

Asysta grawitacyjna

Sonda przelatuje obok planety i wylatuje z tą samą prędkością względem planety, z jaką przyleciała. Tylko kierunek się zmienił. A jednak względem Słońca może lecieć o kilka, a nawet kilkanaście kilometrów na sekundę szybciej. Ta lekcja wyjaśnia ten „darmowy napęd” trójkątem prędkości, liczy, ile da się wycisnąć z przelotu obok Jowisza, Ziemi czy Wenus, i pokazuje, jak przeloty zmieniają kierunek lotu, hamują sondy lecące do Słońca i wyprowadzają je z płaszczyzny ekliptyki.

CZAS

ok. 1,5 h teorii +
ok. 2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz. 8;
C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
o trajektoriach
międzyplanetarnych;
U. Walter,
Astronautics,
rozdz. o asystach
grawitacyjnych

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Wielka Podróż
- 1 Przelot w układzie planety
- 2 Widok ze Słońca: trójkąt prędkości
- 3 Przykład: Jowisz jako proca
- 4 Hamowanie i zmiana płaszczyzny
- 5 Przelot z napędem
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Wielka Podróż

W 1965 roku Gary Flandro, student pracujący latem w JPL, zauważył, że pod koniec lat 70. Jowisz, Saturn, Uran i Neptun ustawia się tak, że jedna sonda może odwiedzić wszystkie cztery, odbijając się od każdej planety do następnej. Takie ustawienie zdarza się mniej więcej raz na 175 lat. Kilka lat wcześniej Michael Minovitch, także w JPL, opracował rachunki takich przelotów.

Z wielkiego programu zostały dwie sondy Voyager. Voyager 2, wystrzelony w 1977 roku, przeleciał obok Jowisza (1979), Saturna (1981), Urana (1986) i Neptuna (1989). Bez asyst lot do Neptuna po elipsie Hohmanna trwały ok. 30 lat; Voyager 2 doleciał w 12.

Pytanie na start. Sonda zbliża się do Jowisza z prędkością 5,6 km/s względem planety i po przelocie oddala się z prędkością 5,6 km/s względem planety. Skąd sonda wzięła energię, żeby względem Słońca przyspieszyć z 7,4 do 17,9 km/s? Odpowiedź w części 2.

1

Przelot w układzie planety

W sferze wpływu planety sonda porusza się po hiperboli (lekcje 1 Zagadnienie dwóch ciał i równanie orbity i 7 Sfery wpływu i podróż międzyplanetarna). Energia względem planety jest stała, więc prędkość nadmiarowa przy wylocie ma tę samą długość co przy nadlocie. Zmienia się tylko kierunek: asymptoty hiperboli tworzą kąt obrotu δ .

PRZELOT OBOK PLANETY

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}, \quad |\Delta \mathbf{v}| = |\mathbf{v}_\infty^+ - \mathbf{v}_\infty^-| = 2v_\infty \sin \frac{\delta}{2} = \frac{2v_\infty}{e}.$$

Bliższy przelot (mniejsze r_p) i masywniejsza planeta (większe μ) dają większy obrót. Kierunek obrotu wybiera strona przelotu.

Przy Jowiszu z $v_\infty = 5,64$ km/s: przy perycentrum $3R_J$ $e = 1,054$, $\delta = 143^\circ$, $|\Delta \mathbf{v}| = 10,7$ km/s; przy $30R_J$ $\delta = 81^\circ$, $|\Delta \mathbf{v}| = 7,3$ km/s. Przy Ziemi z $v_\infty = 5$ km/s i perycentrum 300 km: $\delta = 90^\circ$, $|\Delta \mathbf{v}| = 7,05$ km/s. Wektor $\Delta \mathbf{v}$ jest „za darmo”: nie kosztuje paliwa, tylko precyzji nawigacji (perycentrum trzeba trafić z dokładnością, która zależy od planety i v_∞ : przy Jowiszu wystarczy ok. tysiąca kilometrów, przy małych ciałach i bliskich przelotach potrzeba kilku kilometrów).

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Sonda mija Jowisza ($\mu = 1,267 \cdot 10^8 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_J = 71\,492 \text{ km}$) z $v_\infty = 5,64 \text{ km/s}$ w odległości $3R_J$ od środka. Policz e , δ i $|\Delta \mathbf{v}|$.

