

Manewry orbitalne: transfer Hohmanna i zmiana płaszczyzny orbity

Satelita na niskiej orbicie ma się znaleźć na orbicie geostacjonarnej: 36 tysięcy kilometrów wyżej i w innej płaszczyźnie. Każdy metr na sekundę zmiany prędkości kosztuje paliwo, więc pytanie brzmi: jak najtaniej? Ta lekcja wyprowadza transfer Hohmanna, pokazuje, kiedy da się go pobić trzema impulsami, i liczy, ile kosztuje zmiana płaszczyzny orbity, najdroższy manewr w astronautyce. Na końcu widać, dlaczego kosmodromy blisko równika są w cenie.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz. 6;
C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
o manewrach
orbitalnych; W.
Hohmann, *Die
Erreichbarkeit der
Himmelskörper*
(1925)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: inżynier miejski z Essen
- 1 Manewr impulsowy
- 2 Transfer Hohmanna
- 3 Transfer dwueliptyczny
- 4 Zmiana płaszczyzny orbity
- 5 Efekt Obertha i ograniczenia modelu impulsowego
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: inżynier miejski z Essen

Walter Hohmann był inżynierem budownictwa w urzędzie miejskim w Essen. W wolnym czasie liczył, jak polecieć na inne planety, i w 1925 roku wydał książkę *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper* („Osiągalność ciał niebieskich”). Zaproponował w niej i policzył przelot między dwiema orbitami kołowymi po połówce elipsy stycznej do obu, z jednym impulsem na początku i jednym na końcu; że jest to przelot optymalny, udowodniono ściśle dopiero w latach 60. Do pierwszego sztucznego satelity zostały wtedy jeszcze 32 lata.

Ta elipsa nosi dziś jego nazwę i jest punktem wyjścia każdego planowania misji: do orbity geostacjonarnej, do Księżyca, do Marsa. Prawdziwe trajektorie różnią się od niej szczegółami, ale rzadko ją biją o więcej niż kilka procent.

Pytanie na start. Satelita wystrzelony z przylądka Canaveral krąży na orbicie nachylonej o $28,5^\circ$. Ile kosztowałby obrót jego orbity do płaszczyzny równika od razu, na orbicie 300 km? Odpowiedź w części 4.

1

Manewr impulsowy

Silnik satelity pracuje zwykle minuty, a obieg trwa półtorej godziny albo dłużej. Przybliżamy więc pracę silnika **impulsem**: prędkość zmienia się skokowo o $\Delta \mathbf{v}$, a położenie się nie zmienia. Koszt manewru mierzymy sumą $|\Delta \mathbf{v}|$, bo paliwo wynika z równania raketowego (lekcja 4 Rakieta na orbitę: równanie raketowe, stopniowanie i zakręt grawitacyjny): $m_0/m_k = e^{\sum |\Delta v|/c}$.

Który kierunek impulsu najbardziej zmienia energię orbity? Z $\varepsilon = v^2/2 - \mu/r$ przy stałym r :

$$\Delta \varepsilon = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} |\Delta \mathbf{v}|^2.$$

Przy zadanej długości $|\Delta \mathbf{v}|$ zmiana energii jest największa, gdy impuls jest równoległy do prędkości (styczny). Dlatego zmiany wielkości orbity robi się impulsami stycznymi, a impulsy poprzeczne służą do zmiany płaszczyzny.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Satelita ma silnik o $I_{sp} = 320$ s. Manewry wymagają łącznie 3,89 km/s. Jaki stosunek mas musi mieć?
- 2 Kiedy przybliżenie impulsowe zawodzi? Policz czas pracy silnika, który ma dać 2,43 km/s przy przyspieszeniu $0,5 \text{ m/s}^2$, i porównaj z okresem orbity 300 km (90,5 min).
- 3 Pokaż, że przy stałej długości impulsu największą zmianę energii daje impuls styczny w kierunku ruchu, a największy spadek energii – styczny przeciwnie do ruchu.

2 Transfer Hohmanna

Między orbitami kołowymi o promieniach $r_1 < r_2$ prowadzi elipsa z perycentrum r_1 i apocentrum r_2 . W perycentrum impuls styczny zwiększa prędkość z kołowej do perycentrycznej na elipsie, w apocentrum drugi impuls wyrównuje orbitę do kołowej:

TRANSFER HOHMANN

$$a_t = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right), \quad \Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right),$$

