

Ruch względny i spotkanie na orbicie

Dwa statki na prawie tej samej orbicie, kilka kilometrów od siebie. Jak jeden ma dolecieć do drugiego? Intuicja z Ziemi („skieruj się na cel i dodaj gazu”) tu zawodzi: przyspieszenie wynosi statek na wyższą orbitę, na której zostaje w tyle. Ta lekcja wyprowadza równania ruchu względnego Clohessy’ego–Wiltshire’a, rozwiązuje je macierzą wykładniczą i używa do planowania spotkania dwoma impulsami. Ostatnie metry do dokowania prowadzi regulator, a w ramce LQR z automatyki.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
8; U. Walter,
Astronautics,
rozdz. 8.5–8.6; H.
D. Curtis, *Orbital
Mechanics for
Engineering
Students*, rozdz. 7

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Gemini 4 goni rakietę
- 1 Układ związany z celem i równania CW
- 2 Rozwiązanie: dryf, pętla i paradoks
- 3 Spotkanie dwoma impulsami
- 4 Ostatnie metry: podejścia i dokowanie
- 5 Kiedy równania CW przestają działać
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Gemini 4 goni raketę

W czerwcu 1965 roku załoga Gemini 4 miała podlecieć do górnego stopnia rakiety Titan, który wyniósł ją na orbitę. James McDivitt zrobił to, co zrobiłby każdy pilot: wycelował statek w stopień i włączył silniki. Stopień zamiast się zbliżać, oddalał się i schodził poniżej. Po zużyciu dużej części paliwa przeznaczonego na manewry próbę przerwano.

Pół roku później Gemini 6A i Gemini 7 zbliżyły się do siebie na 30 cm. Między tymi lotami NASA przyswoiła mechanikę ruchu względnego, opisaną kilka lat wcześniej przez Clohessy'ego i Wiltshire'a; naprowadzaniu przy załogowym spotkaniu na orbicie poświęcił swoją pracę doktorską w MIT (1963) Buzz Aldrin. Lekcja z Gemini 4: na orbicie nie leci się do celu, tylko wybiera taką orbitę, która do niego doprowadzi.

Pytanie na start. Statek jest 20 km za stacją kosmiczną, na tej samej orbicie. Żeby ją dogonić, ma przyspieszyć czy zahamować? Odpowiedź w części 2.

Układ związany z celem i równania CW

Cel (np. stacja) leci po orbicie kołowej o promieniu a z ruchem średnim $n = \sqrt{\mu/a^3}$. Ruch ścigającego opisujemy w układzie związanym z celem i obracającym się razem z nim (układ Hilla, w praktyce lotów kosmicznych LVLH): oś x radialnie od Ziemi, oś y wzdłuż toru w kierunku lotu, oś z prostopadle do płaszczyzny orbity.

Różnica przyspieszeń grawitacyjnych ścigającego i celu, przy odległości ρ dużo mniejszej od a , to w pierwszym przybliżeniu (rozwiniecie Taylora, matematyka, lekcja 1.4 Rachunek różniczkowy w praktyce) $\frac{\mu}{a^3}(3x\hat{\mathbf{x}} - \rho)$. Do tego dochodzą przyspieszenia pozorne w układzie obracającym się z prędkością kątową n (fizyka, lekcja Dział 7: Układy odniesienia i szczególna teoria względności): Coriolisa $-2\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}$ i odśrodkowe $n^2(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}})$. Razem:

🔧 RÓWNANIA CLOHESSY'EGO-WILTSHIRE'A (HILLA)

$$\ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} = a_x, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = a_y, \quad \ddot{z} + n^2z = a_z.$$

a_x, a_y, a_z to przyspieszenia od silników ścigającego. W postaci stanowej $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ z $\mathbf{s} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$: układ liniowy o stałych współczynnikach (matematyka, lekcja 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów).

Ruch poprzeczny z to oscylator harmoniczny z okresem orbity: dwa statki na orbitach o lekko różnej płaszczyźnie przecinają się dwa razy na obieg. Ruch w płaszczyźnie orbity (x, y) jest sprzężony przez człony Coriolisa i to on niesie wszystkie niespodzianki.