2 Przelot obok Ziemi 300 km nad powierzchnią z $v_\infty = 5$ km/s. Ile wynosi kąt obrotu?

3 Dlaczego długość v_∞ jest przy wylocie taka sama jak przy nadlocie? Co by ją zmieniło?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Widok ze Słońca: trójkąt prędkości

Względem Słońca prędkość sondy to $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{v}_\infty$, gdzie $\mathbf{V}_p$ to prędkość planety. Przelot obraca $\mathbf{v}_\infty$, a $\mathbf{V}_p$ zostaje (planeta jest ogromnie masywniejsza). Końce wektorów $\mathbf{V}$ przed i po leżą na okręgu o promieniu v_∞ wokół końca $\mathbf{V}_p$: długość $\mathbf{V}$ może się zmienić, i to dużo.

🔧 ZMIANA ENERGII HELIOCENTRYCZNEJ

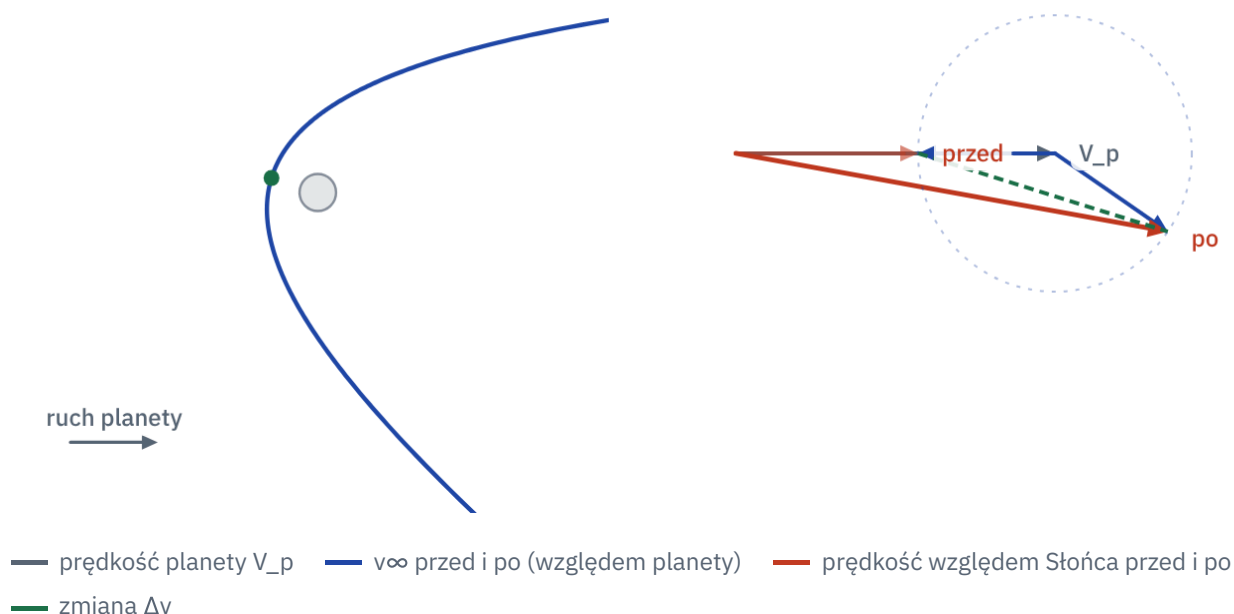
$$\Delta\left(\frac{V^2}{2}\right) = \mathbf{V}_p \cdot \Delta\mathbf{v}, \quad |\Delta\mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} \quad (\text{przy } v_\infty^2 = \mu/r_p).$$

Energia rośnie, gdy $\Delta\mathbf{v}$ ma składową wzdłuż ruchu planety: sonda przelatuje *za* planetą. Przelot przed planetą hamuje.

Odpowiedź na pytanie z prologu: od Jowisza. W układzie Słońca planeta wykonuje pracę nad sondą, bo pole grawitacyjne poruszającej się planety nie jest polem statycznym. Planeta traci dokładnie tyle energii, ile zyskuje sonda; przy masie sondy 800 kg Jowisz zwalnia o ok. $4,5 \cdot 10^{-24}$ km/s. To jak odbicie piłki od nadjeżdżającej ciężarówki: względem ciężarówki piłka odbija się z tą samą prędkością, względem ziemi leci dużo szybciej.