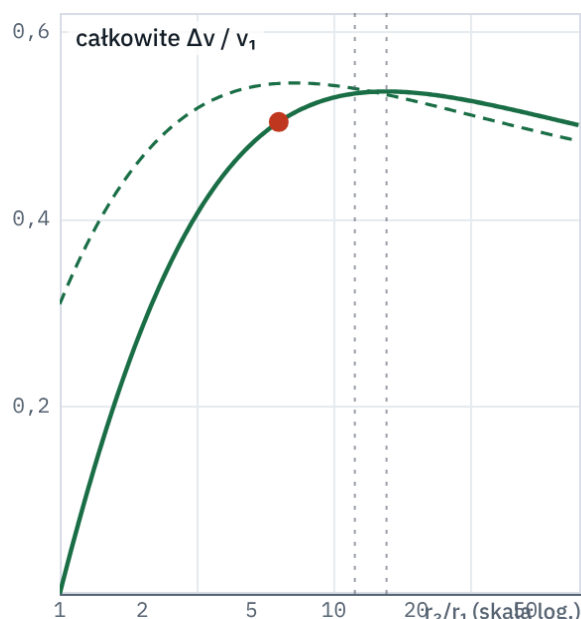
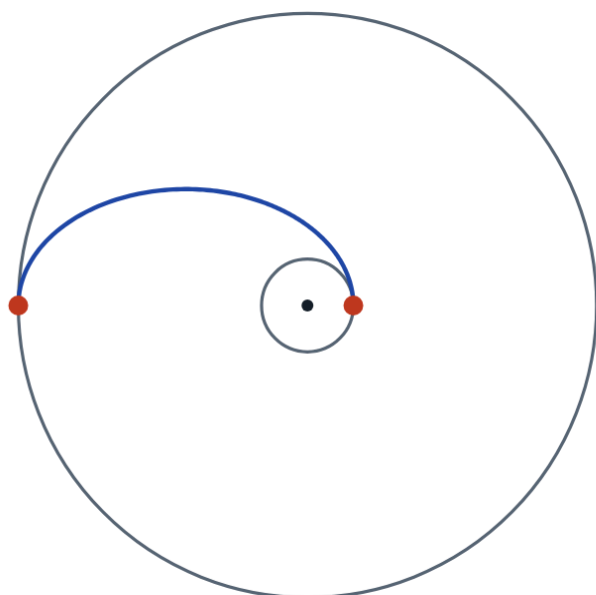
$$t = \pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}} \quad (\text{pół okresu elipsy}).$$

Z 300 km na orbitę geostacjonarną: $\Delta v_1 = 2,426$ km/s, $\Delta v_2 = 1,467$ km/s, razem 3,893 km/s, czas 5,28 h.

Wzory to vis-viva z lekcji 1 w trzech punktach. Dla małych podniesień orbity jest prostsza reguła: $\Delta v_{\text{całk}} \approx \frac{v}{2} \frac{\Delta r}{r}$. Podniesienie stacji kosmicznej z 400 do 420 km kosztuje $5,65 + 5,64 = 11,3$ m/s, a reguła daje $7669 \cdot 20 / (2 \cdot 6778) = 11,3$ m/s.

Transfer Hohmanna jest najtańszym transferem z dwoma impulsami między orbitami kołowymi w jednej płaszczyźnie (dowód przez badanie wszystkich elips przecinających obie orbity jest w literaturze, np. u Curtisa). Nie jest najszybszy: szybsze transfery mają bardziej wydłużone elipsy i większy drugi impuls.

SYMULACJA 1 Transfer Hohmanna i dwueliptyczny między orbitami kołowymi (w jednostkach promienia i prędkości kołowej orbity początkowej). Prawy panel: całkowite Δv w funkcji stosunku promieni; ciągła linia Hohmann, przerywana dwueliptyczny z wybranym apocentrum pośrednim. Kreski: $r_2/r_1 = 11,94$ i $15,58$.



— orbity początkowa i końcowa — orbity przejściowe — impulsy
— całkowite Δv : Hohmann / dwueliptyczny

impulsy $\Delta v / v_1$ $0,3138 + 0,1899 = 0,5036$

dla $r_1 = 6678$ km (300 km) $3,891$ km/s

czas przelotu $5,3$ h

Hohmann dla tego r_2/r_1 $0,5036$ v_1

Dwa impulsy styczne: w perycentrum (wejście na elipsę) i w apocentrum (wyrównanie do okręgu). To najtańszy transfer dwuimpulsowy między orbitami kołowymi, a dla $r_2/r_1 < 11,94$ najtańszy w ogóle (także wobec trójimpulsowego dwueliptycznego).

Stan na rysunku: $r_2/r_1 = 6,30$, Hohmann; $\Delta v = 0,5036$ $v_1 = 3,891$ km/s dla orbity początkowej 300 km.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz oba impulsy transferu Hohmanna z orbity 300 km ($r_1 = 6678$ km) na geostacjonarną ($r_2 = 42\,164$ km).