- 1 Policz ruch średni n i okres stacji kosmicznej na wysokości 420 km.
- 2 Ścigający wisi 1 km pod celem ($x = -1$ km) i ma względem celu zerową prędkość. Jakie ma przyspieszenie względne w pierwszej chwili? W którą stronę zacznie się poruszać?
- 3 Dwa statki na orbitach kołowych na tej samej wysokości, z płaszczyznami obróconymi o $0,01^\circ$ wokół linii przechodzącej przez cel. Jak daleko od siebie są najwyżej?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2 Rozwiązanie: dryf, pętle i paradoks

Układ jest liniowy, więc rozwiązanie to $\mathbf{s}(t) = e^{At}\mathbf{s}_0$ (macierz wykładnicza, matematyka, lekcja 4.5 Układy równań liniowych i przestrzeń stanów). Dla ruchu w płaszczyźnie orbity, z $c = \cos nt$ i $s = \sin nt$:

🔧 ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ CW W PŁASZCZYŹNIE ORBITY

$$x(t) = (4 - 3c)x_0 + \frac{s}{n}\dot{x}_0 + \frac{2(1 - c)}{n}\dot{y}_0,$$

$$y(t) = 6(s - nt)x_0 + y_0 - \frac{2(1 - c)}{n}\dot{x}_0 + \frac{4s - 3nt}{n}\dot{y}_0.$$

Człony z nt rosną bez końca: to **dryf** wzdłuż toru. Znika on tylko, gdy $\dot{y}_0 = -2nx_0$: wtedy ścigający zatacza zamkniętą elipsę wokół punktu stałego.

Trzy najważniejsze przypadki, dla stacji kosmicznej ($n = 1,126 \cdot 10^{-3}$ rad/s):

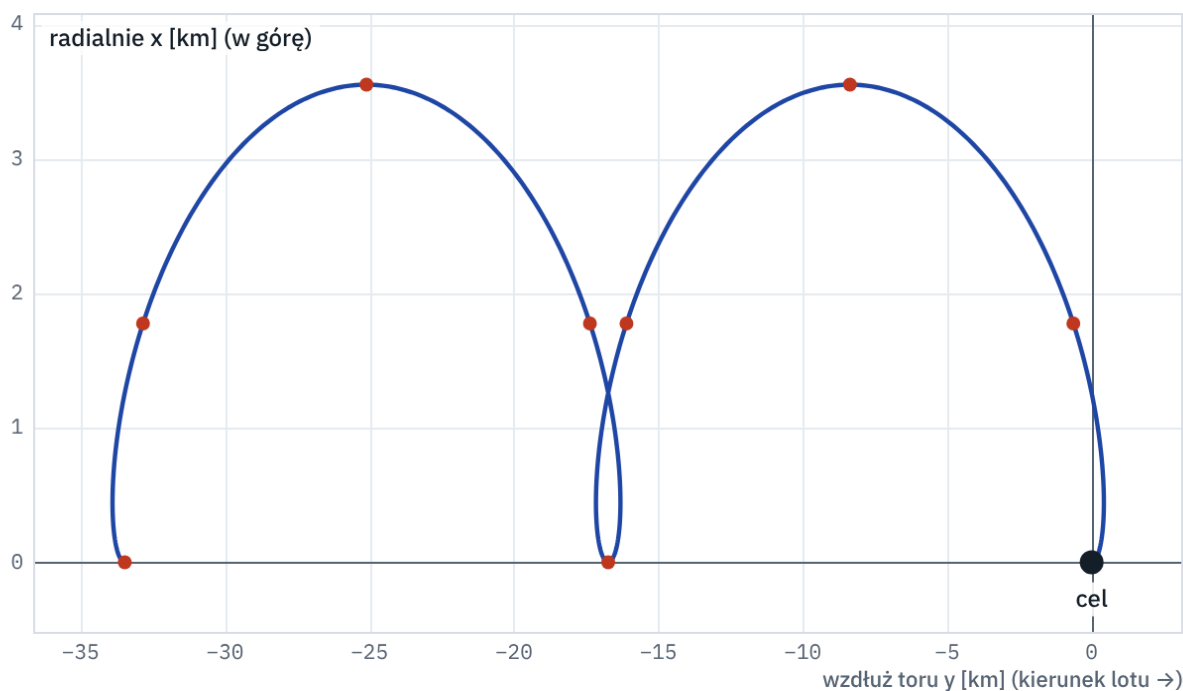
Impuls 1 m/s do przodu ($\dot{y}_0 = 1$ m/s): po pół obiegu ścigający jest 3,55 km *wyżej* i 8,4 km z tyłu, po pełnym obiegu na wysokości celu, ale 16,7 km z tyłu ($6\pi\dot{y}_0/n$). Impuls podniósł orbitę, wyższa orbita ma dłuższy okres. Odpowiedź na pytanie z prologu: żeby dogonić cel przed sobą, trzeba *zahamować*; ścigający zejdzie na niższą, szybszą orbitę.

Impuls radialny 1 m/s ($\dot{x}_0$): okres orbity się nie zmienia (energia prawie ta sama), więc nie ma dryfu. Statek zatacza elipsę 0,89 km w górę i w dół i 3,55 km wzdłuż toru i po obiegu wraca dokładnie do punktu startu. To bezpieczny manewr w pobliżu stacji: jeśli silnik się nie wyłączy na czas albo coś pójdzie źle, statek i tak wraca, a nie odpływa.

