

Problem Lamberta i wykres porkchop

Transfer Hohmanna zakłada orbity kołowe w jednej płaszczyźnie i ustala datę startu za nas. Prawdziwe zadanie brzmi inaczej: sonda startuje z Ziemi w konkretnym dniu i ma być przy Marsie w konkretnym dniu. Jaka orbita łączy te dwa punkty w zadanym czasie? To problem Lamberta. Rozwiązujemy go zmiennymi uniwersalnymi, liczymy położenia planet z efemeryd i składamy tysiące rozwiązań w wykres porkchop, który pokazuje okna startowe na Marsa w latach 2026–2033.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2,5 h zadań i
programowania

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz.
5.3 i 8; C. A.
Kluever, *Space
Flight Dynamics*,
rozdz. o czasie
lotu i
trajektoriach
międzyplanetarnych;
E. M. Standish,
*Keplerian Elements
for Approximate
Positions of the
Major Planets*
(JPL)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: twierdzenie Lamberta
- 1 Problem Lamberta
- 2 Rozwiązanie zmiennymi uniwersalnymi
- 3 Gdzie są planety: efemerydy i daty
- 4 Wykres porkchop i okna na Marsa
- 5 Wybór przelotu
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: twierdzenie Lamberta

W 1761 roku Johann Heinrich Lambert, matematyk urodzony w Miluzie, udowodnił zaskakujący fakt: czas lotu między dwoma punktami orbity eliptycznej zależy tylko od trzech liczb: sumy odległości tych punktów od Słońca, odległości między nimi (cięciwy) i wielkiej półosi. Nie zależy od mimośrod. Wynikało z tego, że z dwóch położenia komety i czasu między obserwacjami można wyznaczyć jej orbitę.

Dwieście lat później ten sam problem pojawił się w innym przebraniu: zamiast komety sonda, zamiast obserwacji daty startu i przylotu. Każdy program planowania misji ma w środku procedurę rozwiązującą problem Lamberta, wywoływaną miliony razy.

Pytanie na start. Według Hohmanna sonda na Marsa leci 259 dni. W oknie 2026 roku najtańszy start (najmniejsze C_3) daje lot trwający 294 dni, a nie 259. Dlaczego? Odpowiedź w części 4.

Problem Lamberta

PROBLEM LAMBERTA

Dane: dwa wektory położenia $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ względem ciała centralnego i czas lotu Δt . Szukane: orbita (w praktyce prędkości $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ w obu punktach), która przeprowadza ciało z $\mathbf{r}_1$ do $\mathbf{r}_2$ w czasie Δt .

Dla zadanego kierunku ruchu (prosty albo wsteczny) i bez pełnych obiegów ($N = 0$) rozwiązanie jest jedno; z $N \geq 1$ pełnymi obiegami są dwa albo żadne. Kąt przelotu $\Delta\nu < 180^\circ$: przelot typu I („krótką drogą”), $\Delta\nu > 180^\circ$: typu II.

Liczba niewiadomych się zgadza: orbita w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ ma trzy parametry (a , e , ω) i dwa położenia na niej dają dwa warunki, czas lotu trzeci. Problem jest jednak silnie nieliniowy: czas zależy od orbity przez równanie Keplera. Twierdzenie Lamberta mówi, że $\Delta t = \Delta t(a, r_1 + r_2, c)$, gdzie $c = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$; szuka się więc jednej liczby (a albo innego parametru), a reszta wynika z geometrii.

Przypadek szczególny to $\Delta\nu = 180^\circ$: punkty leżą naprzeciw siebie, płaszczyzna orbity nie jest wyznaczona przez $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, i dla planet o różnie nachylonych orbitach przelot wymaga obrotu płaszczyzny prawie o 90° . Transfer Hohmanna to właśnie taki przypadek, możliwy tylko w modelu orbit współpłaszczyznowych.