2 Ile trwa ten transfer? Jaki jest okres orbity przejściowej?

- 3 Stację kosmiczną (400 km) trzeba podnieść o 20 km. Ile kosztuje to Δv ? Ile paliwa przy masie 420 t i $I_{sp} = 300$ s?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Transfer dwueliptyczny

Ciekawostka z wielkim znaczeniem: dla dużych r_2/r_1 tańsze są **trzy** impulsy. Pierwszy wysyła statek po elipsie daleko poza orbitę docelową, do $r_b > r_2$. Tam, gdzie prędkość jest mała, drugi impuls podnosi perycentrum do r_2 . Trzeci impuls, w nowym perycentrum, hamuje do prędkości kołowej.

Całkowite Δv transferu Hohmanna (w jednostkach v_1) rośnie z r_2/r_1 tylko do $r_2/r_1 = 15,58$ (0,536 v_1), a potem maleje: daleka orbita ma małą prędkość kołową, więc drugi impuls jest mały.

Transfer dwueliptyczny z $r_b \rightarrow \infty$ jest tańszy od Hohmanna dla $r_2/r_1 > 11,94$, a dla $r_2/r_1 > 15,58$ jest tańszy przy każdym $r_b > r_2$. Przykład: dla $r_2 = 20r_1$ Hohmann kosztuje 0,5347 v_1 , a dwueliptyczny z $r_b = 40r_1$ 0,5256 v_1 ; dla $r_1 = 6678$ km to 4,131 i 4,061 km/s, ale czas lotu rośnie z 26 h do 194 h. Zysk 70 m/s rzadko jest wart 7,5 raza dłuższego lotu, dlatego transfer dwueliptyczny pozostaje głównie w podręcznikach.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Dlaczego impuls daleko od Ziemi (w r_b) może być tani, mimo że trzeba nim zmienić perycentrum o tysiące kilometrów?
- 2 W granicy $r_b \rightarrow \infty$ transfer dwueliptyczny to: ucieczka po paraboli, zero kosztu w nieskończoności, powrót po paraboli i hamowanie. Policz jego koszt dla $r_2 = 20r_1$ (w jednostkach v_1).
- 3 Ile razy dłużej trwa transfer dwueliptyczny z $r_b = 40r_1$ niż Hohmanna dla $r_2 = 20r_1$, jeśli $r_1 = 6678$ km?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Zmiana płaszczyzny orbity

Żeby obrócić płaszczyznę orbity kołowej o kąt Δi , trzeba obrócić wektor prędkości o ten kąt bez zmiany jego długości. Impuls musi być podstawą trójkąta równoramiennego:

🚀 ZMIANA PŁASZCZYZNY

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\Delta i}{2} \quad (\text{sama zmiana płaszczyzny}), \quad \Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta i} \quad (\text{połączona})$$

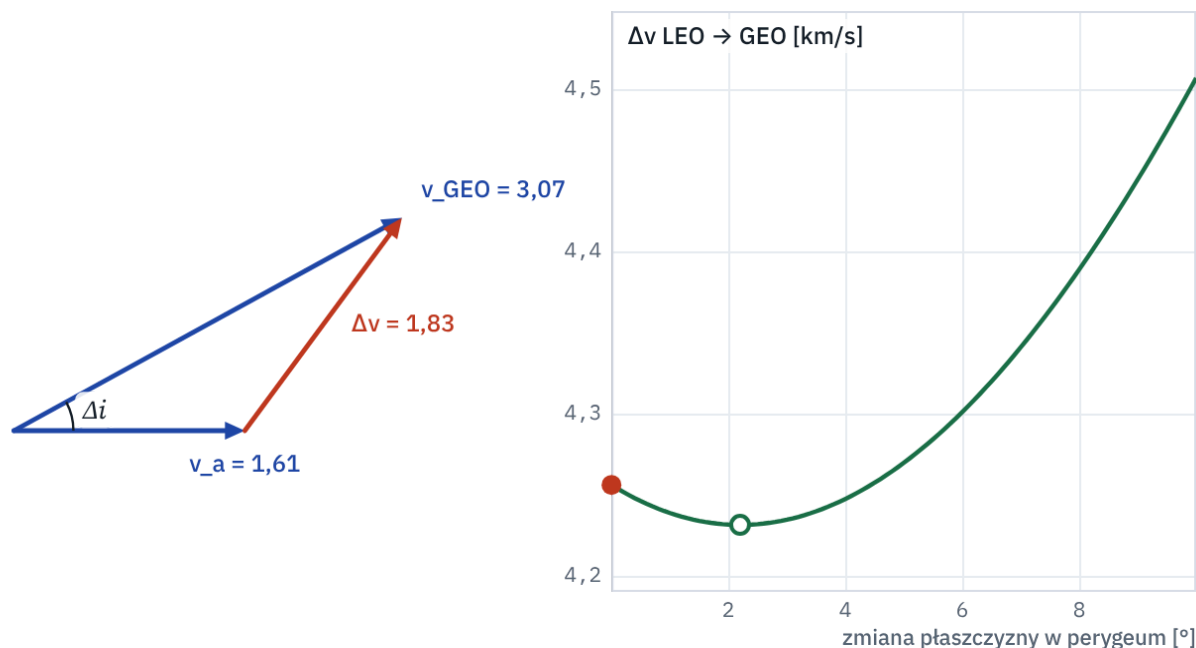
Manewr wykonuje się w węźle (na linii przecięcia starej i nowej płaszczyzny), najlepiej tam, gdzie prędkość jest najmniejsza.