Orbita kołowa o x_0 niższa albo wyższa (wtedy prędkość względna to $\dot{y}_0 = -\frac{3}{2}nx_0$): dryf $-\frac{3}{2}nx_0$ na sekundę, czyli $-3\pi x_0$ na obieg. Statek na orbicie kołowej 1 km pod celem wysuwa się o 9,4 km do przodu na każdy obieg. Uwaga: statek „zawieszony” pod celem z zerową prędkością względną

(zadanie 1.2) nie leci po orbicie kołowej i dryfuje dużo szybciej, o $12\pi|x_0|$ na obieg, a jego wysokość waha się od x_0 do $7x_0$.

SYMULACJA 1 Tor ścigającego względem celu (cel w środku, na orbicie 420 km) po jednym impulsie. Oś pozioma: wzdłuż toru, kierunek lotu w prawo; oś pionowa: radialnie, w górę od Ziemi (skale osi są różne). Porównaj impuls do przodu, do tyłu i radialny; włącz pełne zagadnienie dwóch ciał, żeby zobaczyć, kiedy równania CW tracą dokładność.



— tor ścigającego względem celu (równania CW) — — pełne zagadnienie dwóch ciał — co ćwierć obiegu

po 2,00 obiegu: x, y 0,00 km, -33,47 km

przesunięcie wzdłuż toru na obieg -16,73 km

największa różnica wysokości 3,55 km

okres orbity celu (420 km) 93,0 min

Impuls do przodu podnosi orbitę: po pół obiegu ścigający jest wyżej i z tyłu, a na wyższej orbicie leci wolniej i zostaje coraz dalej. Żeby dogonić cel z przodu, trzeba zahamować.

Stan na rysunku: cel na orbicie kołowej 420 km, impuls 1,0 m/s do przodu, czas 2,00 obiegu; skale osi różne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Ścigający po impulsie $\dot{y}_0 = +0,5$ m/s. Gdzie jest po trzech obiegach?

■ ■ ■

2 Pokaż, że przy $\dot{y}_0 = -2nx_0$ (i $\dot{x}_0 = 0$) dryf znika. Jak wygląda wtedy tor?

■ ■ ■

- 3 Statek leci po orbicie kołowej 2 km poniżej stacji. Ile przesunie się względem niej wzdłuż toru w ciągu doby (15,5 obiegu)?

▮▮▮ podstawowe ▮▮▮ średnie ▮▮▮ feynmanowskie

3 Spotkanie dwoma impulsami

Ścigający jest w punkcie $\mathbf{r}_0$ względem celu, ma dolecieć do $\mathbf{0}$ w czasie t . Macierz e^{At} dzielimy na bloki: $\mathbf{r}(t) = \Phi_{rr}\mathbf{r}_0 + \Phi_{rv}\mathbf{v}_0$. Pierwszy impuls musi dać prędkość

$$\mathbf{v}_0^+ = \Phi_{rv}^{-1} (\mathbf{r}_f - \Phi_{rr}\mathbf{r}_0),$$

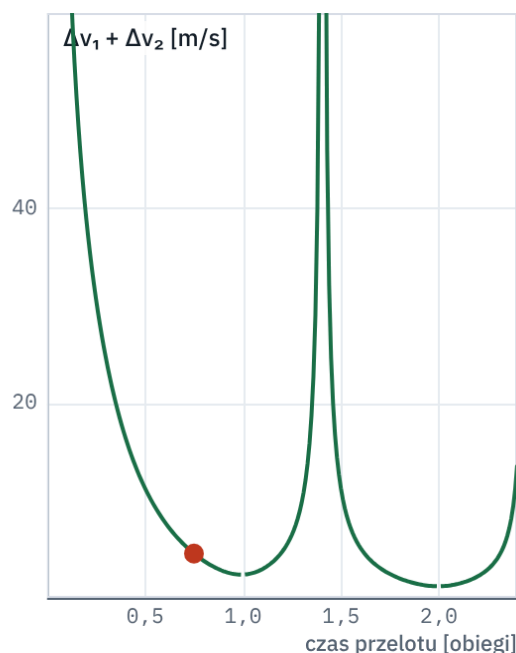
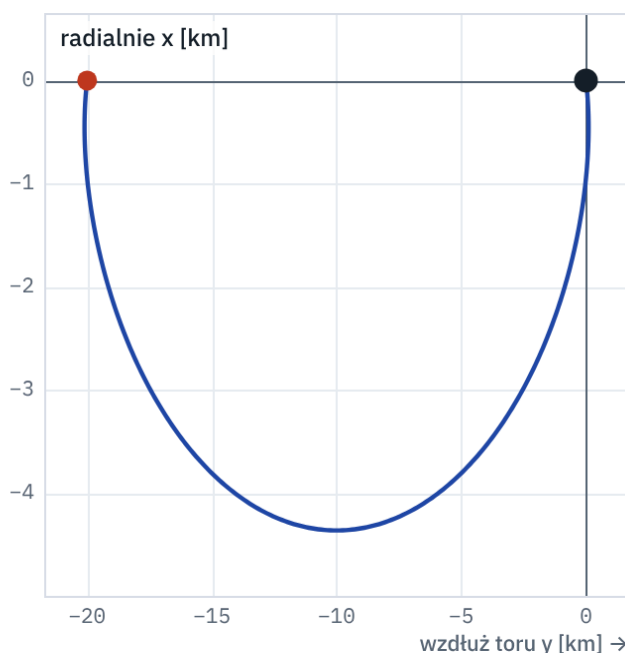
a drugi zatrzymać statek w celu: $\Delta\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}(t)$. Koszt zależy od czasu przelotu. Dla ścigającego 20 km za stacją, na tej samej wysokości:

