

Po co sprzężenie zwrotne? Pętla otwarta i zamknięta

Każdy układ sterowania musi rozstrzygnąć jedno: skąd wie, co zrobić? Może to policzyć z modelu i wykonać na ślepo (pętla otwarta). Może też patrzeć na wynik i poprawiać to, co poszło nie tak (pętla zamknięta). Ta lekcja pokazuje, co daje patrzenie: odporność na błędy modelu i na zakłócenia. Pokazuje też, ile ono kosztuje: szum czujnika przechodzi na wyjście, a zbyt nerwowa pętla potrafi się rozkołysać. Wystarczą proste równania i trzy symulacje, bez żadnych transformat.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 3 h zadań

ZADANIA

20 zadań w treści
+ 6 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rozdz. 1; G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design*, rozdz. 2; K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 1

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: wzmacniacz, który oddał zysk
- 1 Elementy pętli
- 2 Pętla otwarta: sterowanie z modelu
- 3 Pętla zamknięta: patrz i poprawiaj
- 4 Cena sprzężenia: szum i niestabilność
- 5 Dron: pierwsza pętla
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: wzmacniacz, który oddał zysk

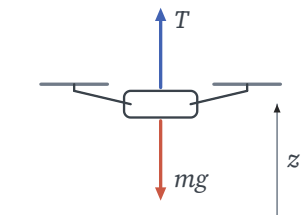
W latach 20. XX w. firma Bell budowała telefoniczne linie międzymiastowe. Sygnał słabł po drodze, więc co kilkadziesiąt kilometrów stał wzmacniacz na lampach elektronowych. Lampy miały wadę: ich wzmocnienie pływało o kilka do kilkunastu procent z temperaturą, napięciem zasilania i wiekiem. Przy kilkadziesiąciu wzmacniaczach w szeregu błędy się mnożyły, a rozmowa raz była za cicha, raz zniekształcona.

W 1927 r. inżynier Harold Black wpadł na pomysł, który w pierwszej chwili wygląda jak marnotrawstwo. Zbudował wzmacniacz o wzmocnieniu znacznie większym niż potrzebne, na przykład $A = 10\,000$. Potem część sygnału wyjściowego, ułamek $\beta = 0,01$, odejmował od wejścia. Wzmocnienie całości wynosi wtedy

$$G = \frac{A}{1 + A\beta} = \frac{10\,000}{1 + 100} \approx 99,0.$$

Black oddał 99% wzmocnienia. W zamian dostał coś cenniejszego. Gdy lampy zmieniają A o 20% w dół albo w górę (8000 albo 12 000), G wynosi 98,8 albo 99,2. Zmienia się więc najwyżej o ok. 0,25%. Wzmocnienie całości prawie nie zależy od lamp, tylko od β , czyli od dwóch oporników, a te można zrobić bardzo dokładne. To jest **ujemne sprzężenie zwrotne**. W tej lekcji zobaczysz, skąd bierze się ta magia i ile ona kosztuje.

Pytanie na start. Twój dron ma masę 1 kg. Ustawiasz ciąg silników dokładnie na $mg = 9,81\text{ N}$, więc dron powinien wisieć w miejscu. Ktoś przypina do niego kamerę o masie 100 g. Co się stanie po 10 sekundach? A jeśli dron sam mierzy wysokość i dodaje ciągu, gdy opada? Odpowiedź w części 5.

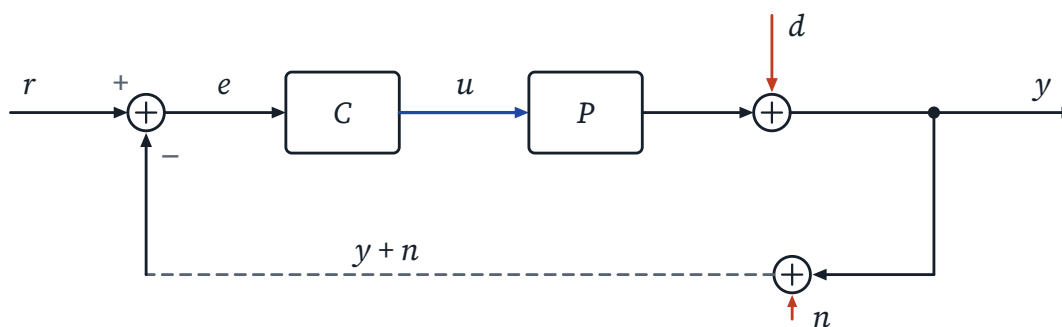


1

Elementy pętli

Automatyka ma swój słownik, a jego znajomość oszczędza dużo nieporozumień. Weźmy tempomat w samochodzie. Chcemy jechać 100 km/h: to **wartość zadana** r (ang. *reference*). Prędkość samochodu to **wielkość regulowana**, czyli wyjście y . Samochód, którego prędkością sterujemy, to **obiekt regulacji** P (ang. *plant*). Silnik z przepustnicą to **element wykonawczy**: zamienia polecenie na siłę. Tym poleceniem jest **sterowanie** u , tu procent otwarcia przepustnicy. Prędkościomierz to **czujnik**. Mózg całości to **regulator** C (ang. *controller*): porównuje zadaną prędkość z mierzoną i decyduje o sterowaniu. Douglas 1.3

Dwa sygnały przychodzą z zewnątrz i psują nam plany. **Zakłócenie** d (ang. *disturbance*) działa na obiekt: wiatr w twarz, wzniesienie, dodatkowy pasażer. **Szum pomiarowy** n (ang. *noise*) działa na czujnik: prędkościomierz kłamie o kilka procent, a jego wskazanie drży. Różnicę $e = r - y_m$ między wartością zadaną a zmierzonym wyjściem nazywamy **uchybem** (ang. *error*).



Pętla regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. Regulator C dostaje uchyb e , czyli różnicę między wartością zadaną r a zmierzonym wyjściem $y + n$, i wylicza sterowanie u . Obiekt P zamienia u na wyjście y , do którego dodaje się zakłócenie d . Minus przy sumatorze oznacza sprzężenie ujemne.

Minus przy sumatorze jest najważniejszym znakiem w automatyce. Gdy wyjście jest za duże, uchyb robi się ujemny, a regulator zmniejsza sterowanie: działa *przeciw* odchyłce. Takie sprzężenie nazywamy **ujemnym**. Sprzężenie dodatnie wzmacnia odchyłkę. Przykłady to pisk mikrofonu przy głośniku albo lawina. W regulacji prawie zawsze chodzi o sprzężenie ujemne i dalej będziemy mówić po prostu „sprzężenie zwrotne”.