Odpowiedź na pytanie z prologu: obrót orbity 300 km o $28,5^\circ$ kosztuje $2 \cdot 7,726 \sin 14,25^\circ = 3,80$ km/s, prawie połowę prędkości orbitalnej i więcej niż cały transfer na orbitę geostacjonarną. Na orbicie geostacjonarnej ten sam obrót kosztuje 1,51 km/s, a połączony z wyrównaniem orbity w apogeum GTO: $\sqrt{1,608^2 + 3,075^2 - 2 \cdot 1,608 \cdot 3,075 \cos 28,5^\circ} = 1,83$ km/s zamiast $1,467 + 1,514 = 2,98$ km/s osobno. Cała droga z 300 km z Canaveral na GEO: $2,426 + 1,830 = 4,256$ km/s. Z Kourou ($5,2^\circ$): 3,906 km/s. Różnica 350 m/s to przy $I_{sp} = 320$ s ok. 12% masy satelity.

Jest jeszcze jedna drobna optymalizacja: mała część zmiany płaszczyzny opłaca się w perygeum. Z Canaveral najlepiej obrócić orbitę o $2,2^\circ$ przy pierwszym impulsie i o $26,3^\circ$ w apogeum: 4,231 km/s, o 25 m/s mniej.

SYMULACJA 2

Przejdzie z orbity 300 km na geostacjonarną z obrotem płaszczyzny. Lewy panel: trójkąt prędkości w apogeum orbity przejściowej. Prawy panel: całkowite Δv w zależności od tego, jaką część obrotu wykonuje się w perygeum (pusty punkt: optimum). Zmień nachylenie startowe: równik (0°), Kourou ($5,2^\circ$), Canaveral ($28,5^\circ$), Bajkonur (np. $51,6^\circ$).



— prędkość przed i po manewrze w apogeum — Δv w apogeum — całkowite Δv (LEO $\rightarrow$ GEO)

całkowite Δv (LEO 300 km $\rightarrow$ GEO) 4,2560 km/s

najlepszy podział 2,20° w perygeum: 4,2313 km/s

bez zmiany płaszczyzny ($i = 0$) 3,8926 km/s

całość, gdy obrót w apogeum osobnym impulsem 5,4062 km/s

Zmianę płaszczyzny łączy się z wyrównaniem orbity w apogeum, gdzie prędkość jest najmniejsza: jeden ukośny impuls kosztuje dużo mniej niż dwa osobne. Mała część zmiany (ok. 2,2°) optaca się w perygeum, bo tam przy dużej prędkości mały obrót dodaje prawie nic do długiego impulsu.

Stan na rysunku: $i = 28,5^\circ$, w perygeum $0,00^\circ$, w apogeum $28,50^\circ$; $\Delta v = 4,2560$ km/s (LEO 300 km, GTO, GEO).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Ile kosztuje obrót orbity kołowej 300 km o $28,5^\circ$, a ile o 60° ?

1/3

- 2 Policz Δv manewru w apogeum GTO łączącego wyrównanie orbity z obrotem o $28,5^\circ$ ($v_a = 1,608 \text{ km/s}$, $v_{\text{GEO}} = 3,075 \text{ km/s}$).

- 3 O ile procent więcej masy może mieć satelita GEO startujący z Kourou zamiast z Canaveral, przy tym samym Δv dostępnym na orbicie przejściowej ($I_{sp} = 320 \text{ s}$)?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Efekt Obertha i ograniczenia modelu impulsowego

Ze wzoru $\Delta \varepsilon = v \Delta v + \frac{1}{2} \Delta v^2$ wynika, że ten sam impuls daje tym większą zmianę energii, im szybciej statek leci. To **efekt Obertha**: silniki najlepiej zapalać w perycentrum. Paliwo „zabrane” na dół studni potencjału ma tam więcej energii kinetycznej, którą rakietę przejmuje. Dlatego sonda uciekająca z Ziemi startuje z niskiej orbity, a hamowanie przy przylocie do planety robi się jak najbliżej niej.

