

Sfery wpływu i podróż międzyplanetarna

Sonda lecąca na Marsa jest przyciągana jednocześnie przez Ziemię, Słońce i Marsa. Dokładny ruch w polu trzech ciał nie ma rozwiązania w postaci wzorów, ale prawie zawsze jedno ciało przeważa. Metoda sklejanych stożkowych dzieli lot na trzy odcinki, każdy z jednym ciałem centralnym, i skleja je na granicach sfer wpływu. Tak liczy się okna startowe, budżety Δv i czasy lotu wszystkich misji planetarnych, zanim przyjdzie czas na dokładne całkowanie.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz. 8;
C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
o trajektoriach
międzyplanetarnych;
U. Walter,
Astronautics,
rozdz. o lotach
międzyplanetarnych

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Mariner 4 i pierwsze zdjęcia Marsa
- 1 Sfera wpływu
- 2 Metoda sklejanych stożkowych
- 3 Wylot z Ziemi
- 4 Okna startowe i czas misji
- 5 Przylot i wejście na orbitę
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Mariner 4 i pierwsze zdjęcia Marsa

W listopadzie 1964 roku z przylądka Canaveral (nazywanego wtedy Przylądkiem Kennedy'ego) wystartował Mariner 4. Po prawie ośmiu miesiącach lotu, w lipcu 1965 roku, minął Marsa w odległości ok. 10 000 km i przesłał na Ziemię 21 zdjęć. Pokazywały kratery i martwą powierzchnię, a pomiar przejścia sygnału radiowego przez atmosferę wykazał, że jest ona bardzo rzadka. Skończyły się marzenia o kanałach.

Start nie mógł się odbyć w dowolnym momencie. Mars i Ziemia muszą stać w odpowiednim ustawieniu, które powtarza się co ok. 26 miesięcy. Ta lekcja liczy, skąd biorą się te liczby: 26 miesięcy, 8 miesięcy lotu i ok. 3,6 km/s z niskiej orbity okołoziemskiej.

Pytanie na start. Ucieczka z orbity 300 km kosztuje 3,20 km/s, a sonda ma opuścić pole Ziemi z prędkością 2,95 km/s. Czy potrzeba $3,20 + 2,95 = 6,15$ km/s? Odpowiedź w części 3.

Sfera wpływu

W pobliżu Ziemi sondę przyciąga głównie Ziemia, daleko głównie Słońce. Gdzie przebiega granica? Laplace zaproponował kryterium: liczymy ruch sondy względem Ziemi z Słońcem jako zaburzeniem i względem Słońca z Ziemią jako zaburzeniem. Granica leży tam, gdzie stosunek zaburzenia do przyspieszenia głównego jest w obu opisach taki sam. Wynik:

☞ PROMIEŃ SFERY WPŁYWU

$$r_{\text{SOI}} = a \left(\frac{m}{M} \right)^{2/5},$$

a odległość planety od Słońca (lub księżycy od planety), m/M stosunek mas. Ziemia: 925 000 km (145 promieni Ziemi); Księżyc względem Ziemi: 66 000 km; Mars: 577 000 km; Jowisz: 48 mln km.

Sfera wpływu Ziemi jest olbrzymia w porównaniu z Ziemią, ale mała w porównaniu z odległością do Słońca: 0,6% jednostki astronomicznej. To dlatego metoda sklepanych stożkowych działa: w skali Układu Słonecznego sonda wychodzi z „punktu”, a w skali Ziemi pole Słońca jest drobnym zaburzeniem. Granica nie jest fizyczną powierzchnią, tylko wygodnym miejscem na zmianę opisu; wykładnik $2/5$ wynika z porównania przyspieszeń pływowych.

🔗 ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Policz promień sfery wpływu Ziemi. Masa Ziemi to $3,00 \cdot 10^{-6}$ masy Słońca (z $\mu_{\oplus}/\mu_{\odot}$),
 $a = 1,496 \cdot 10^8$ km.