czas przelotu	$\frac{1}{4}$ obiegu	$\frac{1}{2}$ obiegu	$\frac{3}{4}$ obiegu	0,9 obiegu	1,1 obiegu	1,5 obiegu
$\Delta v_1 + \Delta v_2$ [m/s]	30,6	11,3	4,55	2,75	2,96	11,3

Najtaniej wychodzi przelot trwający prawie pełny obieg: to po prostu fazowanie. Ścigający hamuje o 1,2 m/s i wchodzi na orbitę z perygeum 4,2 km niżej i nieco krótszym okresem; po jednym obiegu dogania stację w punkcie startu i przyspiesza o 1,2 m/s. Dokładnie dla czasu równego pełnemu obiegowi macierz Φ_{rv} jest osobliwa: równania CW mówią wtedy, że każdy impuls radialny wraca do punktu startu.

SYMULACJA 2

Spotkanie dwoma impulsami w równaniach CW. Lewy panel: tor od punktu startu (czerwony) do celu (czarny). Prawy panel: całkowite Δv w funkcji czasu przelotu. Przesuń ścigającego niżej albo wyżej (leci wtedy po orbicie kołowej na swojej wysokości) i obserwuj, jak zmienia się najtańszy czas.



— tor przelotu — impulsy — całkowite Δv w funkcji czasu przelotu

Δv_1 (radialnie, wzdłuż toru) $-2,04, -1,02$ m/s

Δv_2 (radialnie, wzdłuż toru) $-2,04, 1,02$ m/s

razem $4,55$ m/s

czas 70 min

Dłuższy przelot nie zawsze jest tańszy: koszt zależy od tego, jak przelot pasuje do naturalnych pętli ruchu względnego (minima w pobliżu całych obiegów).

Stan na rysunku: ścigający w $(x, y) = (0, 0; -20)$ km od celu na orbicie 420 km, przelot $0,75$ obiegu: $\Delta v = 4,55$ m/s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz fazowanie bez równań CW: ścigający 20 km za stacją (420 km). Jaki okres musi mieć orbita fazująca, żeby po jednym jej obiegu spotkać stację? Jaka jest jej wielka półoś?

2 Dlaczego przelot w ćwierć obiegu kosztuje $30,6$ m/s, ponad dziesięć razy więcej niż w prawie pełny obieg?

- 3 W tabeli przelot w 1,5 obiegu kosztuje tyle samo co w 0,5 obiegu (11,3 m/s). Wyjaśnij to, patrząc na składowe impulsów (oba są czysto radialne, $-5,63$ m/s).

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Ostatnie metry: podejścia i dokowanie

Ostatnie kilkaset metrów statek pokonuje powoli, z ciągłym sterowaniem, wzdłuż jednej z dwóch osi. **Podejście V-bar** (wzdłuż toru, z przodu albo z tyłu): na osi y przy $x = 0$ statek w spoczynku względnym pozostaje w miejscu, więc może się zatrzymać w dowolnym punkcie. **Podejście R-bar** (od dołu, wzdłuż promienia): grawitacja pływowa ciągnie statek w dół, od celu, więc każda awaria silników oddala go od stacji. Statki towarowe przechwytywane ramieniem robotycznym podchodzą często od dołu właśnie z tego powodu.

RAMKA: DOKOWANIE JAKO ZADANIE LQR

Równania CW są liniowe, więc ostatnią fazę można sterować regulatorem od stanu $u = -Ks$, z K z równania Riccatiego (automatyka, lekcja 4.3 LQR: koszt zamiast biegunów). Waga Q na błędach położenia i prędkości, waga R na przyspieszeniu, czyli na zużyciu paliwa. Dla ścigającego 100 m za stacją: przy $R = 10^6$ (położenie w km, przyspieszenie w km/s^2) regulator dowozi statek na 10 cm w 250 s i zużywa 3,0 m/s; przy $R = 10^8$ potrzebuje 754 s, ale tylko 0,97 m/s. LQR jawnie pokazuje kompromis „szybko kontra oszczędnie”, który w kaskadzie PID trzeba by stroić na wyczucie. W praktyce dochodzą ograniczenia (stożek podejścia, maksymalna prędkość), które obsługuje sterowanie predykcyjne.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Pokaż z równań CW, że punkt na osi y ($x = 0$, prędkość zero) jest punktem równowagi, a punkt na osi x nie jest.
- 2 Ile kosztuje utrzymanie statku przez godzinę 100 m pod stacją (R-bar), a ile 100 m za nią (V-bar)?
- 3 Dlaczego podejście R-bar jest „pasywnie bezpieczne”, a podejście V-bar od tyłu nie?

