e^{-t/12}$. Warunek $60 e^{-t/12} < 0,5$ daje $t > 12 \ln 120 \approx 57$ s.

Wynik: $\tau = 12$ s; wiarygodny odczyt po ok. minucie.

Sprawdzenie: 57 s to ok. $4,8\tau$; po 4τ błąd to 2% z 60 °C, czyli 1,1 °C, więc trzeba trochę dłużej ✓.

Przykład 6.2

Piec bez modelu

Moc pieca zwiększono skokowo o 2 kW. Temperatura wzrosła z 20 °C do 80 °C. Zapis pokazuje 37,0 °C po 9 min i 57,9 °C po 15 min. Wyznacz model inercyjny z opóźnieniem.

- 1 $K = 60/2 = 30 \text{ °C/kW}$.
- 2 37,0 °C to 28,3% zmiany, 57,9 °C to 63,2%: $t_{28} = 9 \text{ min}$, $t_{63} = 15 \text{ min}$.
- 3 $\tau = 1,5 \cdot (15 - 9) = 9 \text{ min}$, $\theta = 15 - 9 = 6 \text{ min}$.

Wynik: $K = 30 \text{ °C/kW}$, $\tau = 9 \text{ min}$, $\theta = 6 \text{ min}$.

Sprawdzenie: model w 9 min: $1 - e^{-(9-6)/9} = 0,283 \checkmark$, w 15 min: $1 - e^{-1} = 0,632 \checkmark$.
Stosunek $\theta/\tau \approx 0,67$ jest duży: ten piec będzie trudny do szybkiej regulacji, jak prysznic z długą rurą.

Przykład 6.3

Dron z regulatorem P jeszcze raz

Dron ($m = 1,1 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$) z regulatorem wysokości P o $K = 4 \text{ N/m}$. Oblicz ω_0 , ζ , przeregulowanie, czas pierwszego maksimum i czas ustalania. Co się zmieni przy $K = 20 \text{ N/m}$?

- 1 $\omega_0 = \sqrt{4/1,1} \approx 1,91 \text{ rad/s}$; $\zeta = 0,5/(2\sqrt{4,4}) \approx 0,12$.
- 2 $M_p \approx 69\%$; $\omega_d \approx 1,89 \text{ rad/s}$, $t_p = \pi/\omega_d \approx 1,7 \text{ s}$.
- 3 $\zeta\omega_0 = b/(2m) \approx 0,23 \text{ 1/s}$, $t_s \approx 4/0,23 \approx 18 \text{ s}$ (symulacja: 17 s).
- 4 Przy $K = 20 \text{ N/m}$: $\zeta \approx 0,053$, $M_p \approx 85\%$, a t_s bez zmian.

Wynik: regulator P daje drona, który kołysze się prawie 20 s, a większe K tylko pogarsza przeregulowanie.

Sprawdzenie: zgadza się z symulacją 3 w lekcji 1.1 Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta (okres ok. 3,3 s, przelot o ok. 70%) $\checkmark$.

Przykład 6.4

Od wymagań do parametrów

Pętla ma się zachowywać jak człon oscylacyjny: przeregulowanie $\leq 5\%$ i czas ustalania ($\pm 2\%$) ≤ 2 s. Wyznacz ζ i najmniejsze ω_0 .

- 1 $M_p \leq 0,05 \Rightarrow \zeta \geq 0,69$. Bierzemy $\zeta = 0,7$.
- 2 Przybliżenie: $4/(\zeta\omega_0) \leq 2 \Rightarrow \omega_0 \geq 2,86$ rad/s.
- 3 Symulacja przy $\omega_0 = 2,86$: $t_s \approx 2,09$ s, za długo. Przy $\zeta = 0,7$ dokładny czas ustalania to ok. $6,0/\omega_0$, więc $\omega_0 \geq 3,0$ rad/s.