- 2 Sfera wpływu Księżyca ma promień 66 000 km, a Księżyc jest 384 400 km od Ziemi. Opisz trajektorię lotu na Księżyc w języku sklepanych stożkowych.
- 3 Dlaczego sfera wpływu Jowisza (48 mln km) jest prawie 50 razy większa od ziemskiej, mimo że Jowisz jest tylko 5 razy dalej od Słońca?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

2 Metoda sklepanych stożkowych

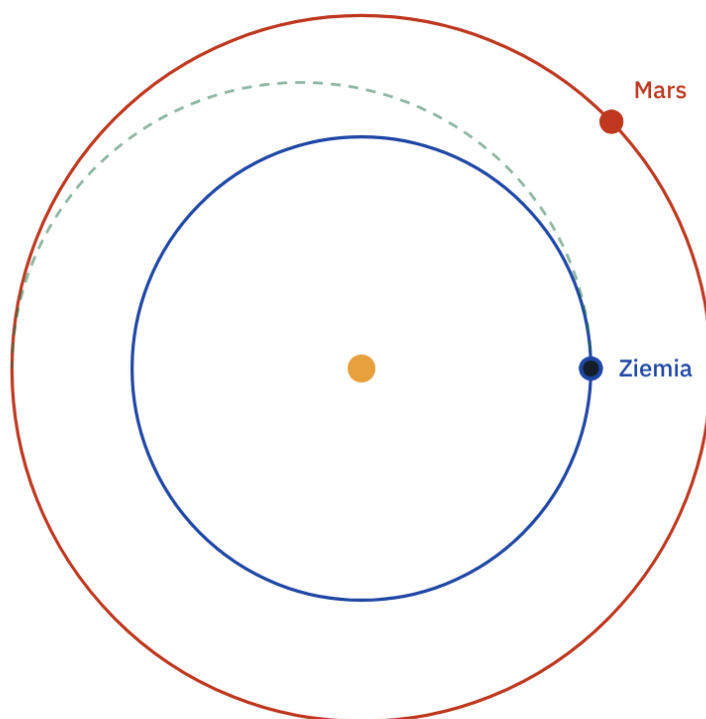
Lot z Ziemi na Marsa dzielimy na trzy odcinki, w każdym zagadnienie dwóch ciał z lekcji 1:

☞ SKLEJANE STOŻKOWE

1. **Wylot:** hiperbola względem Ziemi, od orbity parkingowej do granicy sfery wpływu; na granicy prędkość względem Ziemi to v_∞ .
2. **Lot heliocentryczny:** elipsa wokół Słońca z prędkością początkową $\mathbf{v}_\oplus + \mathbf{v}_\infty$ (sfera wpływu traktowana jak punkt w miejscu Ziemi).
3. **Przylot:** hiperbola względem Marsa z prędkością nadmiarową $\mathbf{v}_\infty^M = \mathbf{v}_{\text{sondy}} - \mathbf{v}_{\text{Mars}}$.

Dla orbit kołowych w jednej płaszczyźnie najtańszy odcinek heliocentryczny to elipsa Hohmanna (lekcja 5 Manewry orbitalne: transfer Hohmanna i zmiana płaszczyzny orbity) z peryhelium przy Ziemi i aphelium przy Marsie. Ziemia ma prędkość 29,78 km/s; sonda w peryhelium elipsy o $a = 1,262$ AU ma 32,73 km/s, więc $v_\infty = 2,95$ km/s w kierunku ruchu Ziemi. Przy Marsie sonda ma w aphelium 21,48 km/s, Mars 24,13 km/s: sonda przylatuje wolniej, a Mars „dogania” ją z $v_\infty = 2,65$ km/s. Lot trwa pół okresu elipsy: 259 dni.

SYMULACJA 1 Transfer Hohmanna z Ziemi do innych planet (orbity kołowe w jednej płaszczyźnie). Puste kółka: położenia Ziemi i celu w chwili startu, pełne: w wybranej chwili lotu. Zwróć uwagę na kąt fazowy: gdzie musi być cel w chwili startu.