- 1 Dłaczego problem Lamberta ma dla zadanego kierunku ruchu i bez dodatkowych obiegów dokładnie jedno rozwiązanie, a z dopuszczeniem jednego pełnego obiegu dwa?
- 2 Ziemia i Mars są w chwili startu i przylotu po przeciwnych stronach Słońca, a orbita Marsa jest nachylona o $1,85^\circ$. Co dzieje się z płaszczyzną orbity przelotu przy $\Delta\nu = 180^\circ$?
- 3 Twierdzenie Lamberta: czas lotu nie zależy od mimośrodów. Co to oznacza dla dwóch elips o tej samej wielkiej półosi przechodzących przez $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

2 Rozwiązanie zmiennymi uniwersalnymi

Żeby ten sam algorytm działał dla elips, parabol i hiperbol, używa się zmiennej $z = \chi^2/a$ (dodatnia dla elipsy, zero dla paraboli, ujemna dla hiperboli) i funkcji Stumpffa:

$$C(z) = \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z}, \quad S(z) = \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}^3} \quad (z > 0),$$

z odpowiednikami hiperbolicznymi dla $z < 0$ i granicami $C(0) = 1/2$, $S(0) = 1/6$. Dla kąta przelotu $\Delta\nu$ (z warunkiem na kierunek ruchu) definiujemy $A = \sin \Delta\nu \sqrt{r_1 r_2 / (1 - \cos \Delta\nu)}$ i $y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z)-1}{\sqrt{C(z)}}$.

🔧 ALGORYTM (CURTIS 5.2)

1. Rozwiąż $F(z) = \left(\frac{y(z)}{C(z)}\right)^{3/2} S(z) + A\sqrt{y(z)} - \sqrt{\mu} \Delta t = 0$ (metoda Newtona albo bisekcja, z warunkiem $y(z) > 0$).
2. Funkcje Lagrange'a: $f = 1 - y/r_1$, $g = A\sqrt{y/\mu}$, $\dot{g} = 1 - y/r_2$.
3. $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1)/g$, $\mathbf{v}_2 = (\dot{g}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/g$.

```
import numpy as np

def C(z): return (1 - np.cos(np.sqrt(z)))/z if z > 1e-8 else ((np.cosh(np.sqrt(-z)) - 1)/(-z) if z <
-1e-8 else 0.5)
def S(z):
    if z > 1e-8: s = np.sqrt(z); return (s - np.sin(s))/s**3
    if z < -1e-8: s = np.sqrt(-z); return (np.sinh(s) - s)/s**3
    return 1/6

def lambert(r1, r2, dt, mu):
    R1, R2 = np.linalg.norm(r1), np.linalg.norm(r2)
    th = np.arccos(r1 @ r2/(R1*R2))
    if np.cross(r1, r2)[2] < 0: th = 2*np.pi - th # ruch prosty
    A = np.sin(th)*np.sqrt(R1*R2/(1 - np.cos(th)))
    y = lambda z: R1 + R2 + A*(z*S(z) - 1)/np.sqrt(C(z))
    F = lambda z: (y(z)/C(z))*1.5*S(z) + A*np.sqrt(y(z)) - np.sqrt(mu)*dt
    lo, hi = -4*np.pi**2, 4*np.pi**2*0.999 # bisekcja: pewna, choć wolniejsza od
    Newtona
    while y(lo) < 0: lo += 0.1
    for _ in range(100):
        mid = (lo + hi)/2
        lo, hi = (lo, mid) if F(mid) > 0 else (mid, hi)
    z = (lo + hi)/2; f = 1 - y(z)/R1; g = A*np.sqrt(y(z)/mu); gd = 1 - y(z)/R2
    return (r2 - f*r1)/g, (gd*r2 - r1)/g
```

Sprawdzenie na przykładzie z podręcznika Curtisa: $\mathbf{r}_1 = [5000; 10\,000; 2100]$ km, $\mathbf{r}_2 = [-14\,600; 2500; 7000]$ km, $\Delta t = 1$ h wokół Ziemi. Wynik: $\mathbf{v}_1 = [-5,9925; 1,9254; 3,2456]$ km/s, $\mathbf{v}_2 = [-3,3125; -4,1966; -0,3853]$ km/s, zgodnie z podręcznikiem co do czwartej cyfry.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pokaż, że $C(z) \rightarrow 1/2$ i $S(z) \rightarrow 1/6$ przy $z \rightarrow 0$.
- 2 Z wyniku przykładu Curtisa ($\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$) policz energię, wielką półość i mimośród orbity przelotu.
- 3 Dlaczego przed rozwiązywaniem $F(z) = 0$ trzeba zadbać o $y(z) > 0$?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