podstawowe średnie feynmanowskie

Kiedy równania CW przestają działać

Równania CW są linearyzacją: zakładają, że odległość jest mała w porównaniu z promieniem orbity, a orbita celu jest kołowa. Porównanie z pełnym zagadnieniem dwóch ciał po jednym obiegu (orbita 420 km):

impuls do przodu	CW: x, y	dwa ciała: x, y
1 m/s	0; -16,74 km	-0,02; -16,74 km
10 m/s	0; -167,3 km	-2,08; -168,2 km

Przy odległościach kilkudziesięciu kilometrów błąd to dziesiątki metrów: dobre do planowania, za mało do ostatniej fazy (tam jednak działa sterowanie ze sprzężeniem). Przy setkach kilometrów błąd rośnie z kwadratem odległości. Część błędu bierze się z krzywizny: w układzie Hilla „wzdłuż toru” to prosta, a orbita jest okręgiem; dlatego przy dużych odległościach używa się współrzędnych krzywoliniowych (kąt i promień). Dla celu na orbicie eliptycznej równania CW zastępuje się równaniami Tschaunera–Hempla albo propaguje oba statki numerycznie.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

1 Skąd w pełnym rachunku bierze się $x = -2,08$ km po obiegu dla impulsu 10 m/s, skoro według CW $x = 0$?

2 Stacja ma orbitę o mimośrodku 0,0005. Czy to psuje równania CW na odległości 10 km?

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: PLANOWANIE SPOTKANIA

1. **Daleko** (setki–tysiące km): fazowanie przez różnicę wysokości; czas spotkania z dryfu $3\pi\Delta h$ na obieg.
2. **Blisko** (kilkadziesiąt km): równania CW, przelot dwoma impulsami, czas przelotu dobrany do kosztu i bezpieczeństwa.
3. **Ostatnie metry**: podejście V-bar albo R-bar ze sterowaniem ciągłym (LQR, regulatory z ograniczeniami).
4. **Sprawdzenie**: propagacja pełnym modelem; trajektorie ucieczki w razie awarii.

Przykład 6.1

Dogonić stację 20 km przed sobą

Statek jest 20 km za stacją na tej samej orbicie 420 km. Zaplanuj spotkanie w ciągu ok. jednego obiegu.

- 1 Hamowanie o 1,20 m/s: orbita fazująca z perygeum 4,24 km niżej, okres krótszy o 2,6 s.
- 2 Po jednym obiegu fazującej statek jest w tym samym punkcie przestrzeni co stacja; impuls 1,20 m/s do przodu przywraca orbitę kołową.
- 3 Wersja z równaniami CW na 0,9 obiegu: impulsy $[-0,75; -1,15]$ i $[-0,75; 1,15]$ m/s, razem 2,75 m/s.

Wynik: ok. 2,4 m/s w czasie jednego obiegu (93 min).

Sprawdzenie: wzdłuż toru pierwszy impuls jest ujemny: hamowanie, zgodnie z odpowiedzią z prologu ✓.

Przykład 6.2

Skok radialny

Statek ma przesunąć się 2 km do tyłu względem stacji tak, żeby w razie awarii nie odpłynąć. Zaplanuj manewr radialny.

- 1 Impuls radialny $\dot{x}_0$ przesuwa statek po pół obiegu o $-4\dot{x}_0/n$ wzdłuż toru.
- 2 $-2 = -4\dot{x}_0/n$, $\dot{x}_0 = 0,5n = 0,56$ m/s w górę.
- 3 Po pół obiegu (46 min) statek jest 2 km z tyłu, na wysokości stacji, z prędkością radialną $-0,56$ m/s; drugi impuls $+0,56$ m/s w górę go zatrzymuje.

Wynik: dwa impulsy po 0,56 m/s, 46 min.

Sprawdzenie: bez drugiego impulsu statek dokończy pętlę i po obiegu wróci do punktu startu: trajektoria bezpieczna ✓ (zgodne z symulacją 1).

Przykład 6.3

Dokowanie z regulatorem

Porównaj dwa regulatory LQR dla ostatnich 100 m ($R = 10^6$ i 10^8).