Ta sama pętla w różnych urządzeniach

układ	wyjście y	sterowanie u	czujnik	typowe zakłócenie d
tempomat	prędkość	otwarcie przepustnicy	prędkościomierz	wzniesienie, wiatr
termostat w mieszkaniu	temperatura	moc grzejnika	termometr	otwarte okno, słońce
dron w zawisie	wysokość	ciąg silników	barometr, GPS	podmuch, zmiana masy
zegar wodny Ktesibiosa (III w. p.n.e.)	poziom wody w zbiorniku	dopływ wody	pływak	zmiana ciśnienia w źródle
organizm człowieka	temperatura ciała	pocenie się, dreszcze	receptory	upał, mróz, wysiłek

Zegar Ktesibiosa z Aleksandrii to najstarszy znany regulator. Woda wypływała ze zbiornika przez mały otwór, a czas mierzono poziomem wody w naczyniu poniżej. Żeby wypływ był stały, poziom w zbiorniku musiał być stały. Pływak przymykał dopływ, gdy woda się podnosiła, i otwierał, gdy opadała. Pływak jest tu jednocześnie czujnikiem, regulatorem i elementem wykonawczym. Ten sam mechanizm działa dziś w spłuczce. Douglas 1.5

⚠ PO POLSKU NA EGZAMINIE

W polskich podręcznikach (np. Kowal, *Podstawy automatyki*) spotkasz: *obiekt regulacji, wielkość regulowana, wartość zadana, uchyb regulacji, wielkość sterująca, zakłócenie, element wykonawczy, układ pomiarowy*. Oznaczenia literowe różnią się między podręcznikami. My używamy r, y, e, u, d, n jak większość literatury anglojęzycznej, bo w niej przeczytasz dalszy ciąg.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

4 zadania · ok. 20 min

- 1 Czajnik elektryczny wyłącza się sam, gdy woda się zagotuje. Wskaż wyjście, sterowanie, czujnik i regulator. Czy to pętla zamknięta?
- 2 Kierowca trzyma samochód na środku pasa. Wypisz elementy pętli. Co jest czujnikiem, a co szumem pomiarowym?
- 3 Dlaczego w termostacie mieszkaniowym czujnik temperatury umieszcza się z dala od grzejnika?
- 4 Mikrofon stoi przed głośnikiem, a wzmacniacz jest podkreślony. Rozlega się narastający pisk. Jakie to sprzężenie? Dlaczego pisk ma jedną, określoną wysokość?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

2 Pętla otwarta: sterowanie z modelu

Najprostszy pomysł na sterowanie: znamy obiekt, więc liczymy, jakie sterowanie da żądane wyjście, i je podajemy. Nie patrzymy na wynik. Tak działa zmywarka: program trwa ustaloną liczbę minut, czy naczynia są już czyste, czy nie. Douglas 1.3 Tak działa toster, pralka na programie czasowym i sygnalizacja świetlna bez czujników ruchu.

Zapiszmy to najprościej, w stanie ustalonym, gdy nic się już nie zmienia. Obiekt zamienia sterowanie na wyjście ze wzmocnieniem P , a zakłócenie dodaje się do wyniku: $y = Pu + d$. Mamy model obiektu: znamy jego wzmocnienie, ale tylko w przybliżeniu, jako $\hat{P}$ (daszek oznacza wartość z modelu). Żeby dostać $y = r$, podajemy $u = r/\hat{P}$. Sterowanie w pętli otwartej to **odwrócenie modelu**. Goodwin 2.5

WYNIK · BŁĄD PĘTLI OTWARTEJ (STAN USTALONY)

$$u = \frac{r}{\hat{P}} \Rightarrow y - r = \left(\frac{P}{\hat{P}} - 1 \right) r + d.$$

Każdy procent błędu modelu to procent błędu wyjścia, a zakłócenie przechodzi na wyjście w całości. Pętla otwarta nie wie, że coś poszło nie tak, więc nie może tego poprawić.

Pętla otwarta nie jest zła. Jest tania (nie trzeba czujnika), prosta i nie może się rozkołysać. Wystarczy, gdy spełnione są trzy warunki: model jest dokładny, zakłócenia są małe i obiekt sam z siebie jest stabilny. Zmywarka spełnia wszystkie trzy. Gdy któregoś brakuje, trzeba patrzeć na wynik.

Sz szczególnie bezlitosne są obiekty **całkujące**, takie jak wysokość drona, poziom wody w zbiorniku bez odpływu czy kurs statku. Ich wyjście to całka (suma w czasie) z tego, co robimy. Stały, nawet mały błąd sterowania nie daje stałego błędu wyjścia, tylko błąd rosnący bez końca. Dron z prologu, z ciągiem dobranym do 1 kg a ważący 1,1 kg, opada coraz szybciej, aż opór powietrza zrówna się z niedoborem ciągu. Wtedy opada ze stałą prędkością, ale opada dalej.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

4 zadania · ok. 25 min

- 1  Grzałka w akwarium daje temperaturę o 4 °C wyższą od temperatury pokoju na każde 10 W mocy. Chcemy 26 °C przy 20 °C w pokoju. Jaką moc ustawić? O ile pomylimy się, gdy w nocy temperatura pokoju spadnie do 17 °C?
- 2  W zadaniu 2.1 model grzałki jest błędny: naprawdę daje 3,6 °C na 10 W, a nie 4 °C. Jaki będzie błąd w dzień?
- 3  Podaj dwa przykłady urządzeń, w których pętla otwarta jest wystarczająca, i dwa, w których byłaby nie do przyjęcia. Uzasadnij przez trzy warunki z tej części.
- 4  Zbiornik bez odpływu napełniamy pompą, która według katalogu daje 2,0 l/s. Chcemy nalać 100 l, więc włączamy ją na 50 s. Pompa naprawdę daje 2,1 l/s. Ile wody nalejemy? Ile, gdy chcemy nalać 1000 l? Porównaj z obiektem, który nie całkuje.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

Pętla zamknięta: patrz i poprawiaj

Dołożmy czujnik i niech regulator patrzy na uchyb. Najprostszy regulator mnoży uchyb przez stałą K : im dalej od celu, tym mocniej działa. To regulator **proporcjonalny** (P). Zostawmy mu też odpowiedź z modelu, $r/\hat{P}$, żeby sprzężenie poprawiało tylko to, czego model nie przewidział. Tak robią prawie wszystkie praktyczne regulatory. Czujnik mierzy $y + n$, więc

$$u = \frac{r}{\hat{P}} + K(r - y - n), \quad y = Pu + d.$$

Podstawiamy u do równania obiektu i rozwiązujemy względem y . Iloczyn $L = KP$ pojawia się wszędzie i ma nazwę: **wzmocnienie pętli**. Mówi, ile razy wzmocniony wraca sygnał po jednym obiegu pętli.

WYNIK · BŁĄD PĘTLI ZAMKNIĘTEJ (STAN USTALONY)

$$y - r = \frac{1}{1 + L} \left[\left(\frac{P}{\hat{P}} - 1 \right) r + d \right] - \frac{L}{1 + L} n, \quad L = KP.$$

Nawias kwadratowy to dokładnie błąd pętli otwartej. Sprzężenie dzieli go przez $1 + L$. Szum czujnika przechodzi z wagą $L/(1 + L) \approx 1$, prawie w całości.

Z tego jednego wzoru wynikają trzy własności, dla których sprzężenie zwrotne jest wszędzie.

- 1. Tłumienie zakłóceń.** Przy $L = 9$ zakłócenie jest dziesięć razy mniejsze, przy $L = 99$ sto razy. Regulator nie musi wiedzieć, skąd przyszło zakłócenie ani jak jest duże. Widzi jego skutek i z nim walczy.
- 2. Niewrażliwość na obiekt.** Błąd modelu jest dzielony przez $1 + L$. W czystym sprzężeniu, bez odpowiedzi z modelu, wzmocnienie całego układu $T = L/(1 + L)$ zmienia się o $\frac{1}{1+L}$ razy mniej niż P . Przy $L = 9$ zmiana P o 10% zmienia T tylko o ok. 1% (dokładnie o 0,92%, bo 10% to już niemała zmiana). To jest dokładnie trik Blacka z prologu.
- 3. Odwracanie bez modelu.** Przy dużym L wyjście pilnuje zadanej: $y \approx r$, choć regulator nie zna P . Duże wzmocnienie w pętli wylicza odwrotność obiektu „samo”, przez ciągłe poprawianie. Goodwin 2.6

Własność 2 wynika z pochodnej. $dT/dL = 1/(1 + L)^2$, więc $\frac{dT}{T} = \frac{1}{1 + L} \cdot \frac{dL}{L}$. Względna zmiana całości to względna zmiana obiektu podzielona przez $1 + L$. Ten czynnik, $S = 1/(1 + L)$, nazywa się **funkcją wrażliwości** i w lekcji 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S , T i kształtowanie pętli stanie się głównym narzędziem projektowania.