Model impulsowy ma swoje granice. Gdy silnik pracuje długo w porównaniu z okresem orbity, impuls jest „rozmażany” wokół optymalnego punktu, a część pracy idzie na składową prostopadłą do prędkości (straty od skończonego czasu pracy, zwykle kilka do kilkudziesięciu m/s). Przy napędzie elektrycznym o przyspieszeniu rzędu 10^{-4} m/s^2 orbita rozwija się powoli po spirali, a koszt przejścia między orbitami kołowymi to różnica prędkości kołowych, $|v_1 - v_2|$, czyli więcej niż w transferze Hohmanna, ale przy kilku- do dziesięciokrotnie większym I_{sp} (napęd elektryczny: 1500–3000 s).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Na orbicie GTO impuls 100 m/s w kierunku ruchu: o ile zmienia energię w perygeum ($v = 10,15 \text{ km/s}$), a o ile w apogeum (1,61 km/s)?

- 2 Napęd elektryczny przenosi satelitę z 300 km na GEO po spirali. Ile kosztuje to Δv , ile paliwa przy $I_{sp} = 1500 \text{ s}$, a ile przy transferze Hohmanna z $I_{sp} = 320 \text{ s}$ (bez zmiany płaszczyzny)?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

☰ METODA: PLANOWANIE MANEWRÓW

1. Orbity początkowa i końcowa: r , a , e , płaszczyzna.
2. Prędkości z vis-viva w każdym punkcie manewru, przed i po.
3. Zmiana płaszczyzny tam, gdzie prędkość najmniejsza, połączona ze zmianą prędkości (wzór cosinusów).
4. Suma $|\Delta v|$, potem masa paliwa z równania raketowego.
5. Sprawdzenie: czy przybliżenie impulsowe się trzyma (czas pracy silnika wobec okresu); czas przelotu.

Przykład 6.1

Z Canaveral na GEO

Satelita na orbicie 300 km o nachyleniu $28,5^\circ$ ma przejść na orbitę geostacjonarną. Zaplanuj manewry.

- 1 Impuls w perygeum (w węźle, żeby apogeum leżało nad równikiem): $\Delta v_1 = 2,426$ km/s, orbita przejściowa $300 \times 35\,786$ km.
- 2 Po 5,28 h, w apogeum (nad równikiem): wyrównanie i obrót o $28,5^\circ$ jednym impulsem 1,830 km/s.
- 3 Razem 4,256 km/s; z podziałem $2,2^\circ / 26,3^\circ$ między perygeum i apogeum 4,231 km/s.

Wynik: ok. 4,23–4,26 km/s, 5,3 h.

Sprawdzenie: bez zmiany płaszczyzny 3,893 km/s; obrót kosztuje 0,34–0,36 km/s dodatkowo, dużo mniej niż 3,80 km/s na niskiej orbicie ✓.

Przykład 6.2

Dwueliptyczny na odległą orbitę

Z orbity 300 km ($r_1 = 6678$ km) na orbitę kołową $r_2 = 20r_1 = 133\,560$ km. Porównaj Hohmanna z transferem dwueliptycznym przez $r_b = 40r_1$.

- 1 Hohmann: $0,5347 v_1 = 4,131$ km/s, 25,7 h.
- 2 Dwueliptyczny: pierwsza elipsa $r_1 \rightarrow 40r_1$, druga $40r_1 \rightarrow 20r_1$; impulsy z vis-viva w trzech punktach, razem 4,061 km/s, 194 h.

Wynik: 70 m/s taniej, 7,5 razy dłużej.

Sprawdzenie: granica $r_b \rightarrow \infty$: $0,5068 v_1 = 3,92$ km/s (zadanie 3.2): dwueliptyczny z $r_b = 40r_1$ leży między nią a Hohmannem ✓.

Przykład 6.3

Najtańszy obrót płaszczyzny

Satelita na orbicie 300 km chce obrócić płaszczyznę o 60° . Czy taniej zrobić to bezpośrednio, czy wznieść się wysoko, obrócić tam i wrócić?

- 1 Bezpośrednio: $2v \sin 30^\circ = 7,73$ km/s.
- 2 Przez dwueliptyczną drogę z $r_b = 20r_1$: impuls w perygeum $\sqrt{2 \cdot 20/21} - 1 = 0,380 v_1$, w apocentrum obrót o 60° przy prędkości $v_a = \sqrt{2/(20 \cdot 21)} = 0,069 v_1$: $2 \cdot 0,069 \sin 30^\circ = 0,069 v_1$, powrót: $0,380 v_1$.
- 3 Razem $0,829 v_1 = 6,40$ km/s.

Wynik: wyprawa w górę jest tańsza o 1,3 km/s, ale trwa cały okres elipsy o $a = 10,5r_1$, ok. 51 h.