— orbita Ziemi — orbita celu — tor sondy — położenia przy starcie (puste) i teraz (pełne)

v_∞ przy Ziemi / przy celu 2,94 / 2,65 km/s

czas lotu 259 dób

kąt fazowy przy starcie cel 44,3° przed Ziemią

okno co (okres synodyczny) 780 dób

Δv z orbity 300 km wokół Ziemi 3,59 km/s

wejście na orbitę kołową przy 300 km 2,09 km/s

Sonda startuje, gdy Mars jest 44° przed Ziemią, i po 259 dniach spotyka go po drugiej stronie Słońca. Takie ustawienie powtarza się co 780 dni: to są marsjańskie okna startowe.

Stan na rysunku: Ziemia → Mars, 0% lotu; orbity kołowe w jednej płaszczyźnie; $v_\infty = 2,945 / 2,649$ km/s, 259 dób.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz v_∞ przy Ziemi dla transferu Hohmanna na Marsa ($a_M = 1,524$ AU, $\mu_\odot = 1,327 \cdot 10^{11}$ km³/s²).

2 Ile trwa lot Hohmanna na Marsa i na Wenus ($a_W = 0,723$ AU)?

3 Dlaczego lot na Wenus wymaga hamowania względem Ziemi, a mimo to v_∞ jest dodatnie (2,50 km/s)?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

3 Wylot z Ziemi

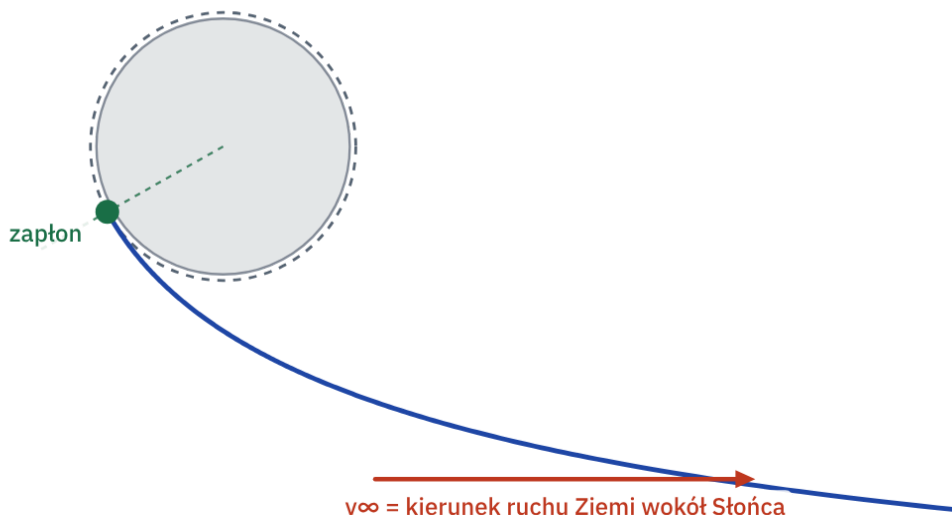
Sonda zaczyna na orbicie parkingowej o promieniu r_p . W perygeum hiperboli wylotu prędkość wynika z energii: $v_p^2 = v_\infty^2 + 2\mu/r_p$. Koszt wylotu:

$$\Delta v = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_p}}.$$

Odpowiedź na pytanie z prologu: nie. Dla orbity 300 km i $v_\infty = 2,95$ km/s: $\sqrt{8,67 + 119,38} - 7,73 = 3,59$ km/s, a nie 6,15. Prędkości nie dodają się, bo dodają się energie (efekt Obertha z lekcji 5): impuls w głębi studni potencjału daje dużo więcej energii niż ten sam impuls daleko od Ziemi. Hiperbola ma mimośród $e = 1 + r_p v_\infty^2 / \mu = 1,145$, a jej asymptota wyjściowa jest $150,8^\circ$ od perygeum; silnik zapala się więc ok. 151° (licząc wzdłuż orbity) przed kierunkiem, w którym sonda ma odlecieć.

SYMULACJA 2

Hiperbola wylotu z orbity parkingowej (Ziemia w skali). Asymptota wskazuje kierunek v_∞ , czyli kierunek ruchu Ziemi wokół Słońca przy locie na planetę zewnętrzną. Zmień v_∞ i porównaj koszt z naiwnym „ucieczka + v_∞ ”.