3 Gdzie są planety: efemerydy i daty

Do problemu Lamberta trzeba znać położenia planet w dniu startu i przylotu. Najprostsze przybliżenie to elementy keplerowskie, które powoli się zmieniają: JPL publikuje tabelę elementów średnich na epokę J2000 i ich tempa zmian (E. M. Standish). Najważniejsze tempo to długość średnia L (np. Mars: $19\,140,3^\circ$ na stulecie, czyli okres 686,98 dnia). Dokładność takich

położeń (z uwzględnieniem temp zmian wszystkich elementów) to ułamek stopnia w okresie kilkuset lat wokół 2000 roku; nasz program uwzględnia tylko tempo L , co dodaje błąd rzędu kilkudziesięciu tysięcy km w latach 2026–2033. Obie dokładności w zupełności wystarczają do wstępnego projektu. Do nawigacji sondy używa się numerycznych efemeryd DE (np. DE440).

Czas liczy się w **dniach juliańskich** (JD): ciągła rachuba dni od 4713 r. p.n.e., bez miesięcy i lat przestępnych. J2000 to JD 2 451 545,0 (1 stycznia 2000, 12:00 TT). 31 października 2026 to JD 2 461 344,5, czyli 9799,5 dnia po J2000. Sprawdzenie efemeryd: według nich 3 stycznia 2026 Ziemia jest 0,9833 AU od Słońca (peryhelium), a 9 stycznia 2026 Mars jest 2,40 AU od Ziemi (po drugiej stronie Słońca), co zgadza się z kalendarzami astronomicznymi.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Policz okres Marsa z tempa długości średniej $19\,140,30^\circ$ na stulecie (36 525 dni).
- 2 Ile dni dzieli 31 października 2026 (JD 2 461 344,5) i 21 sierpnia 2027 (JD 2 461 638,5)?
- 3 Dlaczego elementy średnie wystarczą do wykresu porkchop, ale nie do wejścia na orbitę Marsa?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

4 Wykres porkchop i okna na Marsa

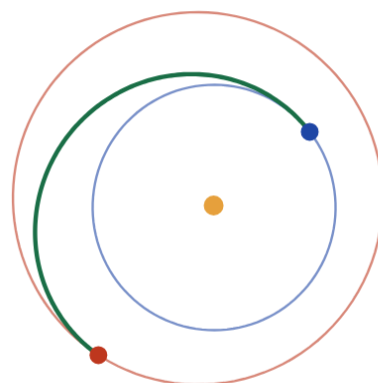
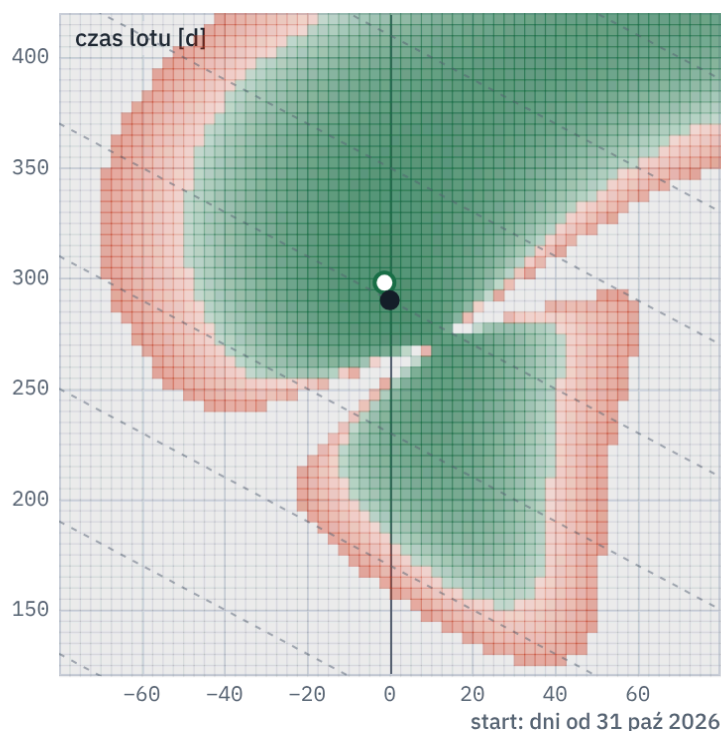
Dla każdej pary (data startu, czas lotu) rozwiązujemy problem Lamberta i liczymy $C_3 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_\oplus|^2$ oraz prędkość nadmiarową przy Marsie $|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_M|$. Mapa tych wartości przypomina kształtem kotlet schabowy (ang. *pork chop*), stąd nazwa. Najmniejsze C_3 w kolejnych oknach (efemerydy z elementów średnich, przelot w jednym obiegu):