Wynik: $\zeta = 0,7$, $\omega_0 \approx 3,0$ rad/s (z zapasem 3,2 rad/s).

Sprawdzenie: wzór $4/(\zeta\omega_0)$ wywodzi się z obwiedni i dobrze działa przy małym ζ . Przy $\zeta \approx 0,7$ drgania są tak słabe, że o czasie ustalania decyduje kształt pierwszego przelotu, a nie obwiednia. Zawsze sprawdzaj przybliżenia symulacją ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Stała czasowa to czas dojścia do celu.”

Po τ obiekt jest dopiero na 63% drogi. Do 98% potrzeba 4τ .

× „Większy skok daje inne przeregulowanie.”

W obiekcie liniowym przeregulowanie w procentach nie zależy od wielkości skoku. Jeśli zależy, obiekt jest nieliniowy, np. element wykonawczy się nasycy.

× „Opóźnienie i inercja to to samo.”

Obiekt inercyjny reaguje od razu, tylko powoli. Opóźniający przez czas θ nie reaguje wcale. Dla regulatora opóźnienie jest dużo gorsze.

× „Im większe tłumienie, tym szybciej.”

Szybsze gaśnięcie drgań owszem, ale zbyt duże ζ spowalnia start. Najszybsze wejście w pasmo $\pm 2\%$ daje $\zeta \approx 0,7-0,8$, a nie 1 ani więcej.

× „Większe wzmocnienie regulatora P szybciej wygasi kotłowanie.”

Dla obiektu bez własnej sztywności, jak dron w pionie, tempo gaśnięcia $\zeta\omega_0 = b/(2m)$ w ogóle nie zależy od K . Tłumienie musi przyjść z pomiaru prędkości.

× „Model z trzech liczb jest zbyt prosty, żeby był użyteczny.”

Model inercyjny z opóźnieniem nie opisuje obiektu dokładnie, ale wystarcza do strojenia większości regulatorów przemysłowych. Model ma być dokładny w tym, co ważne dla pętli.

8 Zadania do przemyslenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

6 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Dwa zbiorniki.** Woda z kranu wpływa do zbiornika 1, z niego swobodnie do zbiornika 2, a z niego do odpływu. Każdy zbiornik osobno to człon inercyjny o $\tau = 1$ min. Jak wygląda odpowiedź skokowa poziomu w zbiorniku 2 na skokowe odkręcenie kranu? Zaproponuj model inercyjny z opóźnieniem.
- 2 **Ile szumu wytrzyma odczyt.** Pomiar ma szum o odchyleniu 2% wartości ustalonej. Dlaczego odczyt opóźnienia θ z „pierwszej reakcji” jest wtedy bardzo niepewny, a odczyt t_{63} dużo pewniejszy?
- 3 **Skąd 4τ .** Dlaczego w praktyce uznaje się, że obiekt inercyjny „ustalił się” po 4τ – 5τ , choć matematycznie nigdy nie dochodzi do wartości ustalonej?
- 4 **Rezonans a przeregulowanie.** Obiekt ma przeregulowanie 53%. Co możesz powiedzieć o jego zachowaniu przy pobudzaniu sinusoidalnym (dział 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”)?
- 5 **Dron „przytłumiony”.** Ile musiałby wynosić współczynnik oporu b , żeby dron z regulatorem P ($K = 4$ N/m, $m = 1,1$ kg) miał $\zeta = 0,7$? Czy da się to osiągnąć konstrukcyjnie?

- 6 **Obiekt, który najpierw idzie w złą stronę.** Gdy w kotle parowym zwiększysz dopływ zimnej wody zasilającej, poziom wody w walczaku przez chwilę *spada* (zimna woda schładza mieszaninę i część pęcherzy pary się zapada), a dopiero potem rośnie, bo wody przybywa. Który z poznanych członów to opisuje? Dlaczego taki obiekt jest kłopotliwy dla regulatora?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Dlaczego jedna odpowiedź skokowa opisuje obiekt liniowy całkownie?**

Bo każde wejście to suma przesuniętych skoków, a odpowiedzi się sumują (superpozycja).