— orbita parkingowa — hiperbola wylotu — kierunek v_∞ (asymptota) — punkt zapłonu

Δv z orbity parkingowej 3,591 km/s

dla porównania: ucieczka + v_∞ osobno 6,150 km/s

mimośród hiperboli 1,1458

$C_3 = v_\infty^2$ 8,70 km²/s²

kąt perycentrum od asymptoty v_∞ 150,8°

Silnik zapala się w perygeum hiperboli, 151° przed kierunkiem v_∞ (licząc wzdłuż orbity). Dzięki efektowi Obertha 3,59 km/s w perygeum daje $v_\infty = 2,95$ km/s daleko od Ziemi: mniej niż ucieczka i v_∞ dodane osobno.

Stan na rysunku: $v_\infty = 2,95$ km/s, orbita parkingowa 300 km; $e = 1,1458$, $\Delta v = 3,591$ km/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz Δv wylotu na Marsa z orbity 300 km i C_3 .



- 2 Policz mimośród hiperboli wylotu i kąt ν_∞ jej asymptoty od perygeum.

- 3 Ile kosztowałby wylot na Marsa z orbity geostacjonarnej (bez kosztu dolotu na nią)?
Dlaczego z niskiej orbity jest taniej?

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ feynmanowskie

4 Okna startowe i czas misji

Sonda ma spotkać Marsa po 259 dniach, po drugiej stronie Słońca (180° od miejsca startu). Mars pokonuje w tym czasie $n_M \cdot 259 \text{ d} = 135,7^\circ$, więc w chwili startu musi być $180^\circ - 135,7^\circ = 44,3^\circ$ przed Ziemią. Takie ustawienie powtarza się co **okres synodyczny**:

$$T_{\text{syn}} = \frac{2\pi}{|n_1 - n_2|}, \quad \text{Ziemia-Mars: 780 dni (2,14 roku),} \quad \text{Ziemia-Wenus: 584 dni.}$$

Misja z powrotem musi czekać na planecie na okno powrotne. Po przylocie (Hohmann) Ziemia jest 75° przed Marsem, a do startu powrotnego musi być 75° za nim. Ziemia dogania Marsa o $0,46^\circ$ na dobę, więc czekanie trwa 454 dni, a cała misja $259 + 454 + 259 = 972$ dni, ok. 2,7 roku. Tak wygląda podstawowy scenariusz załogowej misji marsjańskiej.

Prawdziwe orbity planet są eliptyczne i lekko nachylone (Mars: $e = 0,093$, $i = 1,85^\circ$), więc okna różnią się między sobą: wymagane C_3 zmienia się od ok. 8 do ok. 16 km^2/s^2 . Dokładne okna liczy się z położeń planet i problemu Lamberta (lekcja 9 Problem Lamberta i wykres porkchop).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz okres synodyczny Ziemia-Mars (okres Marsa 687 dni).
- 2 Jaki kąt fazowy jest potrzebny przy starcie na Wenus? Gdzie jest Wenus w chwili startu?
- 3 Dlaczego okno na Jowisza wypada co 399 dni, prawie co rok?

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ feynmanowskie

Przylot i wejście na orbitę

Przy Marsie sonda ma $v_\infty = 2,65$ km/s i porusza się po hiperboli. Odległość perycentrum wybiera się małą korektą toru daleko przed planetą. Żeby zostać na orbicie, trzeba w perycentrum zahamować:

$$\Delta v_{\text{wej}} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}} - v_{\text{orb}}(r_p).$$

Wejście na orbitę kołową 300 km nad Marsem kosztuje 2,09 km/s, a na wydłużoną elipsę $300 \times 33\,000$ km tylko 0,91 km/s. Dlatego sondy najpierw wchodzi na wydłużoną orbitę, a potem obniżają apocentrum hamowaniem w atmosferze (ang. *aerobraking*): setki przelotów przez górne warstwy atmosfery zamiast setek kilogramów paliwa. Cały budżet z niskiej orbity okołoziemskiej na kołową orbitę 300 km wokół Marsa (Hohmann, wszystko silnikiem): $3,59 + 2,09 = 5,68$ km/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1  Policz Δv wejścia na orbitę kołową 300 km wokół Marsa ($\mu_M = 42\,828 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_M = 3396$ km).
- 2  Dlaczego przy Jowiszu wejście na niską orbitę kołową kosztowałoby prawie 17 km/s, a sondy wchodzi na orbitę za ok. 0,5–0,6 km/s?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: WSTĘPNY PROJEKT MISJI PLANETARNEJ