Największe możliwe $|\Delta\mathbf{v}|$ to prędkość kołowa przy powierzchni planety: Jowisz 42,1 km/s, Saturn 25,1, Ziemia 7,9, Wenus 7,3, Mars tylko 3,5 km/s. Dlatego Jowisz jest najważniejszą „stacją przesiadkową” Układu Słonecznego, a Mars prawie się do tego nie nadaje.

SYMULACJA 1 Asysta grawitacyjna. Lewy panel: hiperbola w układzie planety (w skali promieni planety). Prawy panel: prędkości względem Słońca: prędkość planety V_p , v_∞ przed i po (na okręgu o promieniu v_∞) i wynikowe prędkości sondy. Zmień stronę przelotu i kierunek nadlotu i znajdź ustawienie, które daje największy przyrost prędkości.



kąt obrotu v_∞ 145,5°

$|\Delta v|$ (za darmo) 10,70 km/s

prędkość względem Słońca: przed → po 7,46 → 17,96 km/s

zmiana energii heliocentrycznej +133,4 km²/s²

ucieczka z Układu Słonecznego w tej odległości 18,47 km/s

Względem planety prędkość tylko zmieniła kierunek, ale względem Słońca wzrosła: sonda „odebrała” planecie odrobinę energii orbitalnej. Planeta prawie tego nie zauważy.

Stan na rysunku: Jowisz, $v_\infty = 5,6$ km/s, $r_p = 2,65 R$, kierunek nadlotu 180°, obrót w lewo; $|V|$ 7,46 → 17,96 km/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pokaż, że $|\Delta \mathbf{v}| = 2v_\infty/e$ jest największe przy $v_\infty^2 = \mu/r_p$ i wynosi wtedy $\sqrt{\mu/r_p}$.

- 2 Sprawdź wzór $\Delta(V^2/2) = \mathbf{V}_p \cdot \Delta \mathbf{v}$ dla $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{v}_\infty$ przy stałym $|\mathbf{v}_\infty|$.

- 3 O ile zmienia się prędkość Jowisza ($1,9 \cdot 10^{27}$ kg), gdy wektor prędkości sondy o masie 800 kg zmienia się o $|\Delta \mathbf{v}| = 10,7$ km/s?

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

3 Przykład: Jowisz jako proca

Sonda przylatuje do Jowisza po elipsie Hohmanna. W aphelium ma względem Słońca 7,42 km/s, Jowisz 13,06 km/s, więc $\mathbf{v}_\infty$ ma 5,64 km/s i jest skierowane do tyłu (Jowisz dogania sondę). Przelot w odległości $3R_J$ obraca $\mathbf{v}_\infty$ o 143° , prawie do przodu: prędkość względem Słońca rośnie do 17,90 km/s. Prędkość ucieczki z Układu Słonecznego w odległości Jowisza to 18,47 km/s: sonda prawie ucieka, ze stosunkowo wolnego transferu Hohmanna.

Szybszy przylot daje więcej. Z $v_\infty = 10$ km/s i perycentrum $3R_J$ największy przyrost prędkości (ok. 17 km/s) daje nadlot prawie od tyłu planety (sonda wolniejsza od Jowisza): z 3,5 do 20,5 km/s, czyli ucieczka z Układu Słonecznego. Jeśli nadlot jest skierowany bardziej do przodu, prędkość po przelocie może sięgnąć nawet $V_J + v_\infty = 23$ km/s, ale wtedy sonda już przed przelotem leciała szybko. Tak lecą sondy do planet zewnętrznych i dalej: Jowisz zamienia lot trwający dekady w lot trwający lata.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz prędkość sondy względem Słońca w aphelium elipsy Hohmanna Ziemia–Jowisz ($a_t = 3,101$ AU) i prędkość Jowisza.

- 2 Po obrocie $\mathbf{v}_\infty$ o $143,2^\circ$ (z kierunku „do tyłu”) policz prędkość względem Słońca.

- 3 Czy po tym przelocie sonda ucieknie z Układu Słonecznego? Co trzeba by zmienić?