- 1 Bieguny zamkniętej pętli: $\approx -0,023 \pm 0,02i$ /s (szybki) i $\approx -0,007 \pm 0,007i$ /s (oszczędny).
- 2 Czas do 10 cm: 250 s i 754 s; zużycie Δv : 3,0 i 0,97 m/s.
- 3 Iloczyn czas $\times$ zużycie jest podobny (ok. 750 m): szybciej znaczy drożej, mniej więcej odwrotnie proporcjonalnie.

Wynik: sto razy większa waga na sterowaniu wydłuża dokowanie trzykrotnie i trzykrotnie zmniejsza zużycie.

Sprawdzenie: bieguny są dużo szybsze od $n = 0,0011$ /s, więc dynamika orbity jest dla regulatora drobnym zaburzeniem ✓ (skrypt a6.py).

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Żeby dogonić, przyspiesz.”

Przyspieszenie podnosi orbitę i wydłuża okres: zostajesz w tyle. Trzeba zahamować, zejść niżej i wyprzedzić.

× „Statek w spoczynku nad stacją zostanie nad nią.”

Nad i pod celem nie ma równowagi: grawitacja pływowa i Coriolis wypchną go na pętlę z dryfem. Równowaga jest tylko na osi wzdłuż toru.

× „Krótszy przelot to mniej paliwa.”

Odwrotnie: krótki przelot walczy z dynamiką orbity i kosztuje dziesiątki m/s, przelot w prawie cały obieg kilka.

× „Wyceluj w cel i leć.”

Tor zakrzywia się w układzie obracającym się; ruch „na wprost” wymaga ciągłego ciągu.

× „Równania CW są dokładne.”

To linearyzacja dla małych odległości i orbit kołowych; przy setkach kilometrów błąd sięga kilometrów.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1  **Co zrobił McDivitt?** Gemini 4 był za stopniem rakiety i odpalał silniki w jego stronę (do przodu). Opisz, co działo się w kolejnych minutach, korzystając z rozwiązania CW.

2  **Elipsa 2 : 1.** Satelita inspekcyjny ma okrążać stację w zamkniętej pętli bez paliwa. Jak dobrać warunki początkowe i jaki kształt ma pętla?

- 3 **Okno startowe do stacji.** Statek startuje z Ziemi na spotkanie ze stacją. Dlaczego startuje się w chwili, gdy płaszczyzna orbity stacji przechodzi nad kosmodromem, i jak potem odrabia się różnicę położenia?
- 4 **Sterowalność.** Czy statek, który ma tylko silnik wzdłuż toru (a_y), jest sterowalny w płaszczyźnie orbity? Sprawdź macierzą sterowalności (automatyka, lekcja 4.1).
- 5 **Formacja satelitów.** Dwa satelity mają lecieć w stałej odległości 200 m jeden nad drugim. Ile kosztuje to rocznie i czy da się taniej?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Napisz równania CW.**

$$\ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} = a_x, \ddot{y} + 2n\dot{x} = a_y, \ddot{z} + n^2z = a_z.$$

- 2 **Co się dzieje po impulsie do przodu?**

Statek wznosi się i zostaje z tyłu: $-6\pi\dot{y}_0/n$ na obieg.

- 3 **Co robi impuls radialny?**

Zamkniętą pętlę bez dryfu; po obiegu statek wraca do punktu startu.

- 4 **Ile wynosi dryf przy różnicy wysokości Δh ?**

$3\pi\Delta h$ na obieg dla orbit kołowych (niższy wyprzedza).

- 5 **Jak liczy się spotkanie dwoma impulsami?**

$$\mathbf{v}_0^+ = \Phi_{rv}^{-1}(\mathbf{r}_f - \Phi_{rr}\mathbf{r}_0), \text{ drugi impuls zeruje prędkość w celu.}$$

- 6 **Czym różni się podejście V-bar od R-bar?**

V-bar wzdłuż toru: równowaga w każdym punkcie. R-bar od dołu: wymaga ciągu, ale awaria odsuwa statek od celu.

RÓWNIANIA I ROZWIĄZANIE

$$\ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} = a_x, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = a_y, \quad \ddot{z} + n^2z = a_z$$

$$x = (4 - 3c)x_0 + \frac{s}{n}\dot{x}_0 + \frac{2(1-c)}{n}\dot{y}_0$$

$$y = 6(s - nt)x_0 + y_0 - \frac{2(1-c)}{n}\dot{x}_0 + \frac{4s-3nt}{n}\dot{y}_0$$

$$\text{bez dryfu: } \dot{y}_0 = -2nx_0 \text{ (elipsa 2 : 1)}$$

REGUŁY PRAKTYCZNE

impuls $\dot{y}_0$: $-6\pi\dot{y}_0/n$ na obieg

orbita kołowa o x_0 niżej/wyżej: $-3\pi x_0$ na obieg

impuls radialny $\dot{x}_0$: pętla $\pm\dot{x}_0/n$ radialnie, $4\dot{x}_0/n$ wzdłuż

utrzymanie nad/pod celem: $3n^2|x|$

spotkanie: $\mathbf{v}_0^+ = \Phi_{rv}^{-1}(\mathbf{r}_f - \Phi_{rr}\mathbf{r}_0)$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. 8; H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 7 (ruch względny i spotkanie, wyprowadzenie równań CW).
- **Dla chętnych:** U. Walter, *Astronautics*, rozdz. 8.5–8.6; W. Fehse, *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft* (Cambridge): strategię podejścia, bezpieczeństwo i praktyka misji do stacji.