Sprawdzenie: dla małych kątów (np. 10° : bezpośrednio $0,174 v_1$) wyprawa w górę jest droższa: z $r_b = 20r_1$ sama kosztuje $0,76 v_1$. Granica opłacalności: $48,9^\circ$ dla $r_b \rightarrow \infty$, a przy optymalnie dobranym (skończonym) r_b już $38,9^\circ$ (zadanie do przemyślenia 2) ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Żeby dogonić coś przed sobą na orbicie, trzeba przyspieszyć.”

Przyspieszenie podnosi orbitę, a wyższa orbita ma dłuższy okres: statek zostaje w tyle. To temat następnej lekcji.

× „Hohmann jest najlepszy zawsze.”

Najtańszy wśród transferów dwuimpulsowych między orbitami kołowymi w jednej płaszczyźnie i tylko do $r_2/r_1 = 11,94$ (wobec dwueliptycznego). Nie jest najszybszy.

× „Zmiana płaszczyzny to drobna korekta.”

Obrót o $28,5^\circ$ na niskiej orbicie kosztuje więcej niż cały transfer na orbitę geostacjonarną.

× „ Δv z różnych manewrów można dodawać jak wektory.”

Koszt (paliwo) to suma długości impulsów. Wektory dodaje się tylko wtedy, gdy impulsy łączy się w jeden w tym samym miejscu, i właśnie dlatego łączenie się opłaca.

× „Silnik daje tyle samo, gdzie go nie zapalić.”

Ten sam Δv zmienia energię orbity tym bardziej, im szybciej statek leci (efekt Obertha).

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Dlaczego Hohmann jest optymalny?** Naszkicuj argument, że wśród transferów dwuimpulsowych między orbitami kołowymi elipsa styczna do obu jest najtańsza.

2 **Kiedy opłaca się lecieć w górę, żeby obrócić płaszczyznę?** Dla jakiego Δi wyprawa do $r_b \rightarrow \infty$ (bez kosztu obrotu) jest tańsza od bezpośredniego obrotu?

- 3 **Węzeł a apogeum.** Zmiana płaszczyzny musi być w węźle. Co zrobić, jeśli węzeł orbity przejściowej nie leży w apogeum?
- 4 **Spirala niskiego ciągu.** Pokaż, że przy bardzo małym ciągu stycznym orbita pozostaje prawie kołowa, a koszt przejścia z r_1 do r_2 to $\sqrt{\mu/r_1} - \sqrt{\mu/r_2}$.
- 5 **Co dalej z górnym stopniem?** Górny stopień rakiety po wypuszczeniu satelity na GTO zostaje na tej orbicie. Dlaczego to problem i jak go rozwiązać?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Jakie są dwa impulsy transferu Hohmanna?**

Styczne: w perycentrum (wejście na elipsę) i w apocentrum (wyrównanie).

- 2 **Ile kosztuje przejście z 300 km na GEO bez zmiany płaszczyzny?**

$2,43 + 1,47 = 3,89$ km/s; 5,3 h.

- 3 **Kiedy dwueliptyczny jest tańszy?**

Dla $r_2/r_1 > 11,94$ (z odpowiednio dalekim r_b), dla każdego r_b powyżej 15,58; ale trwa dużo dłużej.

- 4 **Wzór na koszt zmiany płaszczyzny?**

$2v \sin(\Delta i/2)$; z jednoczesną zmianą prędkości $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta i}$.

- 5 **Gdzie robić zmianę płaszczyzny?**

W węźle, tam gdzie prędkość najmniejsza (apocentrum), połączoną z innym impulsem.

- 6 **Co to jest efekt Obertha?**

$\Delta \epsilon = v \Delta v + \frac{1}{2} \Delta v^2$: ten sam impuls daje więcej energii przy większej prędkości.

HOHMANN I DWUELIPTYCZNY

$$\Delta v_1 = \sqrt{\mu/r_1} \left(\sqrt{2r_2/(r_1 + r_2)} - 1 \right)$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\mu/r_2} \left(1 - \sqrt{2r_1/(r_1 + r_2)} \right)$$

$$t = \pi \sqrt{a_t^3/\mu}; \text{ małe podniesienie: } \Delta v \approx \frac{v}{2} \frac{\Delta r}{r}$$

dwueliptyczny lepszy dla $r_2/r_1 > 11,94$
(dla każdego r_b powyżej 15,58)

PŁASZCZYZNA I ENERGIA

$$\Delta v = 2v \sin(\Delta i/2)$$

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta i}$$

$$\Delta \varepsilon = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} |\Delta \mathbf{v}|^2 \text{ (Oberth)}$$

spirala niskiego ciągu: $\Delta v = |v_1 - v_2|$

LEO 300 → GEO: 3,89 (równik), 3,91
(Kourou), 4,23–4,26 km/s (Canaveral)

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 6 (manewry: Hohmann, dwueliptyczny, fazowanie, zmiana płaszczyzny); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. o manewrach orbitalnych.
- **Dla chętnych:** W. Hohmann, *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper* (1925; przekład angielski NASA TT F-44): oryginalne rachunki, łącznie z hamowaniem w atmosferze.