□□□ podstawowe □□□ średnie □□□ feynmanowskie

4 Hamowanie i zmiana płaszczyzny

Asysta nie musi przyspieszać. Przelot przed planetą (względem jej ruchu) zmniejsza energię heliocentryczną: tak hamują sondy lecące ku Słońcu. Sonda MESSENGER, zanim weszła na orbitę

Merkurego, przeleciała raz obok Ziemi, dwa razy obok Wenus i trzy razy obok Merkurego; sonda Parker Solar Probe zbliża się do Słońca dzięki serii przelotów obok Wenus.

Asysta może też obrócić płaszczyznę orbity: wektor $\Delta \mathbf{v}$ nie musi leżeć w płaszczyźnie ekliptyki. Sonda Ulysses przeleciała w 1992 roku obok Jowisza tak, że wyszła na orbitę wokół Słońca nachyloną o ok. 80° i przeleciała nad biegunami Słońca. Bezpośrednio z Ziemi kosztowałoby to ponad 30 km/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Sonda ma zmniejszyć swoją prędkość względem Słońca przelotem obok Wenus. Po której stronie planety (przed nią czy za nią w kierunku jej ruchu) powinna przelecieć?
- 2 Ile kosztowałoby bezpośrednio nadanie sondzie nachylenia 80° względem ekliptyki, przy prędkości heliocentrycznej Ziemi 29,8 km/s? Porównaj z dostępnym $|\Delta \mathbf{v}|$ przy Jowiszu.
- 3 Dlaczego MESSENGER potrzebował aż sześciu przelotów, a nie jednego bliskiego przelotu obok Wenus?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

5 Przelot z napędem

Najlepsze miejsce na impuls silnika to perycentrum przelotu: tam prędkość względem planety jest największa, więc ten sam impuls daje najwięcej energii (efekt Obertha, lekcja 5 Manewry orbitalne: transfer Hohmanna i zmiana płaszczyzny orbity). Przy Jowiszu z $v_\infty = 5,64$ km/s i perycentrum $1,1R_J$ prędkość w perycentrum wynosi ok. 57 km/s. Impuls 0,5 km/s zwiększa v_∞ do 9,44 km/s:

$$v_\infty^+ = \sqrt{(v_p + \Delta v)^2 - \frac{2\mu}{r_p}}, \quad v_p = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}}.$$

To prawie 4 km/s nadmiaru za pół kilometra na sekundę paliwa. W praktyce perycentrum tak blisko Jowisza oznacza ogromne dawki promieniowania, więc sondy przelatują dalej.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Policz v_∞^+ dla impulsu 0,5 km/s w perycentrum $1,1R_J$ przy $v_\infty^- = 5,64$ km/s.

2

Ten sam impuls 0,5 km/s daleko od Jowisza zwiększyłby v_∞ o 0,5 km/s. Skąd różnica 3,3 km/s?

podstawowe średnie feynmanowskie

☰ METODA: PROJEKT PRZELOTU

1. **Prędkości przed:** $\mathbf{v}_{\infty}^{-} = \mathbf{V}^{-} - \mathbf{V}_p$.
2. **Potrzebny obrót:** kąt między $\mathbf{v}_{\infty}^{-}$ a wymaganym $\mathbf{v}_{\infty}^{+}$ (tej samej długości!).
3. **Perycentrum:** z $\sin(\delta/2) = 1/e$ i $e = 1 + r_p v_{\infty}^2 / \mu$; sprawdzić, czy r_p jest nad atmosferą i poza strefą promieniowania.
4. **Prędkość po:** $\mathbf{V}^{+} = \mathbf{V}_p + \mathbf{v}_{\infty}^{+}$; energia, nowa orbita heliocentryczna.
5. **Jeśli długości v_{∞} się nie zgadzają:** przelot z napędem albo inny cel.

Przykład 6.1

Jakie perycentrum dla zadanego obrotu?

Przy Jowiszu $v_{\infty} = 5,64 \text{ km/s}$ trzeba obrócić o 100° . Jakie perycentrum?