1. **Odcinek heliocentryczny:** elipsa (Hohmann albo z problemu Lamberta); v_∞ na obu końcach.
2. **Wylot:** $\Delta v = \sqrt{v_\infty^2 + 2\mu/r_p} - \sqrt{\mu/r_p}$ z orbity parkingowej; kierunek asymptoty wyznacza miejsce zapłonu.
3. **Przylot:** hamowanie w perycentrum, najlepiej na wydłużoną orbitę; ewentualnie hamowanie atmosferą.
4. **Terminy:** kąt fazowy, okres synodyczny, czekanie na okno powrotne.
5. **Sprawdzenie:** sfera wpływu dużo mniejsza od odległości planety od Słońca; potem dokładne całkowanie.

Przykład 6.1

Budżet misji na Marsa

Sonda startuje z orbity 300 km wokół Ziemi i ma wejść na orbitę kołową 300 km wokół Marsa. Policz budżet i terminy (Hohmann).

- 1 Odcinek heliocentryczny: $v_\infty = 2,95$ km/s (Ziemia), 2,65 km/s (Mars), 259 dni.
- 2 Wylot 3,59 km/s, wejście na orbitę 2,09 km/s: razem 5,68 km/s.
- 3 Start, gdy Mars jest 44° przed Ziemią; okna co 780 dni.

Wynik: 5,68 km/s, 259 dni; z hamowaniem atmosferycznym $3,59 + 0,91$ km/s.

Sprawdzenie: naiwne dodawanie prędkości dałoby 6,15 km/s tylko na wylot; różnica to efekt Obertha ✓.

Przykład 6.2

Lot na Wenus

Policz podstawowe liczby lotu Hohmanna na Wenus i wejścia na orbitę 300 km.

- 1 v_∞ : 2,50 km/s (Ziemia, do tyłu względem ruchu Ziemi), 2,71 km/s (Wenus); 146 dni; Wenus 54° za Ziemią przy starcie; okna co 584 dni.
- 2 Wylot z 300 km: 3,48 km/s.
- 3 Wejście na orbitę kołową 300 km nad Wenus ($\mu = 324\,859 \text{ km}^3/\text{s}^2$): 3,32 km/s.

Wynik: ok. 6,8 km/s; Wenus jest prawie tak „blisko” jak Mars na wylocie, ale droższa na przylocie (większa masa planety).

Sprawdzenie: większe μ zwiększa i prędkość w perycentrum hiperboli, i prędkość kołową; ich różnica rośnie ✓.

Przykład 6.3

Bezpośrednio na Jowisza

Ile kosztuje bezpośredni lot Hohmanna na Jowisza i ile trwa?

- 1 $v_\infty = 8,79 \text{ km/s}$ przy Ziemi, $C_3 = 77 \text{ km}^2/\text{s}^2$; wylot z 300 km: 6,30 km/s.
- 2 Czas 2,73 roku; przy Jowiszu $v_\infty = 5,64 \text{ km/s}$.
- 3 Wejście na orbitę $1,1 \times 100 R_J$: 0,59 km/s.

Wynik: ok. 6,9 km/s i prawie 3 lata. Takie C_3 (i większe) osiągały lekkie sondy lecące bezpośrednio: Pioneery 10 i 11, Voyagery, New Horizons. Ciężkie sondy (Galileo, Cassini, Juno) przy takim C_3 nie zmieściłyby się w możliwościach rakiet, dlatego leciały przez asysty grawitacyjne (lekcja 8 Asysta grawitacyjna).

Sprawdzenie: v_∞ przy Ziemi rośnie z odległością celu (Mars 2,9, Jowisz 8,8, Saturn 10,3 km/s), a granica $\sqrt{2} - 1$ prędkości Ziemi, ok. 12,3 km/s, to ucieczka z Układu Słonecznego ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Na Marsa leci się, gdy jest najbliżej.”