okno	start	czas lotu	C_3 [km ² /s ²]	v_∞ przy Marsie [km/s]
2026	31 października 2026	294 d	9,13	2,69
2028	2 grudnia 2028	319 d	8,92	3,28
2031	23 lutego 2031	321 d	8,25	5,56
2033	29 kwietnia 2033	274 d	7,81	4,38

Odpowiedź na pytanie z prologu: orbity są eliptyczne i nachylone. Najtańszy przelot nie jest dokładnie połówką elipsy: w 2026 roku kąt przelotu wynosi ok. 197° (typ II), więc lot jest dłuższy niż 259 dni Hohmanna. Typ I i typ II tworzą na wykresie dwie „doliny”, rozdzielone grzbietem w pobliżu $\Delta\nu = 180^\circ$, gdzie przelot wymaga obrotu płaszczyzny.

Okna różnią się, bo Mars ma wyraźnie eliptyczną orbitę ($e = 0,093$): odległość Ziemia–Mars przy kolejnych opozycjach zmienia się od ok. 56 do ok. 100 mln km z okresem ok. 15–17 lat. W 2031 roku najtańszy start daje dużą prędkość przylotu: tańsze C_3 nie oznacza tańszej misji.

SYMULACJA 1 Wykres porkchop Ziemia–Mars (każda komórka to jedno rozwiązanie problemu Lamberta). Oś pozioma: data startu, pionowa: czas lotu; przerywane ukośne linie to stałe daty przylotu. Pusty punkt: minimum wybranej wielkości; czarny punkt: przelot wybrany suwakami, którego tor widać w prawym panelu.



— mniejsza wartość — większa — wybrany przelot

start → przylot 31 paź 2026 → 17 sie 2027

C_3 przy Ziemi (v_∞) 9,14 km^2/s^2 (3,02 km/s)

v_∞ przy Marsie 2,77 km/s

Δv : wylot z 300 km + orbita kołowa 300 km 5,76 km/s

najlepszy w tym oknie (C_3) 9,13 przy starcie 29 paź 2026, lot 298 d

Dwie „doliny” niskiego C_3 to przeloty typu I (kąt przelotu poniżej 180° , krócej) i typu II (powyżej 180° , dłużej). Między nimi przelot przez dokładnie 180° wymaga obrotu płaszczyzny i jest bardzo drogi.

Stan na rysunku: okno 2026, start 31 paź 2026, lot 290 d; $C_3 = 9,14 \text{ km}^2/\text{s}^2$, v_∞ przy Marsie 2,77 km/s (efemerydy z elementów średnich, problem Lamberta dla jednego obiegu).

- 1 Ile dni dzielą najlepsze daty startu w oknach 2026 i 2028? Porównaj z okresem synodycznym.
■ ■ ■
- 2 W symulacji zobacz, co się dzieje z C_3 w okolicy czasu lotu, przy którym kąt przelotu wynosi 180° . Dlaczego to nie jest wąska kreska, tylko szeroki grzbiet?
■ ■ ■
- 3 W oknie 2031 najmniejsze C_3 daje przyłot z $v_\infty = 5,56$ km/s. Ile kosztuje wtedy wejście na orbitę kołową 300 km wokół Marsa, a ile w oknie 2026 ($v_\infty = 2,69$ km/s)?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

5 Wybór przelotu

Projektant patrzy na kilka map naraz: C_3 (ile ładunku wyniesie rakieta), prędkość przyłotu (ile paliwa na hamowanie albo jakie obciążenia przy wejściu w atmosferę), deklinację asymptoty wylotu (czy rakieta z danego kosmodromu ją osiągnie), czas lotu, datę przyłotu (oświetlenie miejsca lądowania, łączność). Rakieta ma ograniczone C_3 , więc z mapy wycina się **okres startowy**: zakres dat, w którym jest przelot spełniający wszystkie wymagania. W oknie 2026, z dowolnym czasem lotu, $C_3 \leq 12$ km²/s² jest osiągalne przez 72 dni (od 11 października do 21 grudnia), $C_3 \leq 10$ km²/s² tylko przez 21 dni.