Pierwsza i druga część kursu działały w polu jednego ciała, Ziemi. Teraz wychodzimy dalej: sonda leci na Marsa, przez obszar, gdzie najpierw rządzi Ziemia, potem Słońce, na końcu Mars. Kolejna lekcja dzieli tę podróż na odcinki metodą sklepanych stożkowych.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $a = 6798 \text{ km}$, $n = \sqrt{\mu/a^3} = 1,1264 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$, $T = 2\pi/n = 5578 \text{ s} = 92,97 \text{ min}$.
2. $\ddot{x} = 3n^2x = -3 \cdot 1,269 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = -3,8 \cdot 10^{-6} \text{ km/s}^2$, czyli $-3,8 \text{ mm/s}^2$: dalej w dół (wynik grawitacji pływowej). $\ddot{y} = 0$ na początku, ale gdy pojawi się $\dot{x} < 0$, Coriolis da $\ddot{y} = -2n\dot{x} > 0$: statek zacznie wysuwać się do przodu. Niższa orbita, krótszy okres.
3. Ruch z : amplituda $a \Delta i = 6798 \cdot 1,745 \cdot 10^{-4} = 1,19 \text{ km}$, z okresem orbity. Statki mijają się w węzłach dwa razy na obieg. W równaniach CW: $z = z_0 \cos nt + (\dot{z}_0/n) \sin nt$ z $\dot{z}_0 = n \cdot 1,19 \text{ km}$.

Zadania • część 2

1. $y = -6\pi \cdot 3 \cdot \dot{y}_0/n = -18\pi \cdot 0,0005/1,126 \cdot 10^{-3} = -25,1 \text{ km}$ (z tyłu), $x = 0$ (w chwilach całego obiegu).
2. Współczynnik przy nt w $y(t)$: $-6x_0 - 3\dot{y}_0/n = -6x_0 + 6x_0 = 0$. Zostaje $x = (4 - 3c)x_0 - 4(1 - c)x_0 = cx_0$, $y = y_0 + 6sx_0 - 8sx_0 = y_0 - 2sx_0$: elipsa o półosiach x_0 (radialnie) i $2x_0$ (wzdłuż toru), stosunek 1 : 2. Fizycznie: orbita o tym samym okresie, ale lekko eliptyczna.
3. $3\pi x_0 = 18,8 \text{ km}$ na obieg, razem ok. 290 km do przodu. W praktyce statek startujący z Ziemi dogania stację właśnie tak: z niższej orbity, regulując wysokość, by dopasować chwilę spotkania.

Zadania • część 3

1. W czasie jednego obiegu orbity fazującej stacja ma przebyć $2\pi - 20/6798 \text{ rad}$, czyli okres fazującej to $T(1 - 0,00294/2\pi) = T - 2,61 \text{ s}$. Z $T \propto a^{3/2}$: $\Delta a/a = \frac{2}{3}\Delta T/T$, $\Delta a = -2,12 \text{ km}$. Perygeum o $2|\Delta a| = 4,24 \text{ km}$ niżej; impuls w apogeum orbity fazującej $\Delta v \approx \frac{v}{4} \cdot \frac{4,24}{a} = 1,19 \text{ m/s}$ (dokładnie z vis-viva 1,20 m/s), dwa razy: na początku i na końcu.
2. W krótkim czasie dynamika orbity (Coriolis, grawitacja pływowa) nie zdąży „pomóc”: trzeba nadać prędkość rzędu $20 \text{ km}/1400 \text{ s} \approx 14 \text{ m/s}$ i potem ją wytracić, a do tego walczyć z zakrzywieniem toru. Przy prawie pełnym obiegu odległość odrabia naturalny dryf z niewielkiej różnicy okresów.
3. Impuls radialny wywołuje zamkniętą pętlę: po pół obiegu statek jest przesunięty o $-4\dot{x}_0/n$ wzdłuż toru, po pełnym obiegu wraca. Przesunięcie o 20 km w pół obiegu wymaga $\dot{x}_0 = -20n/4 = -5,63 \text{ m/s}$. Przy 1,5 obiegu statek najpierw robi pełną pętlę (wraca na start), a potem tę samą połówkę: ten sam koszt, dłuższy czas. Dryf wzdłuż toru byłby tańszy (minimum blisko całych obiegów).