Na orbitę docelową można trafić w złym miejscu: satelita, z którym mamy się spotkać, jest kilkaset kilometrów przed nami. Kolejna lekcja opisuje ruch względny dwóch statków na bliskich orbitach i pokazuje paradoks, że żeby dogonić cel, trzeba zahamować.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $c = 3138 \text{ m/s}$, $m_0/m_k = e^{3893/3138} = 3,46$: paliwo to 71% masy satelity. Dlatego satelity geostacjonarne zostawia się zwykle na orbicie przejściowej, a resztę robią własnym silnikiem, z dużą częścią masy w paliwie.
2. $2430/0,5 = 4860 \text{ s} = 81 \text{ min}$, prawie cały obieg. Impuls „rozmażany” na pół orbity jest mniej skuteczny (część pracy odbywa się daleko od optymalnego punktu); przy takim napędzie (np. elektrycznym, z jeszcze mniejszym przyspieszeniem) orbitę podnosi się po spirali przez tygodnie i koszt Δv jest inny (zadanie do przemyślenia 4).
3. $\Delta \epsilon = v |\Delta \mathbf{v}| \cos \theta + \frac{1}{2} |\Delta \mathbf{v}|^2$, gdzie θ to kąt między $\mathbf{v}$ a $\Delta \mathbf{v}$. Przy stałym $|\Delta \mathbf{v}|$ zależność od kierunku to $\cos \theta$: maksimum przy $\theta = 0$, minimum przy $\theta = 180^\circ$. Impuls prostopadły zmienia energię tylko o $\frac{1}{2} |\Delta \mathbf{v}|^2$.

Zadania · część 2

1. $v_1 = 7,726 \text{ km/s}$, $a_t = 24\,421 \text{ km}$, w perycentrum elipsy $v_p = \sqrt{\mu(2/r_1 - 1/a_t)} = 10,152 \text{ km/s}$; $\Delta v_1 = 2,426 \text{ km/s}$. W apocentrum $v_a = 1,608 \text{ km/s}$, $v_2 = 3,075 \text{ km/s}$; $\Delta v_2 = 1,467 \text{ km/s}$.
2. Okres elipsy $2\pi \sqrt{a_t^3/\mu} = 10,55 \text{ h}$, transfer to połowa: $5,28 \text{ h}$.
3. $\Delta v \approx \frac{v}{2} \frac{\Delta r}{r} = 11,3 \text{ m/s}$. Paliwo: $m(1 - e^{-11,3/2942}) = 420 \cdot 0,00384 = 1,6 \text{ t}$. Stacja traci kilkadziesiąt do ponad stu metrów wysokości na dobę (lekcja 3 Perturbacje: spłaszczenie Ziemi, orbita heliosynchroniczna i opór), więc takie manewry robi się co kilka tygodni.

Zadania · część 3

1. Moment pędu $h = r_b v_\perp$: w dużej odległości mała zmiana prędkości daje dużą zmianę h , a perycentrum zależy od h ($p = h^2/\mu$). Ten sam mechanizm sprawia, że korekty płaszczyzny i perycentrum robi się w apocentrum.
2. Pierwszy impuls: $\sqrt{2} - 1 = 0,4142$. Ostatni: prędkość paraboliczna w r_2 minus kołowa: $\sqrt{2/20} - \sqrt{1/20} = 0,3162 - 0,2236 = 0,0926$. Razem $0,5068 v_1$, wobec $0,5347 v_1$ Hohmanna: o 5% mniej, w nieskończonym czasie.
3. Hohmann: pół okresu elipsy o $a = 10,5r_1$: $25,7 \text{ h}$. Dwueliptyczny: połowy elips o $a = 20,5r_1$ i $a = 30r_1$: 194 h . Ok. 7,5 razy dłużej.