Najmniejsza suma Δv (wylot z 300 km i wejście na kołową orbitę 300 km wokół Marsa) w oknie 2026: 5,67 km/s przy starcie 31 października i locie 312 dni ($C_3 = 9,22$, $v_\infty = 2,57$ km/s): bardzo blisko liczby z transferu Hohmanna (5,68 km/s).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Lądownik wchodzi w atmosferę Marsa bez hamowania silnikiem. Którą mapę wykresu porkchop oglądasz najpierw i dlaczego prędkość przyłotu nie może być dowolnie duża?
■ ■ ■
- 2 Okres startowy trwa 21 dni, ale rakieta może stać na wyrzutni opóźniona przez pogodę albo usterki. Jak projektanci zwiększają odporność misji na opóźnienia?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

☰ METODA: OD DAT DO BUDŻETU MISJI

1. Efemerydy: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ planet w dniu startu i przylotu (JD).
2. Problem Lamberta: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ dla właściwego kierunku ruchu.
3. Prędkości nadmiarowe: $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_\oplus$, $\mathbf{v}_\infty^M = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_M$; $C_3 = |\mathbf{v}_\infty|^2$.
4. Sklejanie z lekcji 7: wylot i przylot przez hiperbole.
5. Siatka wszystkich par dat: wykres porkchop, okres startowy, wybór przelotu.

Przykład 6.1

Sprawdzenie solvera

Sprawdź solver Lamberta na danych z podręcznika i dodatkowo całkowaniem numerycznym.

- 1 Dane Curtisa: $\Delta t = 3600$ s; solver daje $\mathbf{v}_1 = [-5,9925; 1,9254; 3,2456]$ km/s.
- 2 Całkowanie RK4 z $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ przez 3600 s (krok 1 s) trafia w $\mathbf{r}_2$ z błędem 10^{-10} km, czyli praktycznie dokładnie.
- 3 Obie metody liczą coś innego (algebra przez z i całkowanie równania ruchu), więc zgodność jest niezależnym testem.

Wynik: zgodność z podręcznikiem do 4 cyfr i z całkowaniem do błędu zaokrągleń.

Sprawdzenie: energia i moment pędu policzone z $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ i z $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ są te same ✓.

Przykład 6.2

Okno 2026

Wyznacz najtańszy (w C_3) przelot na Marsa w 2026 roku.

- 1 Siatka: start od czerwca 2026 do marca 2027, czas lotu 120–400 dni, krok kilka dni; potem zagęszczenie wokół minimum.
- 2 Minimum: start 31 października 2026, lot 294 dni, przylot 21 sierpnia 2027; $C_3 = 9,13 \text{ km}^2/\text{s}^2$, v_∞ przy Marsie 2,69 km/s.
- 3 Kąt przelotu ok. 197° : typ II.

Wynik: start pod koniec października 2026, C_3 ok. $9 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

Sprawdzenie: Hohmann (orbity kołowe) daje $C_3 = 8,67$ i 259 dni: ten sam rząd wielkości, a różnice tłumaczy eliptyczność i nachylenie orbit ✓.

Przykład 6.3

Krótki przelot się nie opłaca

Ile kosztuje start 20 dni przed najlepszą datą okna 2026 z czasem lotu 200–250 dni?

- 1 Lot 200 dni: $C_3 = 38 \text{ km}^2/\text{s}^2$, v_∞ przy Marsie 7,7 km/s.
- 2 Lot 250 dni: $C_3 = 36 \text{ km}^2/\text{s}^2$, v_∞ 5,8 km/s.
- 3 W tym miejscu wykresu leży grzbiet wokół $\Delta\nu = 180^\circ$: koszt jest cztery razy większy niż w dolinie.

Wynik: skrócenie lotu o miesiąc–dwa przez złe dobranie daty kosztuje czterokrotnie C_3 .

Sprawdzenie: w symulacji te punkty leżą w jasnym (drogim) pasie między dolinami ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Krótszy lot jest zawsze droższy.”

Na wykresie porkchop są dwie doliny; krótszy przelot typu I bywa tańszy niż dłuższy przelot w pobliżu 180° .

