

Rakieta na orbitę: równanie raketowe, stopniowanie i zakręt grawitacyjny

Orbita wokół Ziemi wymaga prędkości ok. 7,8 km/s, a każda rakieta wyrzuca gazy wolniej. Równanie raketowe mówi, ile to kosztuje paliwa: na tyle dużo, że z jednym stopniem rakieta ledwo uniosłaby samą siebie. Ta lekcja liczy budżet prędkości do orbity, pokazuje, dlaczego rakiety mają dwa–trzy stopnie, jak podzielić między nie zadanie i jak rakieta przechodzi z lotu pionowego do poziomego, tracąc po drodze półtora kilometra na sekundę na walkę z grawitacją.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
6; U. Walter,
Astronautics,
rozdz. 2–3 i 6.4; G.
P. Sutton, O.
Biblarz, *Rocket
Propulsion
Elements*, rozdz. 4

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: pakiet Korolowa
- 1 Równanie rakietowe i impuls właściwy
- 2 Budżet Δv do orbity
- 3 Stopniowanie
- 4 Zakręt grawitacyjny
- 5 Rakieta modelowa: liczby z symulacji
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: pakiet Korolowa

Rakieta R-7 z biura Siergieja Korolowa miała przenosić ciężką głowicę jądrową między kontynentami. Żeby to osiągnąć, jej konstruktorzy (pomysł pakietu pochodził z wcześniejszych analiz Michaiła Tichonrawowa) zrezygnowali z klasycznej „wieży” stopni ustawionych jeden na drugim i zbudował pakiet: centralny blok otoczony czterema bocznymi. Wszystkie silniki zapalano na ziemi, a boczne bloki odrzucano po wypaleniu paliwa. W październiku 1957 roku ta rakieta wyniosła Sputnika, w kwietniu 1961 Gagarina, a jej potomkowie, rakiety Sojuz, latają do dziś.

Pakiet R-7 to rozwiązanie problemu, który narzuca równanie raketowe: rakieta musi po drodze gubić puste zbiorniki i silniki, które przestały być potrzebne. Bez tego żadna rakieta na paliwo chemiczne nie dolatuje na orbitę z rozsądnym ładunkiem.

Pytanie na start. Prędkość orbitalna na wysokości 200 km to 7,8 km/s. Rakiety planuje się jednak na ok. 9,3–9,7 km/s. Na co idzie różnica? Odpowiedź w części 2.

1

Równanie raketowe i impuls właściwy

Z zasady zachowania pędu (fizyka, lekcja Dział 3: Pęd, zderzenia i środek masy) rakieta wyrzucająca gazy z prędkością względną c zmienia prędkość zgodnie z równaniem Ciołkowskiego. Rozwiązujemy je rozdzieleniem zmiennych (matematyka, lekcja 4.1 Równania różniczkowe zwyczajne):

RÓWNIANIE RAKIETOWE

$$\Delta v = c \ln \frac{m_0}{m_k} = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_k}, \quad \frac{m_0}{m_k} = e^{\Delta v/c}.$$

m_0 masa początkowa, m_k końcowa; I_{sp} to impuls właściwy w sekundach (ciąg podzielony przez ciężar paliwa zużywanego na sekundę), $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ to stała przeliczeniowa, a nie lokalne przyspieszenie.

Typowe I_{sp} (w próżni): paliwo stałe 250–290 s, nafta z tlenem 310–350 s, wodór z tlenem 420–465 s.

Najważniejsza cecha równania: masa rośnie *wykładniczo* z potrzebną zmianą prędkości. Z $I_{sp} = 300 \text{ s}$ i stosunkiem mas 10 rakieta osiąga 6,77 km/s. Żeby osiągnąć 9,4 km/s, potrzeba stosunku 24,4, czyli 96% masy startowej musiałoby być paliwem. Z wodorem ($I_{sp} = 450 \text{ s}$) wystarczy stosunek 8,4, ale wodór ma gęstość 70 kg/m^3 i wymaga ogromnych, ciężkich zbiorników.

1 Silnik ma $I_{sp} = 300$ s. Jaką zmianę prędkości daje stosunek mas 10? A $I_{sp} = 450$ s?

2 Jaki stosunek mas potrzebny jest do 9,4 km/s przy $I_{sp} = 300$ s i przy 450 s? Jaki ułamek masy startowej to paliwo?

3 Dlaczego impuls właściwy podaje się w sekundach? Jaki ma sens fizyczny?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

2 Budżet Δv do orbity

Gdyby rakieta mogła w jednej chwili nadać sobie całą prędkość, najmniejsze Δv wynikałoby z energii: od spoczynku na powierzchni ($\varepsilon = -\mu/R$) do orbity kołowej 200 km ($\varepsilon = -\mu/2r$) to $\sqrt{2\Delta\varepsilon} = 8,02$ km/s. Prawdziwa rakieta ma do tego trzy straty:

✎ BILANS PRĘDKOŚCI WZDŁUŻ TORU

$$\Delta v_{\text{Ciołkowski}} = v_k + \underbrace{\int g \sin \gamma dt}_{\text{grawitacja}} + \underbrace{\int \frac{D}{m} dt}_{\text{opór}} + \underbrace{\int \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt}_{\text{sterowanie}} - v_{\text{obrot Ziemi}}.$$

γ kąt toru lotu, D opór, α kąt między ciągiem a prędkością. Typowo: straty grawitacyjne 1–1,5 km/s, opór 0,05–0,15 km/s, sterowanie kilkadziesiąt m/s. Rakieta modelowa z części 5 traci na grawitację więcej (1,4–2,3 km/s), bo nie dławi silników i leci jednym, nieoptymalizowanym programem.

Odpowiedź na pytanie z prologu: różnica 1,5–2 km/s to głównie straty grawitacyjne. Póki rakieta leci w górę, część ciągu idzie na samo unoszenie: przy locie pionowym każda sekunda kosztuje 9,8 m/s. Dlatego rakieta ma stosunek ciągu do ciężaru na starcie 1,2–1,5 i jak najszybciej przechodzi do lotu poziomego. Opór jest dużo mniejszy, bo rakieta szybko opuszcza gęstą atmosferę. Obrót Ziemi pomaga: start na wschód z równika daje 465 m/s, z przylądka Canaveral (28,5°) 409 m/s, z Bajkonuru (45,6°) 325 m/s.

✍ ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Pokaż, że najmniejsza (impulsowa) zmiana prędkości od spoczynku na powierzchni do orbity kołowej 200 km, bez obrotu Ziemi, to 8,02 km/s. Ile z tego to „podniesienie” na 200 km?

- 2 Ile prędkości daje obrót Ziemi przy starcie na wschód z Kourou (5,2°), Bajkonuru (45,6°) i Plesiecka (62,9°)?

- 3 Rakieta o stosunku ciągu do ciężaru 1,0 zawisa nad wyrzutnią. Ile Δv traci na sekundę? Dlaczego nie robi się rakiet z $T/W = 3$ na starcie?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

3 Stopniowanie

Każdy stopień ma paliwo i konstrukcję (zbiorniki, silniki). Niech ε oznacza udział konstrukcji w masie stopnia. Pojedynczy stopień bez ładunku osiąga najwyżej $c \ln(1/\varepsilon)$: przy $I_{sp} = 350$ s i $\varepsilon = 0,08$ to 8,67 km/s, za mało na orbitę. Wielostopniowa rakietą gubi pustą konstrukcję po drodze.

N JEDNAKOWYCH STOPNI

$$\frac{m_{\text{ładunek}}}{m_0} = \left(\frac{e^{-\Delta v/(nc)} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^n.$$

Dla $\Delta v = 9,4$ km/s, $c = 3,3$ km/s, $\varepsilon = 0,1$: jeden stopień – niemożliwe, dwa – 2,44%, trzy – 3,24%, cztery – 3,55%, pięć – 3,71%.

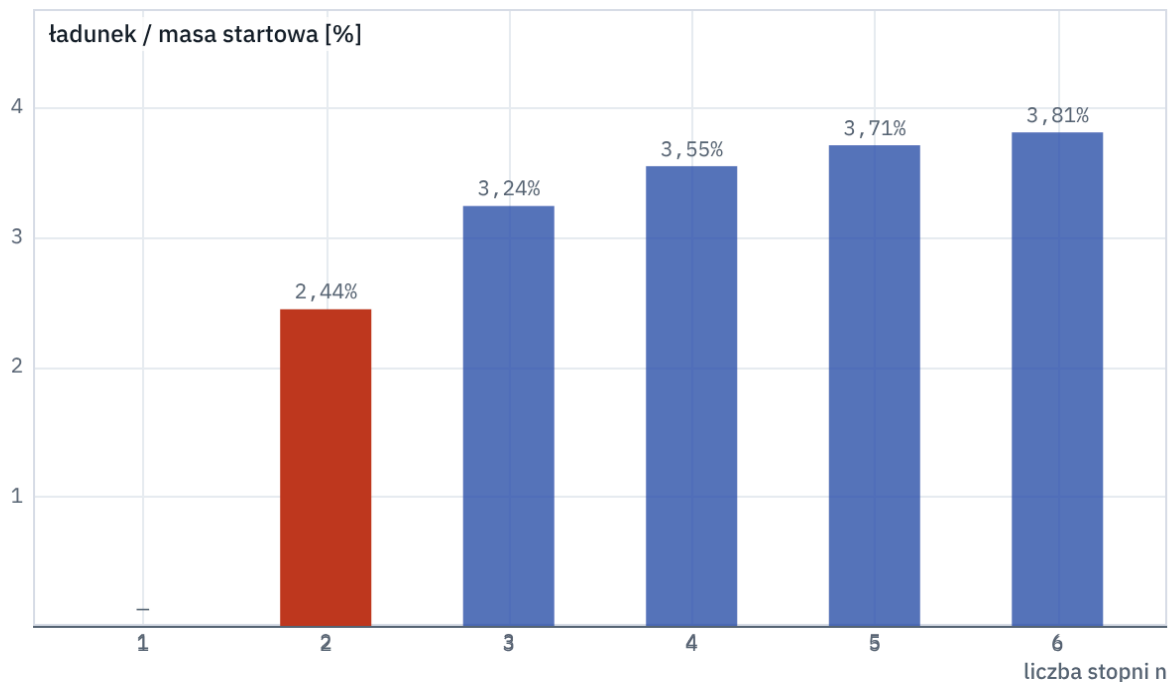
Zysk z kolejnych stopni szybko maleje, a każdy stopień to dodatkowe silniki, rozdzielanie, ryzyko awarii i koszt. Stąd prawie wszystkie rakiety orbitalne mają dwa albo trzy stopnie.