- 1 $e = 1 / \sin 50^{\circ} = 1,305$.
- 2 $r_p = (e - 1)\mu / v_{\infty}^2 = 0,305 \cdot 1,267 \cdot 10^8 / 31,81 = 1,22 \cdot 10^6 \text{ km} = 17 R_J$.

Wynik: perycentrum ok. 1,2 mln km, poza najsilniejszymi pasami promieniowania.

Sprawdzenie: w symulacji przy $17R_J$ kąt obrotu to ok. 100° ✓.

Przykład 6.2

Ziemia jako proca

Sonda wraca w okolice Ziemi z $v_\infty = 5 \text{ km/s}$ i ma zwiększyć energię. Ile może zyskać, przelatując 300 km nad Ziemią?

- 1 $\delta = 89,6^\circ$, $|\Delta \mathbf{v}| = 7,05 \text{ km/s}$.
- 2 Jeśli $\mathbf{v}_\infty^-$ jest prostopadłe do ruchu Ziemi i obrót kieruje $\mathbf{v}_\infty^+$ wzdłuż ruchu Ziemi, $\mathbf{V}_p \cdot \Delta \mathbf{v} = 29,8 \cdot 5 = 149 \text{ km}^2/\text{s}^2$.
- 3 Prędkość względem Słońca rośnie z $\sqrt{29,8^2 + 5^2} = 30,2$ do $34,8 \text{ km/s}$.

Wynik: ok. 4,6 km/s przyrostu prędkości heliocentrycznej za darmo.

Sprawdzenie: $(34,8^2 - 30,2^2)/2 = 149 \text{ km}^2/\text{s}^2 \checkmark$. Takie przeloty obok Ziemi miały m.in. sondy Galileo i Rosetta.

Przykład 6.3

Mars jako słaba proca

Ile najwięcej może dać przelot obok Marsa?

- 1 $|\Delta \mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{\mu/R} = \sqrt{42\,828/3396} = 3,55 \text{ km/s}$, i to przy przelocie tuż nad powierzchnią i $v_\infty = 3,55 \text{ km/s}$.
- 2 Z bezpiecznym perycentrum 300 km nad powierzchnią i $v_\infty = 5 \text{ km/s}$: $e = 1 + 3696 \cdot 25/42\,828 = 3,16$, $|\Delta \mathbf{v}| = 3,17 \text{ km/s}$.

Wynik: 3–3,5 km/s, czyli ok. dwa razy mniej niż przy Ziemi czy Wenus w podobnych warunkach.

Sprawdzenie: zależy od $\sqrt{\mu/R}$, a Mars ma małą masę $\checkmark$. Przeloty obok Marsa stosuje się rzadko (np. Dawn w drodze do Westy).

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Sonda przyspiesza, bo spada na planetę.”

Spadając, przyspiesza, a odlatując, zwalnia o dokładnie tyle samo. Zysk bierze się z ruchu planety względem Słońca, nie z jej przyciągania samego w sobie.

× „Asysta zawsze przyspiesza.”

Może przyspieszać, hamować albo tylko obracać kierunek; decyduje strona przelotu i geometria.

× „Im bliżej planety, tym więcej.”

Bliżej to większy obrót, ale $|\Delta \mathbf{v}|$ ma maksimum przy $v_\infty^2 = \mu/r_p$; przy zadanym v_∞ zysk rośnie z bliskością, ale ograniczają go atmosfera i promieniowanie.

× „Asysta to darmowa energia.”

Energię oddaje planeta. Darmowa jest dla sondy, ale wymaga ustawienia planet, które zdarza się rzadko.

× „Na Merkurego leci się najprościej, bo jest blisko Słońca.”

Spadek ku Słońcu daje ogromną nadwyżkę prędkości, którą trzeba wytracić: Merkury wymaga wielu przelotów.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Kryterium Tisseranda.** W zagadnieniu trzech ciał (Słońce, planeta, sonda) przelot nie zmienia pewnej kombinacji elementów orbity sondy. Wyjaśnij, dlaczego v_∞ względem planety jest tą „niezmienną”, i co z tego wynika dla planowania serii przelotów.