× „Hohmann to najlepszy przelot na Marsa.”

W modelu kołowym tak; w rzeczywistości przelot przez dokładnie 180° wymaga obrotu płaszczyzny i jest drogi. Najlepsze przeloty mają kąt wyraźnie różny od 180° .

× „Minimum C_3 to najlepsza misja.”

Liczy się suma: wylot, przylot, ograniczenia rakiety i lądowania. Minimum C_3 może dać bardzo szybki przylot (okno 2031).

× „Okna co 780 dni są identyczne.”

Orbita Marsa jest eliptyczna: koszty i czasy lotu zmieniają się z cyklem ok. 15–17 lat.

× „Problem Lamberta rozwiązuje się wzorem.”

Wymaga iteracji (równanie przestępne); dobre programy łączą solidny start z szybką metodą Newtona.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Newton zamiast bisekcji.** Bisekcja potrzebuje ok. 60 kroków, Newton zwykle 5–10.
 Dlaczego wiele programów i tak zaczyna od bisekcji albo innego zabezpieczenia?

- 2 **Wiele obiegów.** Jak zmieni się wykres porkchop, jeśli dopuścimy przeloty z jednym pełnym obiegiem Słońca (czasy lotu 1,5–3 lata)?


3 Deklinacja asymptoty. v_∞ wylotu ma kierunek w przestrzeni. Dlaczego rakieta startująca z kosmodromu na szerokości $28,5^\circ$ ma kłopot, gdy deklinacja (kąt nad równikiem) asymptoty wynosi 45° ?

4 Twierdzenie Lamberta w praktyce. Skoro czas lotu zależy tylko od a , $r_1 + r_2$ i c , to jak wyznaczyć przelot o minimalnej energii między dwoma punktami?

5 Porkchop dla planety-olbrzyma. Jak wyglądałby wykres porkchop dla lotu na Jowisza bez asyst i dlaczego prawdziwe misje go nie używają w tej formie?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co jest daną, a co szukaną w problemie Lamberta?

Dane: r_1 , r_2 , Δt (i kierunek ruchu); szukane: v_1 , v_2 (orbita).

2 Co mówi twierdzenie Lamberta?

Czas lotu zależy tylko od a , $r_1 + r_2$ i cięciwy c .

3 Po co zmienne uniwersalne?

Jeden algorytm dla elipsy, paraboli i hiperboli; $z > 0$, $z = 0$, $z < 0$.

4 Co pokazuje wykres porkchop?

C_3 (albo v_∞ przylotu, suma Δv) w funkcji daty startu i czasu lotu.

5 Dlaczego przeloty przez 180° są drogie?

Płaszczyzna przelotu musi zawierać Słońce i obie planety; przy nachylonych orbitach to płaszczyzna prawie prostopadła do ekliptyki.

6 Kiedy są najbliższe okna na Marsa?

Ok. października–listopada 2026, grudnia 2028, lutego 2031, kwietnia 2033.

LAMBERT (ZMIENNE UNIWERSALNE)

$$A = \sin \Delta\nu \sqrt{r_1 r_2 / (1 - \cos \Delta\nu)}$$

$$y = r_1 + r_2 + A(zS - 1)/\sqrt{C}$$

$$F = (y/C)^{3/2} S + A\sqrt{y} - \sqrt{\mu}\Delta t = 0$$

$$f = 1 - y/r_1, g = A\sqrt{y/\mu}, \dot{g} = 1 - y/r_2$$

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1)/g, \mathbf{v}_2 = (\dot{g}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/g$$

PLANOWANIE

$$C_3 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_\oplus|^2, v_\infty^M = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_M|$$

$$\text{JD: J2000} = 2\,451\,545,0$$

$$\text{minimalna energia: } a_{\min} = (r_1 + r_2 + c)/4$$

$$\text{typ I: } \Delta\nu < 180^\circ, \text{ typ II: } > 180^\circ$$

$$\text{Mars 2026: 31.10, 294 d, } C_3 = 9,1 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 5.3 (problem Lamberta, algorytm 5.2) i rozdz. 8 (efemerydy planet i trajektorie międzyplanetarne).
- **Dla chętnych:** D. Izzo, „Revisiting Lambert’s problem” (*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2015): szybki i pewny algorytm używany w nowoczesnych programach; E. M. Standish, tabela przybliżonych elementów planet (JPL Solar System Dynamics).