Zadania • część 4

1. Przy $x = \dot{x} = \dot{y} = 0$: $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, czyli równowaga dla każdego y (ścigający na tej samej orbicie, tylko przesunięty). Przy $x \neq 0$: $\ddot{x} = 3n^2x \neq 0$, więc utrzymanie się nad albo pod celem wymaga stałego ciągu $3n^2|x|$.
2. R-bar: $3n^2 \cdot 100 \text{ m} = 3 \cdot 1,269 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$, przez 3600 s: 1,37 m/s. V-bar: 0 (równowaga), poza korektami zaburzeń.
3. Na R-bar od dołu statek, który traci ciąg, jest ciągnięty w dół i do przodu (krótszy okres), czyli od stacji. Na V-bar od tyłu statek z resztkową prędkością w kierunku stacji po prostu w nią wlatuje (brak siły odpychającej); jeśli ma resztkową prędkość do góry, zakreśla pętlę i też może wrócić w okolice

stacji. Dlatego reguły bezpieczeństwa wymagają, żeby przy każdym podejściu istniała trajektoria ucieczki bez użycia silników.

Zadania · część 5

1. Ścigający jest 168 km z tyłu wzdłuż okręgu, a układ Hilla mierzy x wzdłuż promienia celu. Punkt na tym samym okręgu, 168 km dalej, leży pod styczną o $s^2/(2a) = 168^2/(2 \cdot 6798) = 2,08$ km. To czysta geometria (krzywizna), a nie błąd dynamiki: we współrzędnych krzywoliniowych zgodność jest dużo lepsza.
2. Mimośród zmienia prędkość kątową celu o ok. $\pm 2e = \pm 0,1\%$ i promień o $\pm ae = \pm 3,4$ km. Efekt na ruch względny jest rzędu $e \cdot \rho$, czyli ok. 5 m na 10 km: mniej niż błąd linearyzacji przy tej odległości. Dla orbit z e rzędu 0,1 trzeba już równań Tschaunera–Hempla.

Zadania do przemyslenia

1. Impuls do przodu podniósł orbitę statku: w ciągu pierwszej ćwierci obiegu statek wznosił się nad stopień (z jego punktu widzenia stopień „opadał”) i zwalniał względnie.
2. Po kilkunastu minutach statek był wyżej i z tyłu, dalej niż przed manewrem; kolejne impulsy w stronę celu tylko pogłębiały efekt. Dopiero hamowanie (impuls do tyłu) albo czekanie na pętlę dałoby zbliżenie.
1. Warunek braku dryfu: $\dot{y}_0 = -2nx_0$ (zadanie 2.2). Pętla to elipsa w płaszczyźnie (y, x) o półosiach $2A$ wzdłuż toru i A radialnie, ze środkiem w dowolnym y_c ; dla $y_c = 0$ otacza stację.
2. Dodając ruch z z tym samym okresem, można zrobić pętlę nachyloną, która nigdy nie przecina osi lotu stacji (tzw. separacja eliptyczna, używana w formacjach satelitów).
1. Zmiana płaszczyzny jest bardzo droga (lekcja 5), więc rakieta musi wejść od razu w płaszczyznę stacji: start w chwili, gdy kosmodrom przecina tę płaszczyznę (dwa razy na dobę, co dzień ok. 24 min wcześniej; ok. 20 min z obrotu węzła, lekcja 3, i ok. 4 min z różnicy między dobą słoneczną a gwiazdową).
2. Różnicę kąta na orbicie (fazę) odrabia się fazowaniem z niższej orbity: dryf $3\pi\Delta h$ na obieg. Dobierając wysokość, statek dogania stację po kilku obiegach (szybkie spotkanie) albo po dwóch dobach.
1. $B = [0, 0, 0, 1]^T$ dla stanu $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. $AB = [0, 1, 2n, 0]^T$, $A^2B = [2n, 0, 0, -4n^2]^T$, $A^3B = [0, -4n^2, -2n^3, 0]^T$. Macierz $[B, AB, A^2B, A^3B]$ ma rząd 4: układ jest sterowalny.
2. Fizycznie: impuls wzdłuż toru zmienia wysokość przez Coriolisa. Sam silnik radialny daje układ niesterowalny: nie zmienia okresu, więc nie usunie dryfu wzdłuż toru.
1. Utrzymanie $x = 0,2$ km wymaga $3n^2x = 7,6 \cdot 10^{-4}$ m/s², rocznie ok. 24 km/s: niemożliwe chemicznie.
2. Taniej: formacja na zamkniętej pętli 2 : 1 albo różnica tylko wzdłuż toru (V -bar) albo w kierunku poprzecznym (oscylacja z za darmo). Misje formacyjne (np. pary satelitów grawimetrycznych) latają jeden za drugim właśnie dlatego.

Astronautyka · Lekcja 6: Ruch względny i spotkanie na orbicie · Źródła: C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. 8); U. Walter, *Astronautics* (Springer, rozdz. 8.5–8.6); H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 7). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a6.py).