- 2 **Ile procent drogi przebywa człon inercyjny po τ , a ile po 4τ ?**

63% i 98%.

- 3 **Od czego zależy przeregulowanie członu oscylacyjnego?**

Tylko od ζ : $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$.

- 4 **Co ustala czas ustalania członu oscylacyjnego?**

Iloczyn $\zeta\omega_0$ (tempo obwiedni): $t_s \approx 4/(\zeta\omega_0)$.

- 5 **Jak rozpoznać na wykresie człon całkujący? A opóźnienie?**

Całkujący: brak wartości ustalonej, wyjście rośnie liniowo. Opóźnienie: przez pewien czas zupełnie brak reakcji.

- 6 **Jak wyznaczyć τ i θ metodą dwóch punktów?**

$\tau = 1,5(t_{63} - t_{28})$, $\theta = t_{63} - \tau$.

7 Dlaczego regulator P nie przyspieszy gaśnięcia kołysań drona?

Bo $\zeta\omega_0 = b/(2m)$ nie zależy od K ; tłumienie daje tylko opór albo człon zależny od prędkości.

8 Jakie ζ daje przeregulowanie ok. 5%?

$\zeta \approx 0,7$.

CZŁONY

proporcjonalny: $y = Ku$

inercyjny: $\tau \dot{y} + y = Ku$, $y = K\Delta u(1 - e^{-t/\tau})$

63% po τ , 95% po 3τ , 98% po 4τ ; $t_r \approx 2,2\tau$

całkujący: $\dot{y} = Ku/\tau$

opóźniający: $y(t) = Ku(t - \theta)$

dron: v inercyjny ($K = 1/b$, $\tau = m/b$), z

całkujący

II RZĄD I IDENTYFIKACJA

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u, \quad \zeta = 1/(2Q)$$

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad t_p = \pi/\omega_d, \quad t_s \approx 4/(\zeta\omega_0)$$

$$\zeta = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}}; \quad M_p = 5\% \Leftrightarrow \zeta \approx 0,69$$

$$K = \Delta y_\infty / \Delta u$$

$$\tau = 1,5(t_{63} - t_{28}), \quad \theta = t_{63} - \tau$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1, rozdz. 4 (człony podstawowe i ich charakterystyki, polska terminologia egzaminacyjna).
- **Dla chętnych:** B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rozdz. 1.2 (trzy problemy: identyfikacja, symulacja, sterowanie); G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 4 (odpowiedzi czasowe układów ciągłych).

Następna lekcja: **Regulator P i PI w pętli**. Znamy już charakter drona: prędkość to człon inercyjny, wysokość całkujący. Zamkniemy pętlę na prędkości, napiszemy regulator jako kilka linijek programu i zobaczymy, dlaczego dodanie pamięci uchybu, czyli całki, usuwa uchyb, którego regulator P pozbyć się nie umie.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Na $-1,5$; cały przebieg jest pomnożony przez $-0,5$.
2. $y(t) = h(t) - h(t - 5)$, gdzie $h(t) = 0$ dla $t < 0$. To superpozycja dwóch skoków, drugiego ujemnego i przesuniętego o 5 s.
3. Dla obiektu nieliniowego odpowiedź zależy od punktu pracy i od wielkości skoku: mały skok przy prawie zamkniętym zaworze da inną odpowiedź niż przy otwartym. Wtedy test skokowy opisuje tylko zachowanie w pobliżu danego punktu pracy, a testy trzeba powtarzać w kilku punktach. Wrócimy do tego przy harmonogramowaniu wzmacnień (lekcja 3.3 Nieliniowa rzeczywistość: nasycenie, windup, feedforward i gain scheduling).