Sonda dotarła do Marsa z prędkością kilku kilometrów na sekundę. Jeśli ma wylądować, musi tę prędkość wytracić, a najtańszym hamulcem jest atmosfera. Kolejna lekcja liczy wejście w atmosferę: przeciążenia, nagrzewanie i to, dlaczego osłona termiczna jest tępa, a nie ostra.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Jako funkcja a czas lotu nie jest monotoniczny: elipsy o tym samym a przechodzące przez oba punkty są dwie (dwie gałęzie, zadanie 1.3). Dobrą zmienną jest z (zmienna uniwersalna, część 2): bez pełnych obiegów czas lotu jest rosnącą funkcją z , więc każdy czas daje jedno z , czyli jedną orbitę. Z pełnym obiegiem czas lotu jako funkcja z ma minimum; dany czas (większy od minimum) osiąga się przy dwóch wartościach z , mniejszy od minimum przy żadnej.
2. $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ są (prawie) przeciwne, więc ich iloczyn wektorowy, czyli normalna do płaszczyzny przelotu, jest źle określony. Jeśli Mars jest choć trochę nad ekliptyką, płaszczyzna musi przejść przez Słońce, Ziemię i Marsa: jest nachylona prawie prostopadle do ekliptyki. Sonda musiałaby wystartować z ogromną składową prostopadłą: koszt rośnie gwałtownie.
3. Przez dwa punkty przechodzą (dla $a > a_{\min}$) dwie elipsy o tej samej wielkiej półosi, z różnymi e i położeniem perycentrum. Twierdzenie Lamberta mówi, że czas lotu zależy tylko od a , $r_1 + r_2$ i c , ale osobno dla każdej z dwóch gałęzi (we wzorze Lagrange'a kąty α i $2\pi - \alpha$): czasy na obu elipsach są różne. Dlatego samo a nie wystarcza jako niewiadoma; algorytmy szukają zmiennej, która jednoznacznie wyznacza orbitę, np. z w zmiennych uniwersalnych.

Zadania • część 2

1. Z rozwinięć Taylora: $1 - \cos x = x^2/2 - x^4/24 + \dots$, więc $C = 1/2 - z/24 + \dots$; $x - \sin x = x^3/6 - x^5/120 + \dots$, więc $S = 1/6 - z/120 + \dots$. W programie trzeba to uwzględnić, inaczej przy $z \approx 0$ dzielimy zero przez zero.
2. $r_1 = 11\,376$ km, $v_1 = 7,082$ km/s, $\varepsilon = 25,08 - 35,04 = -9,96$ km²/s², $a = 20\,000$ km; z wektora mimośrod $e = 0,434$. Orbita eliptyczna, $z > 0$.
3. W F występują $\sqrt{y}$ i $(y/C)^{3/2}$; przy $y < 0$ są nieokreślone. Fizycznie y odpowiada (z dokładnością do czynnika) wielkości związanej z parametrem orbity, który musi być dodatni. Dla $A > 0$ i bardzo ujemnych z y robi się ujemne, dlatego algorytm przesuwą dolną granicę, aż $y > 0$.

Zadania • część 3

1. $360^\circ \cdot 36\,525/19\,140,30 = 686,98$ dnia.
2. 294 dni. W JD odejmuje się po prostu liczby; to cała zaleta tej rachuby.
3. Błąd położenia planet z elementów średnich (bez temp zmian a , e , i , ϖ , Ω , jak w naszym programie) to dziesiątki tysięcy km, ułamek stopnia; zmienia C_3 o drobne procenty, więc kształt okna i daty są dobre. Wejście na orbitę wymaga trafienia w perycentrum hiperboli z dokładnością do kilkunastu km, a to wymaga efemeryd numerycznych i bieżącej nawigacji sondy.

Zadania • część 4

1. 31.10.2026 → 2.12.2028: 763 dni; okres synodyczny 780 dni. Różnica bierze się z eliptyczności orbity Marsa: odstęp między oknami zmienia się od ok. 760 do ok. 815 dni.
2. Koszt obrotu płaszczyzny rośnie stopniowo, gdy kąt przelotu zbliża się do 180° : płaszczyzna przelotu musi zawierać Słońce, Ziemię i Marsa, a nachylenie tej płaszczyzny względem ekliptyki rośnie jak

$\beta_M / \sin \Delta \nu$ (gdzie β_M to szerokość ekliptyczna Marsa). Już kilka-kilkanaście stopni od 180° nachylenie i koszt są duże.