SYMULACJA 1

Budżet błędu w stanie ustalonym, dla wartości zadanej $r = 1$ i modelu $\hat{P} = 1$. Lewy panel: pętla otwarta. Prawy: ta sama odpowiedź z modelu plus regulator P. Każdy pasek to przyczynek jednego źródła do błędu $y - r$. Zmieniaj prawdziwe P i zakłócenie: w pętli otwartej błąd zmienia się w tym samym stosunku, w zamkniętej jest dzielony przez $1 + L$. Potem dodaj błąd czujnika: na niego sprzężenie nic nie poradzi.

Pętla otwarta: $u = r/\hat{P}$



Pętla zamknięta: $u = r/\hat{P} + K(r - y - n)$



— przyczynek do błędu $y - r$ — suma (błąd całkowity)

$L = KP$ 12,00

$1/(1 + L)$ 0,077

błąd otwartej 0,300

błąd zamkniętej 0,023

Pętla dzieli błąd obiektu i zakłócenie przez $1 + L = 13,0$. Zmień P : w pętli otwartej błąd zmienia się 1:1, w zamkniętej prawie wcale.

Stan na rysunku: $P = 1,20$, $d = 0,10$, $K = 10,0$, $n = 0,00$; $L = 12,00$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

5 zadań · ok. 35 min

1 Pętla ma $L = 19$. Ile razy zmniejszy się wpływ zakłócenia w porównaniu z pętlą otwartą? Jaki ułamek błędu czujnika przejdzie na wyjście?

2 Wyprowadź wzór z ramki: podstaw u do $y = Pu + d$ i rozwiąż względem y .

- 3 Wzmacniacz Blacka ma $A = 10\,000$ i $\beta = 0,01$. O ile procent zmieni się wzmocnienie całości G , gdy A spadnie o 20%? Porównaj z przybliżeniem $\frac{1}{1+A\beta} \cdot 20\%$.
- 4 Regulator nie ma odpowiedzi z modelu: $u = K(r - y)$. Pokaż, że wtedy nawet przy idealnym modelu i bez zakłóceń zostaje uchyb $r/(1 + L)$. Ile wynosi przy $L = 9$ i $r = 100$ km/h?
- 5 W symulacji 1 ustaw $K = 10$, $P = 1,2$, $d = 0,1$, $n = 0$. Odczytaj błąd obu pętli. Ile musiałby wynosić K , żeby błąd zamkniętej pętli był mniejszy niż 0,005?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

4 Cena sprzężenia: szum i niestabilność

Gdyby sprzężenie było darmowe, każdy regulator miałby $K = 10^6$. Są dwa powody, dla których tak się nie robi. Pierwszy widać już we wzorze z części 3, drugi wymaga spojrzenia na czas.

4.1 Pętla jest tak dobra jak jej czujnik

Szum pomiarowy przechodzi na wyjście z wagą $L/(1 + L)$, czyli przy dużym L prawie w całości. Regulator nie odróżnia prawdziwej odchyłki od błędu pomiaru: jeśli prędkościomierz zawyża o 3 km/h, tempomat posłusznie jedzie o 3 km/h za wolno. Sprzężenie zamienia problem dokładnego obiektu na problem dokładnego czujnika. To zwykle dobra wymiana, bo czujnik łatwiej zrobić dokładnym niż samochód. Ale nie jest za darmo. Do tego szybko zmieniający się szum, przepuszczony przez duże K , szarpie elementem wykonawczym i go zużywa (lekcja 2.5 Zakłócenia, szum i wrażliwość: S, T i kształtowanie pętli).

4.2 Obiekty stabilne i niestabilne

Kulka na dnie miski wraca na dno sama: obiekt jest **stabilny**, a sterowanie jest potrzebne tylko po to, żeby był szybszy albo dokładniejszy. Kulka na szczycie odwróconej miski stoczy się przy najmniejszym zaburzeniu: obiekt jest **niestabilny**. Pętla otwarta nie ma tu żadnych szans, bo każdy błąd rośnie wykładniczo. Sprzężenie zwrotne potrafi utrzymać kulkę na szczycie, jak żongler trzymający kij na palcu. Douglas 1.4 Na tej samej zasadzie stoi rower w ruchu, Segway i rakieta, która bez sterowania przewróciłaby się jak ołówek postawiony na czubku.



Działa to też w drugą stronę. Źle dobrane sprzężenie może rozkołysać obiekt, który sam z siebie był najzupełniej stabilny. Typowy przykład znasz z łazienki.

4.3 Prysznic, czyli niestabilność z opóźnienia

Stoisz pod prysznicem, woda jest za zimna. Przekręcasz kurek w stronę cieplej. Nic się nie dzieje, bo woda o nowej temperaturze musi przepłynąć przez rurę. Kręcisz dalej. Po chwili leci wrzątek. Kręcisz w drugą stronę, i znowu nic... Prysznic jest stabilny: przy stałej nastawie kurka temperatura po chwili się ustala. Rozkołysał go regulator, czyli ty, bo poprawiał, nie czekając na skutki poprzednich poprawek.

Zapiszmy to. Nastawa kurka $u(t)$ to temperatura mieszaniny przy kurku. Pod prysznicem jest ona po czasie θ , potrzebnym na przepływ przez rurę: $y(t) = u(t - \theta)$. To **opóźnienie transportowe**. Kręcisz tym szybciej, im większa odchyłka: $\dot{u}(t) = k(r - y(t))$, gdzie k to twoja nerwowość w 1/s.

WYNIK · PĘTLA CAŁKUJĄCA Z OPÓŹNIENIEM

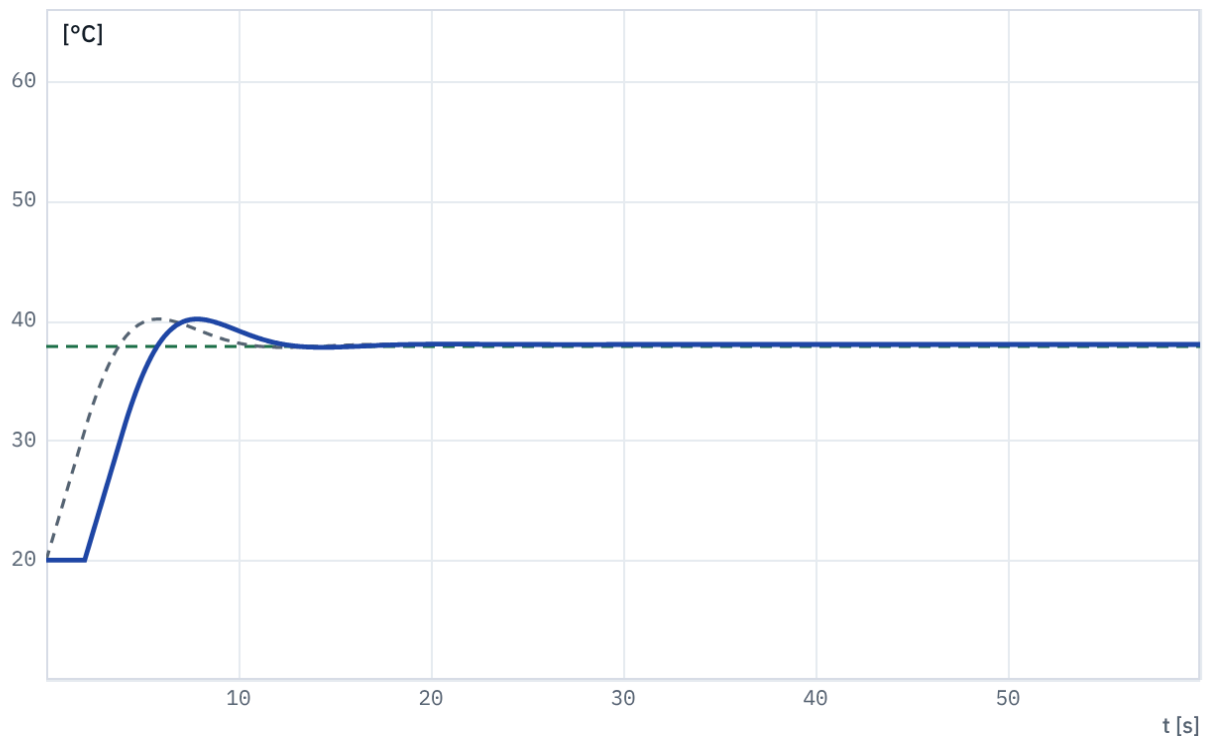
$$\dot{u}(t) = k(r - u(t - \theta)) : \quad \text{stabilna} \iff k\theta < \frac{\pi}{2}; \quad \text{bez przeregulowania} \iff k\theta \leq \frac{1}{e}.$$