- 2 **Odbicie od ciężarówki.** Piłka leci z prędkością 10 m/s naprzeciw ciężarówce jadącej 20 m/s i odbija się sprężysto. Z jaką prędkością odlatuje względem drogi? Jakie są analogie i różnice z asystą?
- 3 **Anomalia przelotu.** Przy kilku przelotach obok Ziemi (np. Galileo, NEAR) zmierzono v_{∞}^+ różne od v_{∞}^- o kilka do kilkunastu mm/s, czego model nie przewidywał. Jakie zjawiska mogłyby dać taki efekt i jak go zbadać?
- 4 **Dlaczego nie od Słońca?** Słońce jest najmasywniejsze. Czy sonda może zyskać prędkość przelotem obok Słońca?
- 5 **Precyzja.** Przy Jowiszu $\partial\delta/\partial r_p$ dla $r_p = 3R_J$, $v_{\infty} = 5,64$ km/s. Jak dokładnie trzeba trafić perycentrum, żeby błąd kierunku po przelocie był mniejszy niż $0,1^\circ$?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Co się zmienia, a co nie, w układzie planety?

Długość v_{∞} stała, kierunek obrócony o δ .

- 2 Wzór na kąt obrotu?

$$\sin(\delta/2) = 1/e, e = 1 + r_p v_{\infty}^2 / \mu.$$

- 3 Skąd sonda bierze energię?

Od planety, która porusza się względem Słońca: $\Delta(V^2/2) = \mathbf{V}_p \cdot \Delta\mathbf{v}$.

- 4 Ile najwięcej może dać przelot?

$$|\Delta\mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{\mu/r_p}: \text{Jowisz ok. 42, Ziemia ok. 8, Mars ok. 3,5 km/s.}$$

- 5 Jak przelotem zahamować?

Przelecieć przed planetą (względem jej ruchu), żeby $\Delta\mathbf{v}$ było przeciwne do $\mathbf{V}_p$.

6 Po co silnik w perycentrum przelotu?

Efekt Obertha: mały impuls przy dużej prędkości daje duży przyrost v_{∞} .

PRZELOT

$$e = 1 + r_p v_\infty^2 / \mu, \sin(\delta/2) = 1/e$$

$$|\Delta \mathbf{v}| = 2v_\infty \sin(\delta/2) = 2v_\infty / e$$

$$|\Delta \mathbf{v}|_{\max} = \sqrt{\mu/r_p} \text{ przy } v_\infty^2 = \mu/r_p$$

$$r_p = (e - 1)\mu/v_\infty^2$$

SŁOŃCE I NAPĘD

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{v}_\infty; \Delta(V^2/2) = \mathbf{V}_p \cdot \Delta \mathbf{v}$$

za planetą: przyspieszenie; przed planetą:
hamowanie

$$\text{z napędem: } v_\infty^+ = \sqrt{(v_p + \Delta v)^2 - 2\mu/r_p}$$

ucieczka z Układu Słonecznego: $\sqrt{2} V_p$
(Jowisz: 18,5 km/s)

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 8 (przeloty obok planet); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. o trajektoriach międzyplanetarnych.
- **Dla chętnych:** materiały JPL o misjach Voyager, Galileo (trajektoria VEEGA), MESSENGER i Cassini (VVEJGA): rzeczywiste sekwencje przelotów i ich uzasadnienie.

Do tej pory zakładaliśmy kołowe orbity planet i transfery Hohmanna. Prawdziwy projekt misji zaczyna się od konkretnych dat: start 20 lipca, przylot 18 lutego. Jaka orbita łączy dwa punkty w zadanym czasie? To problem Lamberta, a jego rozwiązania dla wszystkich par dat składają się w wykres „porkchop”, od którego zaczyna się planowanie każdej misji planetarnej.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $e = 1 + 214\,476 \cdot 31,81/1,267 \cdot 10^8 = 1,054$; $\delta = 2 \arcsin(1/1,054) = 143,2^\circ$; $|\Delta \mathbf{v}| = 2 \cdot 5,64/1,054 = 10,7$ km/s.
2. $e = 1 + 6678 \cdot 25/398\,600 = 1,419$, $\delta = 2 \arcsin(0,705) = 89,6^\circ$, $|\Delta \mathbf{v}| = 7,05$ km/s.
3. W układzie planety (w przybliżeniu inercjalnym w czasie przelotu) działa tylko pole zachowawcze planety: energia $v^2/2 - \mu/r$ jest stała, a daleko od planety $\mu/r \rightarrow 0$, więc v_∞ jest ta sama. Zmieniłyby ją: silnik (przelot z napędem, część 5), opór atmosfery albo przyciąganie księżyców planety.