Zadania · część 2

1. $\tau = RC = 1$ s. $5(1 - e^{-t}) = 4,9$ dla $t = \ln 50 \approx 3,9$ s (98%, czyli ok. 4τ).
2. $\dot{y} = (K/\tau)e^{-t/\tau}$; $\tau\dot{y} + y = Ke^{-t/\tau} + K - Ke^{-t/\tau} = K \checkmark$; $y(0) = 0 \checkmark$; $\dot{y}(0) = K/\tau$.
3. $M_p \approx 37\%$; $\omega_d = 10\sqrt{0,91} \approx 9,54$ rad/s, $t_p \approx 0,33$ s; $t_s \approx 4/3 \approx 1,3$ s.
4. $\zeta = 1/(2Q) = 0,01$; $M_p = e^{-\pi \cdot 0,01} \approx 0,97$: przelot o 97%. Słabo tłumiony oscylator prawie nie traci amplitudy w pół okresu.
5. Człon I rzędu: $\dot{y}(0) = K/\tau \neq 0$, bo wejście od razu wymusza zmianę jedyne magazynu. Człon II rzędu: równanie zawiera $\ddot{y}$, więc skok wejścia zmienia od razu dopiero przyspieszenie, a prędkość $\dot{y}$ zaczyna od zera. Ciało na sprężynie nie może skokowo zmienić prędkości.

Zadania · część 3

1. $\ln M_p = -\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$; podnosimy do kwadratu: $\ln^2 M_p(1-\zeta^2) = \pi^2\zeta^2$, stąd $\zeta^2 = \ln^2 M_p/(\pi^2 + \ln^2 M_p)$. Dla 10%: $\zeta \approx 0,59$.
2. $M_p \approx 16\% \checkmark$; $t_s \approx 4/(0,5 \cdot 4) = 2$ s, na granicy. Symulacja daje ok. 2,0 s, więc trzeba zapasu: lepiej $\omega_0 = 4,5$ rad/s.
3. $\zeta \geq 0,69$; $4/(0,7\omega_0) \leq 2$ daje $\omega_0 \geq 2,86$ rad/s. Symulacja pokazuje dla $\omega_0 = 2,86$ czas ustalania ok. 2,1 s: przybliżenie $4/(\zeta\omega_0)$ jest przy $\zeta = 0,7$ trochę za optymistyczne. Dokładnie trzeba $\omega_0 \approx 3,0$ rad/s (przykład 6.4).
4. Przy $\zeta = 1$ nie ma przeregulowania, ale start jest powolny: przy $\omega_0 = 3$ rad/s 90% wartości pojawia się dopiero po ok. 1,3 s. Wąskim gardłem jest więc wymagane narastanie: potrzeba $\omega_0 \gtrsim 3,9$ rad/s. Przy $\zeta = 0,7$ wystarcza ok. 3,0 rad/s (wtedy ogranicza czas ustalania). Lekkie niedotłumienie daje szybszy start za cenę kilku procent przelotu, więc ten sam korytarz osiąga się „wolniejszą” pętlą. Dlatego $\zeta \approx 0,7$ jest tak popularne.

Zadania · część 4

1. $K = 50/500 = 0,1$ °C/W.
2. $e^{-1/3} \approx 0,717$, $e^{-1} \approx 0,368 \checkmark$. Chwile: $\theta + \tau/3$ i $\theta + \tau$.

3. $K = 2,5$; $\tau = 1,5 \cdot 6 = 9$ s; $\theta = 13 - 9 = 4$ s.

4. $\zeta = -\ln 0,25 / \sqrt{\pi^2 + \ln^2 0,25} \approx 0,40$; $\omega_d = 2\pi/2 \approx 3,14$ rad/s, $\omega_0 = 3,14/\sqrt{1-0,16} \approx 3,43$ rad/s.

Zadania · część 5

1. $v_\infty = 0,5/0,5 = 1$ m/s; po $\tau = 2$ s: 0,63 m/s.