Startuje się, gdy Mars jest 44° przed Ziemią, a dolatuje po drugiej stronie Słońca. Największe zbliżenie (opozycja) wypada w trakcie lotu.

× „Do ucieczki i do v_∞ potrzeba sumy prędkości.”

Dodają się energie, nie prędkości: $\Delta v = \sqrt{v_\infty^2 + v_u^2} - v_k$.

× „Sfera wpływu to fizyczna granica.”

To umowne miejsce zmiany opisu; obie siły działają wszędzie, zmienia się tylko, która jest przeważająca.

× „Lot na Wenus jest łatwy, bo jest bliżej Słońca.”

Trzeba stracić prędkość względem Słońca; do Merkurego trzeba jej stracić tyle, że przyłot jest droższy niż lot na Jowisza.

× „Misja na Marsa i z powrotem trwa dwa razy po 8 miesięcy.”

Plus ok. 15 miesięcy czekania na okno powrotne: razem ok. 2,7 roku.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Skąd wykładnik 2/5?** Naszkicuj, dlaczego kryterium Laplace'a daje $r_{\text{SOI}} \propto (m/M)^{2/5}$.

2 **Szybciej niż Hohmann.** Załoga nie powinna lecieć 259 dni. Co się dzieje z v_∞ przy szybszym transferze na Marsa?

3 **Kierunek asymptoty.** Sonda na Marsa ma odlecieć w kierunku ruchu Ziemi wokół Słońca. W jakiej porze dnia (czas lokalny na orbicie parkingowej) zapala się silnik?

- 4 **Księżyc a sklepane stożkowe.** Dlaczego przybliżenie sklepanych stożkowych jest dla lotu na Księżyc wyraźnie gorsze niż dla Marsa?

- 5 **Wenus w drodze na Marsa.** Istnieją trajektorie z Ziemi na Marsa przez przelot obok Wenus. Co mogą dać i jaką mają wadę?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Wzór na promień sfery wpływu?**

$r_{\text{SOI}} = a(m/M)^{2/5}$; Ziemia ok. 925 000 km.

- 2 **Jakie są trzy odcinki metody sklepanych stożkowych?**

Hiperbola wylotu, elipsa heliocentryczna, hiperbola przylotu; sklepane przez $\mathbf{v}_\infty$.

- 3 **Ile kosztuje wylot na Marsa z orbity 300 km?**

3,59 km/s ($v_\infty = 2,95$ km/s, $C_3 = 8,7$ km²/s²).

- 4 **Co to jest okres synodyczny i ile wynosi dla Marsa?**

Czas powtarzania się ustawienia: $2\pi/|n_1 - n_2|$; Mars 780 dni.

- 5 **Jak tanio wejść na orbitę planety?**

Hamować w perycentrum na wydłużoną orbitę, potem ewentualnie hamowanie atmosferyczne.

- 6 **Ile trwa misja Hohmanna na Marsa i z powrotem?**

$259 + 454 + 259 = \text{ok. } 970$ dni.

SKLEJANE STOŻKOWE

$$r_{\text{SOI}} = a(m/M)^{2/5}$$

$$\mathbf{v}_{\infty} = \mathbf{v}_{\text{sondy}} - \mathbf{v}_{\text{planety}} \text{ (na granicy sfery)}$$

$$\text{wylot/przylot: } \Delta v = \sqrt{v_{\infty}^2 + 2\mu/r_p} - v_{\text{orb}}(r_p)$$

$$\text{hiperbola: } e = 1 + r_p v_{\infty}^2 / \mu, \nu_{\infty} = \arccos(-1/e)$$

LICZBY (HOHMANN, Z ORBITY 300 KM)

Mars: v_{∞} 2,95/2,65 km/s, 259 d, 44° przed, okna co 780 d, wylot 3,59 km/s

Wenus: 2,50/2,71 km/s, 146 d, 54° za, co 584 d, wylot 3,48 km/s

Jowisz: 8,79/5,64 km/s, 2,73 roku, co 399 d, wylot 6,30 km/s

$$T_{\text{syn}} = 2\pi / |n_1 - n_2|$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 8 (trajektorie międzyplanetarne, sfera wpływu, okres synodyczny, wylot i przylot); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. o trajektoriach międzyplanetarnych.
- **Dla chętnych:** R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, rozdz. o trajektoriach międzyplanetarnych; materiały NASA o misjach Mariner i Mars Exploration Program.