Na granicy stabilności temperatura drga z okresem 4θ . Liczy się tylko iloczyn $k\theta$: im dłuższa rura, tym spokojniej trzeba kręcić.

Skąd $\pi/2$ i okres 4θ ? Oznaczmy odchyłkę $x = y - r$. Spełnia ona $\dot{x}(t) = -k x(t - \theta)$. Na granicy stabilności drgania ani nie rosną, ani nie gasną, więc sprawdzamy, kiedy $x = \cos \omega t$ jest rozwiązaniem. Lewa strona to $-\omega \sin \omega t$. Prawa to $-k \cos(\omega t - \omega \theta) = -k \cos \omega t \cos \omega \theta - k \sin \omega t \sin \omega \theta$. Żeby obie strony były równe dla każdego t , współczynnik przy $\cos \omega t$ musi zniknąć: $\cos \omega \theta = 0$, czyli $\omega \theta = \pi/2$. Współczynniki przy $\sin \omega t$ muszą być równe: $\omega = k \sin \omega \theta = k$. Stąd $k\theta = \pi/2$ i okres $2\pi/\omega = 4\theta$. Sens fizyczny: przy tym tempie kręcenia poprawka dociera pod prysznic dokładnie wtedy, gdy odchyłka zdążyła zmienić znak. Zamiast gasić drgania, podtrzymuje je. Warunek „bez przeregulowania” wymaga rozwiązania równania z opóźnieniem, którego tu nie wyprowadzamy; wróćmy do niego w lekcji 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie.

SYMULACJA 2 Regulacja temperatury pod prysznicem. Start: 20 °C, cel: 38 °C.

Przerywana linia to nastawa kurka $u(t)$, ciągła to temperatura pod prysznicem, opóźniona o θ . Zwiększaj szybkość kręcenia k : najpierw dojdzie staję się szybsze, potem pojawia się przeregulowanie, a przy $k\theta > \pi/2$ drgania rosną. Wydłuż rurę i zobacz, że ta sama nerwowość nagle przestaje wystarczać.



— — nastawa kurka $u(t)$ — temperatura pod prysznicem $y(t) = u(t - \theta)$ — — temperatura zadana 38 °C

$k\theta$ 0,60

granica $\pi/2$ 1,57

najwyższa temperatura 40,1 °C

ocena drgania gasnące

Kręcisz szybciej, niż pozwala opóźnienie: zanim gorąca woda doplynie, zdążysz przekręcić za daleko. Drgania gasną, bo $k\theta < \pi/2$.

Stan na rysunku: $k = 0,30$ 1/s, $\theta = 2,00$ s, $k\theta = 0,60$; start 20 °C, zadana 38 °C.

Morał jest ogólny i będzie wracał przez cały kurs. **Statyka** zawsze nagradza duże wzmocnienie (część 3). **Dynamika** (opóźnienia, bezwładność, czas reakcji elementów) wyznacza, jak duże wzmocnienie pętla wytrzyma. Cała sztuka projektowania regulatorów to szukanie kompromisu między tymi dwoma. [Goodwin 2.8](#)

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

4 zadania · ok. 30 min

- 1 Rura do prysznica jest tak długa, że $\theta = 2$ s. Jaka jest największa szybkość kręcenia, przy której temperatura się ustali? Jaki będzie okres drgań na granicy?

- 2 Dlaczego hydraulicy w hotelach dają czasem baterie termostatyczne, które mieszają wodę tuż przy słuchawce prysznica? Odpowiedz językiem tej części.
- 3 Prędkościomierz zawyża wskazanie o 3%. Tempomat ma $L = 20$. Z jaką prędkością pojedzie samochód przy nastawie 100 km/h? Czy większe L by pomogło?
- 4 Kierowca widzi drogę z opóźnieniem 0,5 s, bo patrzy w telefon i podnosi wzrok co chwilę. Wyjaśnij, dlaczego samochód zaczyna „pływać” po pasie i dlaczego doświadczony kierowca w tej sytuacji odruchowo kręci kierownicą łagodniej.

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Dron: pierwsza pętla

Przez cały kurs będzie nam towarzyszył jeden obiekt: dron, który ma utrzymać wysokość. Jest prosty, a mimo to pokazuje wszystkie typowe kłopoty: całkowanie, bezwładność, nasycenie silników, szum barometru i podmuchy. Na końcu kursu ten sam schemat pętli zobaczysz w autopilocie samolotu.

Model: dron ma masę m , silniki dają ciąg T do góry, grawitacja ciągnie w dół siłą mg , a powietrze hamuje ruch pionowy siłą $-b\dot{z}$. Przyjmujemy $b = 0,5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$: prosty, liniowy model oporu. Druga zasada dynamiki (dział 1 „Ruch i jego przyczyny”):

$$m\ddot{z} = T - mg - b\dot{z}.$$

Na ślepo. Ustawiamy ciąg z modelu: $T = \hat{m}g$ dla $\hat{m} = 1 \text{ kg}$. Prawdziwa masa z kamerą to $m = 1,1 \text{ kg}$. Na drona działa więc niezrównoważona siła $-0,981 \text{ N}$. Dron przyspiesza w dół (na początku $0,89 \text{ m/s}^2$), aż opór zrówna się z niedoborem ciągu. Dzieje się to przy prędkości $0,981/0,5 \approx 1,96 \text{ m/s}$. Po 10 s dron jest ok. 15 m niżej i opada dalej. Odpowiedź na pierwszą część pytania z prologu: rozbije się.