Zadania · część 4

1. $2 \cdot 7,726 \sin 14,25^\circ = 3,80 \text{ km/s}$; przy 60° : $2v \sin 30^\circ = v = 7,73 \text{ km/s}$, tyle co cała prędkość orbitalna.
2. $\sqrt{2,586 + 9,455 - 2 \cdot 4,944 \cdot 0,8788} = \sqrt{3,351} = 1,830 \text{ km/s}$. Osobno: $2,98 \text{ km/s}$. Połączenie oszczędza $1,15 \text{ km/s}$, bo długości wektorów się nie dodają (nierówność trójkąta).
3. Różnica kosztu manewrów od GTO: $1,830 - 1,481 = 0,35 \text{ km/s}$. $e^{350/3138} = 1,118$: przy tej samej masie na orbicie końcowej satelita z Canaveral potrzebuje o 11,8% większej masy na GTO. W praktyce rakiety z Canaveral często wykonują część zmiany płaszczyzny górnym stopniem (GTO „z obniżonym nachyleniem”).

Zadania · część 5

1. Perygeum: $10,15 \cdot 0,1 + 0,005 = 1,020 \text{ km}^2/\text{s}^2$; apogeum: $0,166 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Sześć razy więcej w perygeum: to efekt Obertha.
2. Spirala: $\Delta v = 7,726 - 3,075 = 4,65 \text{ km/s}$; $m_k/m_0 = e^{-4650/14710} = 0,729$ (27% masy to paliwo). Hohmann: $3,893 \text{ km/s}$, $e^{-3893/3138} = 0,289$ (71% paliwa). Spirala jest droższa w Δv , ale napęd o pięciokrotnie większym I_{sp} wygrywa w masie. Ceną jest czas: miesiące zamiast godzin, i wielokrotne przeloty przez pasy radiacyjne.

Zadania do przemyślenia

1. Impulsy niestyczne marnują część Δv na obrót wektora prędkości zamiast zmiany jego długości (część 1). Elipsa styczna do obu okręgów pozwala na oba impulsy styczne.
2. Spośród elips stycznych do wewnętrznego okręgu i przecinających zewnętrzny najmniejszą energię (najmniejsze Δv_1) ma ta, która zewnętrznego tylko dotyka. Większa elipsa wymaga większego Δv_1 i przecina zewnętrzny okrąg pod kątem, więc drugi impuls jest niestyczny. Dokładny dowód sprawdza pochodne $\Delta v_1 + \Delta v_2$ po parametrach elipsy.
1. Wyprawa: dwa impulsy $(\sqrt{2} - 1)v_1$, razem $0,828 v_1$; obrót w nieskończoności nic nie kosztuje.
2. Bezpośrednio: $2v_1 \sin(\Delta i/2)$. Równość przy $\sin(\Delta i/2) = 0,414$, $\Delta i = 48,9^\circ$. Powyżej tego kąta wyprawa jest tańsza. Przy optymalnie dobranym skończonym r_b (wtedy obrót w apocentrum coś kosztuje, ale impulsy w perycentrum są mniejsze) próg spada do $38,9^\circ$; $r_b \rightarrow \infty$ staje się optymalne dopiero powyżej ok. 60° .
1. Pierwszy impuls (w perygeum) wykonać w węźle orbity startowej: wtedy apogeum wypada w drugim węźle, nad równikiem. Wymaga to odpowiedniej chwili startu i położenia na orbicie parkingowej.
2. Jeśli się nie da (np. orbita eliptyczna z innym ω), obrót robi się w węźle przy większej prędkości (drożej) albo dzieli na kilka manewrów; obrót J_2 (lekcja 3) też powoli przesuwają węzły.
1. Małe przyspieszenie styczne a_t zmienia energię: $\dot{\epsilon} = v a_t$. Orbita pozostaje prawie kołowa, bo zmiana mimośrodów na obieg jest rzędu $a_t/(nv)$, czyli stosunku przyspieszenia silnika do przyspieszenia grawitacyjnego ($\ll 1$). Na orbicie prawie kołowej $\epsilon = -v^2/2$, więc $-v\dot{v} = v a_t$, czyli $\dot{v} = -a_t$: prędkość maleje dokładnie tak szybko, jak dodaje ją silnik.
2. Całkowite $\Delta v = \int a_t dt = v_1 - v_2$. Paradoks znika, gdy zauważyć, że grawitacja na rozwijającej się spirali hamuje statek o więcej, niż daje silnik.
1. GTO przecina wszystkie orbity od 250 km do GEO, w tym gęsto zajęte niskie orbity i okolice GEO. Perygeum jest dość wysoko, więc opór usuwa stopień dopiero po latach.
2. Rozwiązania: obniżenie perygeum po oddzieleniu (impuls w apogeum przeciw ruchowi, kilkadziesiąt m/s), żeby opór szybko sprowadził stopień; wypuszczanie satelity bliżej GEO; dla satelitów GEO po zakończeniu pracy podniesienie na orbitę „cementarną” ok. 300 km powyżej GEO.

Astronautyka · Lekcja 5: Manewry orbitalne · Źródła: H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 6); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. o manewrach orbitalnych); W. Hohmann, *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper* (1925). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a5.py).