Hiperbola przylotu ma jeszcze jedną własność: obraca wektor $\mathbf{v}_{\infty}$. Względem planety długość v_{∞} się nie zmienia, ale względem Słońca prędkość sondy może wzrosnąć o kilka kilometrów na sekundę. Kolejna lekcja zamienia to w napęd: asystę grawitacyjną, dzięki której Voyagery doleciały do granic Układu Słonecznego.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

- $(3,00 \cdot 10^{-6})^{0,4} = 6,18 \cdot 10^{-3}$, $r_{\text{SOI}} = 9,25 \cdot 10^5$ km: ok. 2,4 odległości do Księżyca.
- Najpierw elipsa wokół Ziemi z apogeum w okolicy orbity Księżyca. Po wejściu w sferę wpływu Księżyca (ok. 320 000 km od Ziemi) statek ma względem Księżyca prędkość nadmiarową i porusza się po hiperboli wokół niego; bez hamowania minie go i wyjdzie z jego sfery. Dla Księżyca przybliżenie jest gorsze niż dla planet, bo jego sfera nie jest mała względem odległości Ziemia–Księżyc.
- Jowisz jest 318 razy masywniejszy od Ziemi: $318^{0,4} = 10,0$; do tego czynnik odległości 5,2. Razem ok. 52 razy.

Zadania • część 2

- $v_{\oplus} = \sqrt{\mu_{\odot}/1 \text{ AU}} = 29,78 \text{ km/s}$, $a_t = 1,262 \text{ AU}$, $v_p = \sqrt{\mu_{\odot}(2/r_1 - 1/a_t)} = 32,73 \text{ km/s}$; $v_{\infty} = 2,95 \text{ km/s}$.
- Mars: $a_t = 1,262 \text{ AU}$, pół okresu $= \frac{1}{2} \cdot 1,262^{1,5}$ roku $= 0,709$ roku $= 259$ dni. Wenus: $a_t = 0,862 \text{ AU}$, $\frac{1}{2} \cdot 0,862^{1,5} = 0,40$ roku $= 146$ dni.
- Sonda ma w aphelium elipsy przejściowej 27,29 km/s, mniej niż Ziemia (29,78 km/s): względem Ziemi leci do tyłu z prędkością 2,50 km/s. v_{∞} to długość wektora; jego kierunek jest przeciwny do ruchu Ziemi. Hiperbola wylotu jest więc obrocona: perygeum po stronie przeciwnej niż przy locie na Marsa.

Zadania • część 3

- $C_3 = v_{\infty}^2 = 8,67 \text{ km}^2/\text{s}^2$. $\Delta v = \sqrt{8,67 + 2 \cdot 398\,600/6678} - 7,726 = 11,316 - 7,726 = 3,59 \text{ km/s}$.
- $e = 1 + 6678 \cdot 8,67/398\,600 = 1,145$; $\nu_{\infty} = \arccos(-1/e) = 150,8^\circ$.
- $r = 42\,164 \text{ km}$: $\sqrt{8,67 + 18,91} - 3,075 = 2,18 \text{ km/s}$, mniej niż 3,59 km/s, ale dolot na GEO kosztuje 3,9 km/s. Z niskiej orbity: 3,59 km/s łącznie, bo cały impuls jest w głębi studni potencjału, gdzie prędkość jest największa (efekt Obertha).

Zadania • część 4

- $1/T_{\text{syn}} = 1/365,26 - 1/687 = 1,282 \cdot 10^{-3} / \text{d}$, $T_{\text{syn}} = 780$ dni.
- Wenus pokonuje w 146 dni $146 \cdot 360^\circ/224,7 = 234^\circ$. Ma być 180° od miejsca startu, więc przy starcie jest $180^\circ - 234^\circ = -54^\circ: 54^\circ$ za Ziemią.
- Jowisz porusza się wolno (okres 11,86 roku), więc Ziemia dogania go prawie co rok: $1/T_{\text{syn}} = 1 - 1/11,86 / \text{rok}$, $T_{\text{syn}} = 1,09$ roku. Im dalsza planeta, tym okres synodyczny bliższy rokowi.