3. $\sqrt{v_\infty^2 + 23,18} - 3,40$: dla 5,56 km/s 3,95 km/s, dla 2,69 km/s 2,11 km/s. W 2031 roku trzeba wybrać inny punkt wykresu (kompromis), wejść w atmosferę albo zaakceptować większe C_3 .

Zadania · część 5

1. Przede wszystkim C_3 (masa, którą rakieta wyniesie), a prędkość przylotu jako ograniczenie: prędkość wejścia w atmosferę to $\sqrt{v_\infty^2 + 2\mu_M/r}$ (ok. 5,5–6 km/s), a obciążenia termiczne i przeciążenia rosną z nią szybko (lekcja 10 Wejście w atmosferę). Osłona termiczna jest projektowana na konkretny zakres.
2. Projektują sondę na nieco większe C_3 (lżejsza sonda albo mocniejsza rakieta), co poszerza okres startowy do kilku tygodni, i dla każdego dnia mają przygotowany inny przelot (inny czas lotu, inna data przylotu). Okno marsjańskie, które przypadnie, wraca dopiero po ok. 26 miesiącach.

Zadania do przemyślenia

1. $F(z)$ ma ograniczoną dziedzinę ($y > 0$, $z < 4\pi^2$ dla jednego obiegu) i bywa bardzo stroma; Newton z złego startu wyskakuje poza dziedzinę albo oscyluje.
2. Rozwiązanie hybrydowe: przedział z gwarantowaną zmianą znaku i Newton, który wraca do bisekcji, gdy krok wyprowadza poza przedział (metoda Brenta). Przy milionach wywołań w wykresie porkchop liczy się i szybkość, i pewność.
2. 1. Dla każdej pary dat pojawiają się dwa dodatkowe rozwiązania (zadanie 1.1); powstają nowe doliny przy długich czasach lotu.
2. Takie przeloty mogą mieć mniejsze C_3 albo v_∞ przy przylocie w latach, gdy zwykle okno jest złe, kosztem czasu. W połączeniu z manewrem w głębokiej przestrzeni (ang. *deep space maneuver*) dają elastyczność dat.
3. 1. Hiperbola wylotu leży w płaszczyźnie orbity parkingowej, a jej asymptota tworzy z równikiem kąt nie większy niż nachylenie tej orbity. Z $28,5^\circ$ szerokości najmniejsze nachylenie orbity to $28,5^\circ$, ale da się osiągnąć większe (start bardziej na północ).
2. Deklinacja 45° wymaga orbity parkingowej nachylonej co najmniej o 45° : rakieta traci część prędkości z obrotu Ziemi i ładunek maleje. Projektanci patrzą więc także na mapę deklinacji, nie tylko C_3 .
4. 1. Najmniejsza energia to najmniejsze a , przy którym elipsa jeszcze przechodzi przez oba punkty: $a_{\min} = (r_1 + r_2 + c)/4$ (wtedy drugi ogniskowy punkt leży na cięciwie).
2. Czas lotu po tej elipsie jest określony; inny czas wymaga większego a (droższej orbity). To daje dolną granicę C_3 dla danej geometrii, niezależną od daty.
5. 1. Okna co ok. 13 miesięcy, czasy lotu 2–3 lata, C_3 powyżej ok. $75\text{--}80 \text{ km}^2/\text{s}^2$: wykres podobny kształtem, ale z ogromnymi wartościami.
2. Takie C_3 ogranicza masę sondy do małych wartości, więc prawdziwe misje łączą problemy Lamberta dla wielu odcinków (Ziemia–Wenus–Ziemia–Jowisz) i szukają sekwencji z asystami; zamiast jednego wykresu przeszukuje się drzewo możliwych przelotów.

Astronautyka · Lekcja 9: Problem Lamberta i wykres porkchop · Źródła: H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 5.3, 8); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. o czasie lotu i trajektoriach międzyplanetarnych); E. M. Standish, przybliżone elementy planet (JPL). Daty okien z efemeryd z elementów średnich, z dokładnością do kilku dni. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a9.py).