Zadania · część 2

1. $|\Delta \mathbf{v}| = \frac{2v_\infty}{1+r_p v_\infty^2/\mu}$. Pochodna po v_∞ znika, gdy $1 + kv^2 - 2kv^2 = 0$ z $k = r_p/\mu$, czyli $v^2 = \mu/r_p$. Wtedy $e = 2$, $\delta = 60^\circ$ i $|\Delta \mathbf{v}| = 2v/2 = \sqrt{\mu/r_p}$. Wolniejsza sonda obraca się bardziej, ale ma mały wektor; szybsza ma duży wektor, ale obraca się mało.
2. $V^2 = V_p^2 + 2\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{v}_\infty + v_\infty^2$. Przy stałych V_p i $|\mathbf{v}_\infty|$ zmienia się tylko środkowy wyraz: $\Delta(V^2/2) = \mathbf{V}_p \cdot (\mathbf{v}_\infty^+ - \mathbf{v}_\infty^-) = \mathbf{V}_p \cdot \Delta \mathbf{v}$. W skrypcie a8.py dla Jowisza: $132,6 \text{ km}^2/\text{s}^2$ oboma sposobami.
3. Zachowanie pędu: $\Delta V_J \approx 800 \cdot 10,7/1,9 \cdot 10^{27} = 4,5 \cdot 10^{-24}$ km/s. Nie do zmierzenia. Dokładniej oddaje się energię, ale rząd wielkości ten sam.

Zadania · część 3

1. $V_J = 29,78/\sqrt{5,203} = 13,06$ km/s. W aphelium $V = 29,78\sqrt{2/5,203 - 1/3,101} = 7,42$ km/s. $v_\infty = 5,64$ km/s do tyłu.
2. $\mathbf{v}_\infty^+$ tworzy z kierunkiem ruchu Jowisza kąt $180^\circ - 143,2^\circ = 36,8^\circ$. $V^2 = 13,06^2 + 5,64^2 + 2 \cdot 13,06 \cdot 5,64 \cos 36,8^\circ = 170,6 + 31,8 + 118,0 = 320,4$, $V = 17,90$ km/s.
3. Ucieczka w odległości 5,2 AU wymaga $\sqrt{2} \cdot 13,06 = 18,47$ km/s: zabrakło 0,57 km/s. Wystarczy szybszy przylot (większe v_∞ , np. $v_\infty = 8$ km/s przy nadlocie prawie od tyłu daje ok. 19–20 km/s), lepszy kierunek nadlotu albo mały impuls silnika w perycentrum (część 5).

Zadania · część 4

1. Przed planetą: wtedy $\Delta \mathbf{v}$ jest skierowane przeciwnie do ruchu planety i $\mathbf{V}_p \cdot \Delta \mathbf{v} < 0$, więc energia heliocentryczna maleje.
2. Zmiana płaszczyzny przy 29,8 km/s o 80° : $2 \cdot 29,8 \sin 40^\circ = 38$ km/s, niemożliwe dla rakiety. Przy Jowiszu prędkość heliocentryczna sondy jest mała (ok. 7–10 km/s), a obrót $\mathbf{v}_\infty$ daje $|\Delta \mathbf{v}|$ ponad 10 km/s, prawie prostopadle do ekliptyki. Dlatego Ulysses poleciał najpierw do Jowisza.
3. Jeden przelot daje najwyżej $\sqrt{\mu/r_p}$, przy Wenus ok. 7 km/s, i tylko jeśli v_∞ jest akurat równe 7 km/s. Bezpośredni lot na Merkurego zostawia przy nim $v_\infty \approx 9,6$ km/s, a wejście na orbitę wymaga zbitcia jej prawie do zera. Każdy przelot zmniejsza v_∞ względem następnego celu o część; przeloty obok samego Merkurego zmniejszają v_∞ względem Merkurego, aż hamowanie silnikiem staje się wykonalne.