Zadania • część 5

- $r_p = 3696 \text{ km}$; $\sqrt{2,65^2 + 2 \cdot 42\,828/3696} = \sqrt{7,02 + 23,18} = 5,49 \text{ km/s}$; $v_{\text{orb}} = \sqrt{42\,828/3696} = 3,40 \text{ km/s}$; $\Delta v = 2,09 \text{ km/s}$.
- Przy $r_p = 1,1R_J$ prędkość w perycentrum hiperboli to ok. 57 km/s, a kołowa ok. 40 km/s. Zatrzymanie na bardzo wydłużonej orbicie (perycentrum $1,1R_J$, apocentrum $100R_J$, okres 44 doby) kosztuje 0,59 km/s: wystarczy zmniejszyć energię z $+v_{\infty}^2/2$ do lekko ujemnej, a efekt Obertha przy ogromnej prędkości w perycentrum robi resztę.

Zadania do przemyślenia

1. Względem planety: przyspieszenie główne Gm/r^2 , zaburzenie od Słońca (pływowe) $\sim GMr/a^3$, stosunek $\sim (M/m)(r/a)^3$. Względem Słońca: główne GM/a^2 , zaburzenie od planety $\sim Gm/r^2$, stosunek $\sim (m/M)(a/r)^2$. Przyrównanie: $(M/m)(r/a)^3 = (m/M)(a/r)^2$, czyli $(r/a)^5 = (m/M)^2$ i $r = a(m/M)^{2/5}$.
2. 1. Szybszy transfer to elipsa z aphelium dalej niż Mars, przecinająca orbitę Marsa przed aphelium: większe v_∞ na wylocie i przy Marsie (i nieprostopadły przylot).
2. Koszt rośnie szybko: skrócenie lotu o kilka miesięcy podnosi v_∞ o 1–3 km/s na obu końcach. Wymagana zmiana prędkości przy Marsie może wymusić hamowanie aerodynamiczne. Rachunek dla konkretnych dat robi się problemem Lamberta (lekcja 9).
3. 1. Kierunek ruchu Ziemi wokół Słońca jest prostopadły do kierunku do Słońca i wskazuje stronę porannego terminatora (ok. 6:00 lokalnego czasu słonecznego; dlatego nad ranem widać więcej meteorów). Tam ma wskazywać asymptota wylotu.
2. Perygeum hiperboli leży 151° wcześniej wzdłuż orbity, czyli ok. 10 h lokalnego czasu wcześniej: ok. 20:00, po nocnej stronie Ziemi. Dlatego zapłony w kierunku Marsa wypadają nad nocną półkulą.
4. 1. Stosunek promienia sfery wpływu do odległości: Mars–Słońce 0,25%, Księżyc–Ziemia 17%. Statek spędza długi czas w obszarze, gdzie obie siły są porównywalne.
2. Do tego masa Księżyca to 1/81 Ziemi (Mars to $3 \cdot 10^{-7}$ Słońca): zaburzenia są duże. Trajektorie księżycowe (np. powrót „swobodny” Apollo) liczy się od razu numerycznie w zagadnieniu trzech ciał.
5. 1. Przelot obok Wenus zmienia kierunek $\mathbf{v}_\infty$ względem Wenus za darmo (lekcja 8): może skrócić czekanie na okno, zmniejszyć v_∞ przy przylocie albo umożliwić powrót bez długiego postoju na Marsie.
2. Wada: trzy planety muszą stać w odpowiednim ustawieniu (rzadkie okna), lot jest dłuższy, a sonda zbliża się do Słońca (termika).

Astronautyka · Lekcja 7: Sfery wpływu i podróż międzyplanetarna · Źródła: H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 8); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. o trajektoriach międzyplanetarnych). Model: orbity planet kołowe i współpłaszczyznowe. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a7.py).