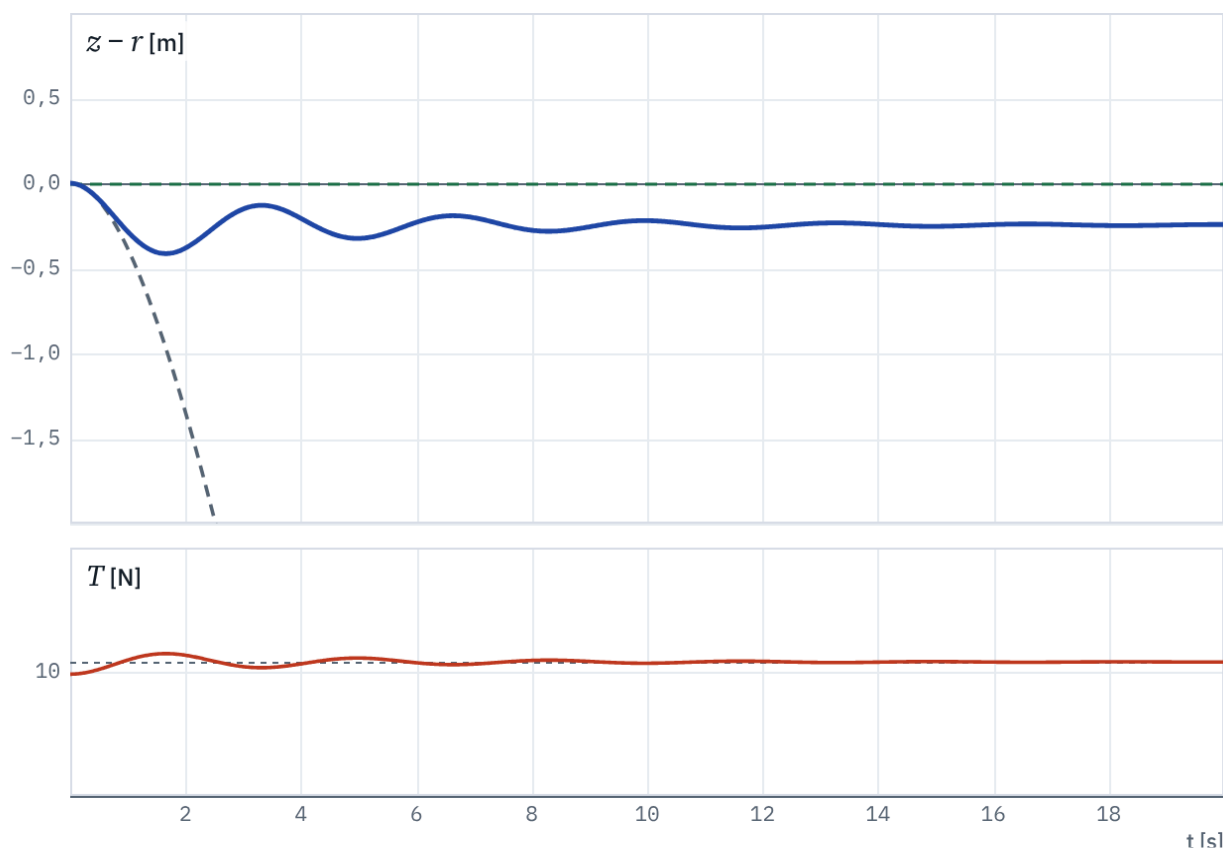
Z regulatorem P. Barometr mierzy wysokość, a regulator dodaje ciągu proporcjonalnie do odchyłki: $T = \hat{m}g + K(r - z)$. Ustala się równowaga, w której dodatkowy ciąg $K(r - z)$ pokrywa niedobór $(m - \hat{m})g$. Zostaje więc uchyb ustalony

$$r - z_\infty = \frac{(m - \hat{m})g}{K}.$$

Przy $K = 4 \text{ N/m}$ to ok. 0,25 m: dron wisi 25 cm za nisko, ale wisi. To jest druga część odpowiedzi z prologu. Jest jednak druga strona medalu. Równanie z regulatorem P ma postać $m\ddot{z} + b\dot{z} + Kz = \dots$, czyli oscylatora tłumionego z działu 6 „Drgania, rezonans i układy liniowe”. Regulator P działa jak sprężyna zaczepiona na wysokości r , a opór powietrza jest słabym tłumikiem. Dron kołysze się więc w górę i w dół, i to mocno: pierwsze przeregulowanie sięga ok. 70%. Większe K

zmniejsza uchyb, ale kołysanie robi się szybsze i jeszcze słabiej tłumione. To znowu kompromis statyka kontra dynamika.

SYMULACJA 3 Górny wykres: odchyłka wysokości od zadanej dla drona sterowanego na ślepo (przerywana) i z regulatorem P (ciągła). Dolny: ciąg w pętli zamkniętej; cienka linia to ciężar mg . Ciąg jest ograniczony do przedziału od 0 do $2\hat{m}g$. Zmieniaj masę i wzmocnienie, włącz podmuch. Zwróć uwagę, że ciąg ustala się na ciężarze, a nie na $\hat{m}g$: o tę różnicę regulator „dopłaca” z uchybu.



— — pętla otwarta: ciąg = $\hat{m}g$ — regulator P: ciąg = $\hat{m}g + K(r - z)$ — — wysokość zadana r
 — — ciąg w pętli zamkniętej

pętla otwarta: $z(20\text{ s}) - r$ -34,9 m

pętla P: uchyb ustalony 0,245 m

$(m - \hat{m})g / K$ 0,245 m

okres kołysania 3,32 s

Na ślepo dron odpływa bez końca (wysokość to całka z prędkości, więc stała nierównowaga sił daje coraz większy błąd). Regulator P trzyma go blisko r , ale z uchybem 0,25 m i z kołysaniem o tłumieniu $\zeta = 0,12$. Skąd kołysanie: lekcja 1.2; jak usunąć uchyb: lekcja 1.3.

Stan na rysunku: $m = 1,10\text{ kg}$, $\hat{m} = 1\text{ kg}$, $b = 0,5\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $K = 4,0\text{ N/m}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Dron z regulatorem P ($K = 4 \text{ N/m}$, $\hat{m} = 1 \text{ kg}$) zabrał lżejszą baterię i ma masę $0,9 \text{ kg}$. Jaki będzie uchyb? Dron zawisnie powyżej czy poniżej zadanej wysokości?
■ ■ ■

- 2 Z modelu $m\ddot{z} + b\dot{z} + Kz = \text{const}$ odczytaj częstotliwość własną i współczynnik tłumienia $\zeta = b/(2\sqrt{Km})$ dla $m = 1,1 \text{ kg}$, $K = 4 \text{ N/m}$. Porównaj z symulacją 3.
■ ■ ■

- 3 Dlaczego dron na ślepo nie zatrzymuje się na żadnej wysokości, a w zadaniu 2.1 z akwariem temperatura się ustaliła, tylko na złej wartości?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

☰ METODA: PIERWSZA ANALIZA PĘTLI

1. **Nazwij elementy:** obiekt, wyjście, sterowanie, czujnik, zakłócenia, źródła błędu pomiaru.
2. **Statyka:** zapisz obiekt w stanie ustalonym, $y = Pu + d$, i policz błąd pętli otwartej: $(P/\hat{P} - 1)r + d$.
3. **Zamknij pętlę:** $L = KP$; błąd z modelu i zakłócenia dzielisz przez $1 + L$, a błąd czujnika przechodzi z wagą $L/(1 + L)$.
4. **Czy obiekt całkuje?** Jeśli tak, w pętli otwartej błąd rośnie bez końca, a stała siła zakłócająca daje w pętli P uchyb (zakłócenie)/ K .
5. **Dynamika:** czy w pętli jest opóźnienie albo bezwładność? Każde z nich ogranicza dopuszczalne wzmocnienie. Na razie sprawdzamy to symulacją; od lekcji 2.4 Stabilność pętli: punkt -1 , zapasy i opóźnienie będziemy to liczyć.