Zadania · część 5

1. $2\mu/r_p = 2 \cdot 1,267 \cdot 10^8 / 78\,641 = 3222 \text{ km}^2/\text{s}^2$; $v_p = \sqrt{31,8 + 3222} = 57,04 \text{ km/s}$; $v_\infty^+ = \sqrt{57,54^2 - 3222} = \sqrt{89,1} = 9,44 \text{ km/s}$.
2. Energia rośnie o $v\Delta v + \Delta v^2/2$: w perycentrum o $57 \cdot 0,5 = 28,6 \text{ km}^2/\text{s}^2$, daleko o $5,64 \cdot 0,5 = 2,8 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Nadmiar energii $v_\infty^2/2$ rośnie z 15,9 do 44,6 km^2/s^2 . Paliwo spalane w perycentrum ma ogromną energię kinetyczną względem planety; sonda ją przejmuje.

Zadania do przemyslenia

1. Przelot zmienia kierunek, ale nie długość v_∞ . Wszystkie orbity heliocentryczne osiągalne jednym przelotem mają końce wektora $\mathbf{V}$ na sferze o promieniu v_∞ wokół $\mathbf{V}_p$. Parametr Tisseranda $T = a_p/a + 2\sqrt{(a/a_p)(1-e^2)} \cos i$ jest (w przybliżeniu) funkcją tylko v_∞ : $T \approx 3 - v_\infty^2/V_p^2$.
 2. Wniosek: żeby zmienić v_∞ względem planety, potrzeba innej planety albo silnika. Seria przelotów obok Wenus i Ziemi „przesuwa” sondę między poziomiami Tisseranda różnych planet; tak planuje się trasy w rodzaju VEEGA (Wenus–Ziemia–Ziemia) sondy Galileo.
1. Względem ciężarówki piłka nadlatuje z 30 m/s i odbija się z 30 m/s; względem drogi $30 + 20 = 50 \text{ m/s}$. To asysta z obrotem 180° .
 2. Różnica: grawitacja nie odbija o 180° (to wymagałoby $e = 1$, czyli przelotu przez środek planety); obrót jest mniejszy, a energia zależy od kąta. Podobieństwo: w układzie „przeszkody” energia piłki jest stała, zysk pochodzi z ruchu przeszkody.
1. Kandydaci: niedokładny model pola grawitacyjnego Ziemi (harmoniczne), opór, ciśnienie promieniowania, ciepło sondy, błędy modelu śledzenia (np. efekty relatywistyczne, refrakcja). Zjawisko jest małe w porównaniu z typowymi niepewnościami i dotąd nie ma pewnego wyjaśnienia.
 2. Badanie: porównanie wielu przelotów o różnej geometrii (np. zależność od szerokości geograficznej nadlotu i wylotu), niezależne śledzenie (różne stacje, różne pasma), sondy z bardzo dobrze znanym modelem sił.
1. W układzie heliocentrycznym Słońce jest (prawie) nieruchome: przelot nie zmienia energii sondy względem Słońca, tylko kierunek. Asysta wymaga ruchu ciała względem układu, w którym liczymy energię.
 2. Względem Galaktyki Słońce się porusza, więc przelot zmieniłby prędkość względem Galaktyki, ale to nie pomaga w lotach w Układzie Słonecznym. Pomaga natomiast przelot z napędem blisko Słońca (Oberth): duża prędkość w peryhelium.
1. $\delta = 2 \arcsin(1/e)$, $e = 1 + r_p v^2/\mu$: $\frac{d\delta}{dr_p} = -\frac{2}{e\sqrt{e^2-1}} \cdot \frac{v^2}{\mu}$. Dla $e = 1,054$: $-\frac{2}{1,054 \cdot 0,333} \cdot 2,51 \cdot 10^{-7} = -1,43 \cdot 10^{-6} \text{ rad/km}$.
 2. $0,1^\circ = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ wymaga dokładności ok. 1200 km w perycentrum: łatwe przy Jowiszu. Przy bliskich przelotach obok małych ciał i dużym e wymagania są dużo ostrzejsze; korekty toru robi się kilka razy w drodze.

Astronautyka · Lekcja 8: Asysta grawitacyjna · Źródła: H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 8); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. o trajektoriach międzyplanetarnych). Model: przelot w przybliżeniu sklepanych stożkowych, orbity planet kołowe. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a8.py).