2. Porównujemy $\ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{K}{m}z$ z $\ddot{z} + 2\zeta\omega_0\dot{z} + \omega_0^2z$: $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, $2\zeta\omega_0 = b/m$, więc $\zeta = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{Km}}$.
Rosnące K zmniejsza ζ , więc przeregulowanie rośnie (69% przy 4 N/m, 79% przy 10 N/m).

3. Człon inercyjny jest „niewidoczny”, gdy reszta pętli zmienia się dużo wolniej niż w czasie τ . Pętla wysokości reaguje w sekundach, więc 0,05 s to prawie natychmiast. Pętla kąta działa w czasie porównywalnym z τ_m , więc inercja silników staje się w niej najważniejszym ograniczeniem, jak opóźnienie w przysznicu.

Zadania do przemyślenia

1. Dwa człony inercyjne w szeregu (zbiornik 2 nie oddziałuje na 1): $h_2 \propto 1 - e^{-t}(1+t)$ (czas w minutach). Start płaski, kształt S.
2. 28,3% przy $t \approx 1,05$ min, 63,2% przy $t \approx 2,15$ min. Metoda dwóch punktów: $\tau \approx 1,6$ min, $\theta \approx 0,5$ min. Powolny start drugiego zbiornika „udaje” opóźnienie.
1. Na początku odpowiedź rośnie od zera bardzo łagodnie (zwłaszcza przy kształcie S), więc przez dłuższy czas jest mniejsza niż szum. Moment „pierwszej reakcji” zależy od tego, kiedy przypadkiem szum się zsumuje.
2. W okolicy 63% krzywa jest stroma: błąd poziomu o 2% przesuwają odczyt czasu tylko o ok. 0,02/(nachylenie), czyli o ok. 5% τ . Dlatego metoda dwóch punktów korzysta ze środka krzywej.
1. Po 4τ brakuje 1,8%, po 5τ 0,7%: tyle, ile wynoszą zwykłe błędy pomiaru i niedokładności modelu.
2. Dalsze czekanie nie zmienia niczego mierzalnego. „Ustalenie” zawsze definiuje się względem tolerancji, np. $\pm 2\%$.
1. $M_p = 53\%$ oznacza $\zeta \approx 0,2$, czyli $Q = 1/(2\zeta) \approx 2,5$.
2. Przy pobudzaniu blisko ω_0 amplituda będzie ok. 2,5 razy większa niż statyczna (dokładnie maksimum $1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) \approx 2,55$). Duże przeregulowanie i wyraźny rezonans to dwa oblicza tego samego słabego tłumienia. Ten związek wykorzystamy w lekcji 2.3 Odpowiedź częstotliwościowa i charakterystyki Bodego.
1. $b = 2\zeta\sqrt{Km} = 1,4\sqrt{4,4} \approx 2,9$ N·s/m, prawie sześć razy więcej niż mamy.
2. Większy opór aerodynamiczny to większe zużycie energii i wolniejszy lot. Lepiej dodać „sztuczny opór” w regulatorze: siłę proporcjonalną do zmierzonej prędkości. Taki człon D działa jak tłumik, ale nie kosztuje energii w locie poziomym.
1. Żaden pojedynczy człon: to różnica dwóch zjawisk o różnych dynamikach (szybki spadek od zapadających się pęcherzy, całkowity wzrost od dopływu wody). Takie obiekty nazywa się nieminimalnofazowymi.
2. Regulator widzi na początku skutek odwrotny do zamierzonego i jeśli zareaguje na niego zbyt szybko, będzie działał w złą stronę. Takie obiekty wymuszają spokojniejszą regulację (lekcja 2.2 Bieguny i zera pętli zamkniętej, linie pierwiastkowe).

Automatyka · Lekcja 1.2: Jak reagują układy · Źródła: J. Kowal, *Podstawy automatyki*, t. 1 (AGH), rozdz. 4; B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rev. 1.6 (2019), rozdz. 1.2; G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 4. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c1_2.py).