Przykład 6.1

Tempomat pod górę

Na płaskiej drodze 30% otwarcia przepustnicy daje 100 km/h, więc model to $\hat{P} = 3,33 \text{ (km/h)/\%}$. Wzniesienie przy stałym gazie obniża prędkość o 20 km/h. Tempomat: $u = r/\hat{P} + K(r - y)$, $K = 3 \text{ \%/(km/h)}$. Oblicz spadek prędkości na wzniesieniu. Jak zmieni się wynik, gdy samochód jest obciążony i naprawdę $P = 3,0$?

- 1 Samochód zgodny z modelem: $L = 3 \cdot 3,33 = 10$. Zakłócenie $d = -20 \text{ km/h}$ dzielimy przez 11: spadek o 1,8 km/h.
- 2 Obciążony: $L = 9$. Błąd pętli otwartej: $(3,0/3,33 - 1) \cdot 100 - 20 = -10 - 20 = -30 \text{ km/h}$. Zamknięta: $-30/10 = -3,0 \text{ km/h}$.
- 3 Przepustnica: $u = 30 + 3 \cdot 3,0 = 39\%$.

Wynik: bez tempomatu samochód zwolniłby na wzniesieniu do 70–80 km/h, z tempomatem do ok. 97–98 km/h.

Sprawdzenie: regulator „dopłaca” 9 punktów procentowych gazu, które biorą się z uchybu 3 km/h razy $K = 3 \checkmark$. Żeby uchyb był mniejszy, trzeba większego K albo regulatora, który pamięta uchyb (lekcja 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb).

Przykład 6.2

Ile zapasu wzmocnienia kupić

Potrzebny jest wzmacniacz o wzmocnieniu 100, które zmienia się najwyżej o 0,1%, choć wzmocnienie lamp A może spaść o 20%. Ile musi wynosić A ? Jakiego β wybrać?

- 1 Oznaczmy $x = A\beta$. Wzmocnienie $G = A/(1+x) = 100$, więc $A = 100(1+x)$.
- 2 Po spadku: $G' = \frac{0,8A}{1+0,8x} = 100 \cdot \frac{0,8(1+x)}{1+0,8x} \geq 99,9$. Po przekształceniu: $0,0008x \geq 0,199$, czyli $x \geq 249$.
- 3 $A = 100 \cdot 250 = 25\,000$, $\beta = 249/25\,000 \approx 0,00996$.

Wynik: potrzeba lamp o wzmocnieniu ok. 25 000, czyli 250 razy większym niż użyteczne. Sprężenie $\beta \approx 0,01$.

Sprawdzenie: przy $A = 20\,000$ (-20%) $G = 99,90$; przy $A = 30\,000$ (+20%) $G = 100,07$ ✓. Szybkie oszacowanie $1 + L \approx 20\%/0,1\% = 200$ daje ten sam rząd wielkości.

Przykład 6.3

Prysznic w starym hotelu

Woda płynie z mieszacza do słuchawki 3 s. Jak szybko można kręcić kurkiem, żeby temperatura się ustaliła? A żeby nie przekroczyła zadanej ani razu? Ile trwa wtedy dojście z 20 do 38 °C z dokładnością do 1 °C?

- 1 Stabilność: $k < \pi/(2 \cdot 3) \approx 0,52$ 1/s.
- 2 Bez przeregulowania: $k \leq 1/(e \cdot 3) \approx 0,12$ 1/s.
- 3 Symulacja dla $k = 0,12$ 1/s: temperatura wchodzi w pasmo 37–39 °C po ok. 16 s. Dla $k = 0,3$ 1/s przekracza 45 °C i uspokaja się dopiero po ok. 25 s.

Wynik: kręcenie z $k \approx 0,12$ 1/s to najszybsze dojście, przy którym woda ani razu nie przekroczy 38 °C: ok. 16 s. Jeśli dopuścisz przelot o pół stopnia, $k \approx 0,16$ 1/s skraca to do ok. 11 s. Nerwowe kręcenie ($k = 0,3$ 1/s) jest wolniejsze i boli.

Sprawdzenie: 16 s to ok. pięć opóźnień θ . Przy opóźnieniu w pętli nie da się uspokoić układu dużo szybciej niż w kilka θ , bo każdą poprawkę widać dopiero po θ ✓.

Przykład 6.4

Dron, który ma wisieć dokładnie

Masa drona może się różnić od modelu o $\pm 0,1$ kg. Uchyb wysokości ma być mniejszy niż 5 cm. Jakie K jest potrzebne w regulatorze P? Co to oznacza dla kołysania ($m = 1,1$ kg, $b = 0,5$ N·s/m) i dla silników (ciąg najwyżej $2\hat{m}g$)?

- 1 $K \geq 0,1 \cdot 9,81/0,05 \approx 19,6$ N/m.
- 2 $\omega_0 = \sqrt{19,6/1,1} \approx 4,2$ rad/s, $\zeta = 0,5/(2\sqrt{19,6 \cdot 1,1}) \approx 0,054$. Przeregulowanie $e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 84\%$, okres ok. 1,5 s.
- 3 Polecenie wzniesienia o 1 m daje od razu $K \cdot 1 = 19,6$ N dodatkowego ciągu, a zapas nad zawisem to tylko $2\hat{m}g - mg \approx 8,8$ N. Silniki się nasycą.

Wynik: wymaganie statyczne spełnione, ale dron kołysze się prawie bez tłumienia i przy większych zmianach wysokości dochodzi do granic ciągu.

Sprawdzenie: w symulacji 3 ustaw $K = 19,6$ N/m: kołysanie gaśnie bardzo powoli ✓. Wyjścia są dwa i oba poznasz: dodać tłumienie przez pomiar prędkości (człon D, lekcja 3.1 Regulator PID: działanie P, I, D i uchyb ustalony) albo usuwać uchyb inaczej niż dużym K (człon I, lekcja 1.3 Regulator P i PI w pętli: dlaczego całka usuwa uchyb).

7 Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Większe wzmocnienie zawsze daje lepszą regulację.”

W statyce tak. W dynamice każde opóźnienie i każda bezwładność wyznaczają granicę, powyżej której pętla się rozkołysze (prysznic, dron z dużym K).

× „Sprzężenie zwrotne poprawia wszystko.”

Nie poprawia błędów czujnika. Przenosi go na wyjście prawie w całości. Pętla jest tak dokładna jak jej pomiar.

× „Stabilny obiekt w pętli też będzie stabilny.”

Prysznic jest stabilny, a w pętli z nerwowym regulatorem drga coraz mocniej. Stabilność to cecha pętli, nie obiektu.

× „Z dobrym modelem nie potrzeba sprzężenia.”

Model nie zna przyszłych zakłóceń. Dla obiektów całkujących i niestabilnych nawet idealny model nie wystarczy, bo błędy rosną.

× „Regulator musi znać obiekt.”

W statyce wcale: duże L odwraca obiekt przez samo poprawianie (Goodwin 2.6). Wiedza o obiekcie jest potrzebna, żeby dobrać K tak, by pętla się nie rozkołysała, i żeby dodać odpowiedź z modelu.

× „Uchyb regulatora P to błąd projektu, który da się usunąć dokładniejszym strojeniem.”

Regulator P *potrzebuje* uchybu, żeby wytworzyć korektę sterowania. Zmniejsza go większe K , ale usuwa dopiero pamięć, czyli całka (lekcja 1.3).

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

6 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Termostat i okno.** Zimą otwierasz okno, żeby przewietrzyć pokój, a termostat pod oknem odkręca grzejnik na maksimum. Co tu poszło nie tak? Zaproponuj dwie poprawki.
- 2 **Rynek jako pętla.** Gdy świń jest mało, ceny rosną i rolnicy zwiększają hodowlę. Prosię rośnie do sprzedaży ok. roku. Co przewidujesz dla cen? To tzw. cykl świński, opisywany przez ekonomistów od lat 20. XX w.
- 3 **Dwa czujniki.** Dron mierzy wysokość barometrem (szum $\pm 0,5$ m, bez dryfu) i GPS-em (szum ± 2 m). Który podłączyć do pętli wysokości? A gdyby barometr dryfował o 1 m na minutę, gdy zmienia się pogoda?
- 4 **Odwrócona miska.** Kulka na odwróconej misce: przyspieszenie od zbocza to $\ddot{x} = ax$ (dla $a > 0$ kulka ucieka). Wentylator daje przyspieszenie $u = -Kx$. Dla jakich K kulka przestanie uciekać? Czy wróci na szczyt i się zatrzyma?

- 5 Czy organizm ma regulator P? Przy gorączce organizm „przestawia” wartość zadaną temperatury na wyższą. Przy dużym wysiłku temperatura ciała rośnie o ok. 1 °C, choć organizm się poci. O jakiej własności regulatora świadczy ten drugi fakt?
- 6 Ile razy przez rurę. W prysznicu z $\theta = 2$ s kręcisz z $k = 0,5$ 1/s. Bez liczenia, z symulacji 2: ile razy temperatura wyraźnie przekroczy 38 °C, zanim się uspokoi z dokładnością do 1 °C? Dlaczego drgania mają okres trochę większy niż 4θ ?

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Czym różni się pętla otwarta od zamkniętej?

W zamkniętej sterowanie zależy od zmierzonego wyjścia; w otwartej tylko od wartości zadanej i modelu.

- 2 Co to jest wzmocnienie pętli L i dlaczego ma znaczenie?

$L = KP$, wzmocnienie po jednym obiegu pętli. Błąd z modelu i z zakłóceń jest dzielony przez $1 + L$.

- 3 Którego błędu sprzężenie nie zmniejsza?

Błąd czujnika: przechodzi z wagą $L/(1 + L) \approx 1$.

- 4 Dlaczego regulator P zostawia uchyb przy stałym zakłóceniu?

Bo korektę sterowania wytwarza tylko z uchybu: bez uchybu nie ma korekty.

- 5 Co to jest obiekt całkujący i czemu nie lubi pętli otwartej?

Taki, którego wyjście jest całką ze sterowania (wysokość, poziom w zbiorniku bez odpływu). Stały błąd sterowania daje rosnący bez końca błąd wyjścia.

- 6 Kiedy pętla z opóźnieniem θ i nerwowością k jest stabilna?

Dla $k\theta < \pi/2$; na granicy drga z okresem 4θ .

- 7 Czy sprzężenie może rozkołysać stabilny obiekt? A ustabilizować niestabilny?

Oba: prysznic z nerwowym regulatorem; kulka na odwróconej misce, rakieta, rower.

- 8 Na czym polegał pomysł Blacka?

Oddać nadmiar wzmocnienia w zamian za niewrażliwość: $G = A/(1 + A\beta) \approx 1/\beta$, zależne od dokładnych oporników, a nie od zmiennych lamp.

STATYKA PĘTLI

obiekt: $y = Pu + d$; uchyb $e = r - (y + n)$

otwarta: $u = r/\hat{P}$, $y - r = (P/\hat{P} - 1)r + d$

zamknięta: $u = r/\hat{P} + Ke$, $L = KP$

$$y - r = \frac{(P/\hat{P} - 1)r + d}{1 + L} - \frac{L}{1 + L}n$$

$$\text{czyste P: } y = \frac{L}{1 + L}r; \quad \frac{dT}{T} = \frac{1}{1 + L} \frac{dP}{P}$$

$$\text{Black: } G = \frac{A}{1 + A\beta} \approx \frac{1}{\beta}$$

DYNAMIKA

prysznic: $\dot{u} = k(r - u(t - \theta))$; stabilny dla $k\theta < \pi/2$, okres na granicy 4θ

bez przeregulowania: $k\theta \leq 1/e$

dron: $m\ddot{z} = T - mg - b\dot{z}$

dron z P: uchyb $(m - \hat{m})g/K$, $\omega_0 = \sqrt{K/m}$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{Km}}$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rozdz. 1 (problem sterowania, pętla otwarta i zamknięta, Ktesibios). Bezpłatna książka; do niej seria wykładów „Control System Lectures” na YouTube.
- **Dla chętnych:** G. C. Goodwin i in., *Control System Design*, rozdz. 2 (sterowanie jako odwracanie, duże wzmocnienie, kompromisy); K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 1 (historia i przykłady sprzężenia; książka dostępna bezpłatnie na stronie autorów).

Następna lekcja: **Jak reagują układy**. Zobaczyliśmy, że o tym, ile wzmocnienia pętla wytrzyma, decyduje dynamika: bezwładność, tłumienie, opóźnienie. Zanim zaprojektujemy porządną regulator, nauczymy się rozpoznawać kilka podstawowych „charakterów” obiektów po jednym prostym teście: co robi wyjście, gdy sterowanie nagle zmienimy o krok.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Wyjście: temperatura wody (a dokładniej pary). Sterowanie: prąd grzałki, włączony albo wyłączony. Czujnik i regulator w jednym: bimetal, który wygina się od gorącej pary i rozłącza styk. Tak, to pętla zamknięta, bo decyzja zależy od zmierzonego wyjścia. Regulator ma tylko dwa stany. To regulator dwupołożeniowy, wrócimy do niego w części III kursu.
2. Wyjście: położenie samochodu na pasie. Sterowanie: kąt kierownicy. Element wykonawczy: układ kierowniczy i koła. Czujnik: oczy kierowcy. Regulator: kierowca. Zakłócenia: boczny wiatr, koleiny, pochylenie jezdni. Szum: niedokładna ocena położenia, np. w nocy albo w deszczu.
3. Regulator trzyma na zadanej wartości to, co *mierzy* czujnik, a nie temperaturę w pokoju. Czujnik przy grzejniku pokazywałby za dużo: grzejnik wyłączałby się, zanim pokój się nagrzej. To przykład ogólnej zasady z części 3: pętla jest tak dokładna, jak jej czujnik.
4. Dodatkowo: dźwięk z głośnika trafia do mikrofonu, jest wzmacniany i wraca głośniejsz. Narasta tylko ta częstotliwość, dla której sygnał po obiegu pętli wraca wzmocniony i w tej samej fazie (dodaje się do siebie). Dla innych częstotliwości faza się nie zgadza albo wzmocnienie jest mniejsze niż 1. Dokładnie ten warunek, „wzmocnienie 1 i zgodna faza”, będzie kryterium stabilności w lekcji 2.4 Stabilność pętli: punkt -1, zapasy i opóźnienie.

Zadania · część 2

1. Potrzeba 6 °C nad pokojem: $u = 6/0,4 = 15$ W. W nocy temperatura wody spadnie do 23 °C, czyli o 3 °C za nisko. Zakłócenie przeszło w całości.
2. $y - r = (P/\hat{P} - 1)r_{\text{nad}} = (0,9 - 1) \cdot 6 = -0,6$ °C. Woda ma 25,4 °C. Błąd modelu 10% to błąd 10% nadwyżki nad pokojem.
3. Wystarcza: toster (model przewidywalny, zakłócenia małe, błąd mało kosztuje), silnik krokowy w drukarce 3D (każdy impuls to znany obrót, obciążenie małe; gdy obciążenie przekroczy moment silnika, kroki giną i wydruk się przesuw). Nie do przyjęcia: utrzymanie wysokości drona (obiekt całkujący), regulacja temperatury pieca hutniczego (duże zakłócenia, drogi błąd).
4. 105 l i 1050 l: błąd w litrach rośnie z czasem pracy (5% z coraz większej objętości). Gdybyśmy chcieli tylko przepływu 2,0 l/s, błąd byłby stały: 0,1 l/s. Obiekt całkujący zamienia stały błąd sterowania w błąd rosnący.

Zadania · część 3

1. 20 razy; $19/20 = 95\%$ błędu czujnika.
2. $y = Pr/\hat{P} + KPr - KPy - Kpn + d$, więc $y(1 + L) = Pr/\hat{P} + Lr - Ln + d$. Odejmując $r(1 + L)$ od obu stron: $(y - r)(1 + L) = (P/\hat{P} - 1)r + d - Ln$. Dzielimy przez $1 + L$.
3. G : z 99,01 na 98,77, czyli o 0,25%. Przybliżenie: $20\%/101 \approx 0,20\%$. Różnica bierze się stąd, że 20% to nie jest mała zmiana, a wzór z pochodnej jest liniowy.
4. $y = KP(r - y)$, więc $y = \frac{L}{1+L}r$ i $r - y = \frac{r}{1+L}$. Przy $L = 9$: 10 km/h. Regulator P potrzebuje uchybu, żeby w ogóle coś robić: przy zerowym uchybie dałby zerowe sterowanie. Podpowiedź z modelu

dostarcza sterowania „na start”. Jak pozbyć się uchybu bez modelu: lekcja 1.3 Regulator P i PI w pętli: dławicę całka usuwa uchyb.

5. Otwarta: 0,3; zamknięta: $0,3/13 \approx 0,023$. Potrzeba $1 + 1,2K > 60$, czyli $K > 49,2$. W statyce wszystko przemawia za dużym K . Część 4 pokazuje, dlaczego w praktyce się tak nie da.

Zadania · część 4

1. $k < \pi/(2 \cdot 2) \approx 0,79$ 1/s; okres $4\theta = 8$ s.
2. Termostat przy słuchawce ma czujnik i regulator tuż przy wyjściu, więc opóźnienie θ jest bardzo małe. Pętla może być szybka (duże k) bez rozkołysania. Gość nie musi już być regulatorem z długą rurą.
3. Czujnik pokazuje 1,03y, czyli $n = 0,03y \approx 2,9$ km/h. Na wyjście przechodzi $\frac{20}{21}$ tego błędu: $y = 100 - \frac{20}{21} \cdot 0,03y$, czyli $y \approx 97,2$ km/h. Większe L tylko przybliży wynik do $100/1,03 \approx 97,1$ km/h. Sprzężenie nie poprawi błędu czujnika.
4. Opóźnienie w pętli działa jak długa rura w prysznicu: poprawki trafiają za późno i przy tej samej nerwowości dochodzą do fazy, w której podtrzymują kołysanie. Warunek stabilności typu $k\theta < \text{stała}$ mówi, że przy większym θ trzeba zmniejszyć k . Kierowca, kręcąc łagodniej, przywraca zapas stabilności, ale kosztem gorszego trzymania pasa. Najlepiej po prostu nie patrzeć w telefon.

Zadania · część 5

1. $r - z_\infty = (0,9 - 1) \cdot 9,81/4 \approx -0,25$ m: dron wisi 25 cm *powyżej* zadanej wysokości, bo ma nadmiar ciągu, który regulator musi zniwelować ujemną poprawką.
2. $\omega_0 = \sqrt{K/m} \approx 1,91$ rad/s, $\zeta \approx 0,12$; okres drgań gasnących $2\pi/(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}) \approx 3,3$ s. Na wykresie widać ok. sześć wahaní w 20 s ✓.
3. Temperatura akwarium jest obiektem stabilnym: przy stałej mocy dochodzi do równowagi z otoczeniem. Wysokość drona to całka z prędkości. Stały niedobór ciągu daje stałą prędkość opadania (opór ogranicza tylko prędkość), a wysokość zmienia się bez końca. Żadna wysokość nie jest położeniem równowagi przy złym ciągu.

Zadania do przemyślenia

1. Regulator walczy z zakłóceniem, którego nie powinien kompensować: chcemy chłodnego powietrza, a termostat traktuje je jak błąd. Do tego czujnik pod oknem mierzy lokalny przeciąg, a nie temperaturę pokoju.
2. Poprawki: czujnik okna, który wyłącza regulację (tak robią nowoczesne głowice), albo czujnik temperatury z dala od okna i grzejnika. Ogólnie: sprzężenie poprawia wszystko, co widzi czujnik, więc trzeba wybrać, co ma widzieć.
2. 1. Pętla z dużym opóźnieniem (ok. rok) i silną reakcją. Gdy nowe świny trafiają na rynek, ceny już spadły, więc rolnicy ograniczają hodowlę, i po roku znowu brakuje mięsa.
2. Jak w prysznicu: cykliczne wahania z okresem kilku opóźnień (obserwowane cykle trwają kilka lat). Mniej nerwowa reakcja albo krótsze opóźnienie (kontrakty terminowe, lepsze prognozy) tłumią cykl.
3. 1. Pętla przenosi błąd czujnika na wyjście, więc mniejszy szum: barometr.
2. Przy dryfie dron powoli „odpływałby” razem z barometrem, a pętla by tego nie zauważyła. Rozwiązanie: łączyć czujniki, czyli brać szybkie zmiany z barometru, a powolną prawdę z GPS. To fuzja czujników (lekcje 4.4 Filtr Kalmana i 4.5 Rozszerzony filtr Kalmana i fuzja czujników w jednej osi).

4. 1. $\ddot{x} = (a - K)x$. Dla $K > a$ to równanie oscylatora bez tłumienia: kulka nie ucieka, ale kołysze się wokół szczytu bez końca.
2. Żeby się zatrzymała, potrzebne jest tłumienie, czyli człon zależny od prędkości: $u = -Kx - D\dot{x}$. Sama informacja „gdzie jesteś” nie wystarcza do stabilizacji, potrzebne jest też „dokąd jedziesz”. To człon D z lekcji 3.1 Regulator PID: działanie P, I, D i uchyb ustalony.
5. 1. Gorączka to zmiana r , a nie awaria pętli: organizm aktywnie grzeje się (dreszcze) do nowej wartości zadanej.
2. Wzrost temperatury przy wysiłku przy działającym poceniu to uchyb pod stałym zakłóceniem (dodatkowe ciepło z mięśni). Tak zachowuje się regulator typu P o skończonym wzmocnieniu: potrzebuje odchyłki, żeby pocić się mocniej. To uproszczony obraz; fizjologia jest bardziej złożona.
6. 1. Temperatura dochodzi do ok. 47 °C, spada do ok. 34 °C i jeszcze raz sięga ok. 40 °C. W paśmie 37–39 °C zostaje dopiero po ok. 17 s. Dwa wyraźne przekroczenia.
2. Okres 4θ dotyczy samej granicy stabilności ($k\theta = \pi/2$). Przy mniejszym k układ reaguje wolniej i drgania gasnące mają dłuższy okres (w symulacji ok. 9,4 s zamiast 8 s).

Automatyka · Lekcja 1.1: Po co sprzężenie zwrotne? · Źródła: B. Douglas, *The Fundamentals of Control Theory*, rev. 1.6 (2019), rozdz. 1; G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control System Design* (Prentice Hall 2001), rozdz. 2; K. J. Åström, R. M. Murray, *Feedback Systems*, rozdz. 1. Odnośniki „Douglas 1.3” oznaczają podrozdział książki. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/c1_1.py).