RAMKA: OPTYMALNY PODZIAŁ ZADANIA (MNOŻNIKI LAGRANGE'A)

Gdy stopnie się różnią (c_i, ε_i), szukamy stosunków mas $R_i = m_{0,i}/m_{k,i}$, które maksymalizują ładunek przy warunku $\sum c_i \ln R_i = \Delta v$. Metoda mnożników Lagrange'a (matematyka, lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych) daje $R_i = \frac{c_i \lambda - 1}{c_i \varepsilon_i \lambda}$, z jednym λ wyznaczonym z warunku. Dla $c = (2,9; 3,4)$ km/s i $\varepsilon = (0,06; 0,04)$: $\lambda = 0,409$, $R = (2,61; 7,01)$, czyli $\Delta v_1 = 2,78$ i $\Delta v_2 = 6,62$ km/s. Ładunek 3,68% masy startowej, wobec 3,22% przy równym podziale Δv . Wniosek: stopień lepszy (wyższe c , mniejsze ε) powinien robić większą część pracy, niezależnie od swojej pozycji: w tym modelu zamiana kolejności stopni daje ten sam podział i ten sam ładunek. Że w praktyce lepszy jest zwykle górny stopień, wynika z innego argumentu: każdy kilogram na górze trzeba rozpędzić całą rakieta, więc tam opłaca się drogi wodór i lekka konstrukcja.

SYMULACJA 1

Udział ładunku w masie startowej rakiety z n jednakowymi stopniami. Zmień potrzebne Δv , impuls właściwy i udział konstrukcji. Znajdź warunki, przy których jeden stopień wystarczy, i sprawdź, ile daje trzeci, czwarty stopień.



— udział ładunku dla n jednakowych stopni — wybrane n

udział ładunku przy $n = 2$ 2,44% (24,4 t na 1000 t)

stosunek mas każdego stopnia m_o/m_k 4,15

Δv na stopień 4,70 km/s

prędkość wylotowa $c = I_{sp} \cdot g_o$ 3,30 km/s

największe Δv jednego stopnia bez ładunku 7,60 km/s

Udział ładunku jest mały nawet w najlepszym razie: orbita kosztuje ok. 9,4 km/s, prawie trzy razy więcej niż prędkość wylotowa gazów z silnika na naftę i tlen.

Stan na rysunku: $\Delta v = 9,4$ km/s, $I_{sp} = 336,5$ s, $\epsilon = 0,100$, $n = 2$: ładunek 2,44% masy startowej.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Rakieta jednostopniowa: $I_{sp} = 350$ s, $\epsilon = 0,08$. Jakie największe Δv osiągnie bez ładunku? Czy doleci na orbitę?
- 2 Policz udział ładunku dla dwóch jednakowych stopni ($\Delta v = 9,4$ km/s, $c = 3,3$ km/s, $\epsilon = 0,1$).

- 3 Wyjaśnij, czemu przy niezmienniej łącznej Δv i takich samych stopniach dodanie trzeciego stopnia zwiększa ładunek o ok. 33%, a piątego (zamiast czwartego) tylko o 5%.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

4 Zakręt grawitacyjny

Rakieta startuje pionowo (żeby szybko opuścić gęstą atmosferę) i kończy lot prawie poziomo (bo orbita wymaga prędkości poziomej). Najprostszy sposób przejścia to **zakręt grawitacyjny**: po kilku sekundach lotu rakieta odchyła się o ułamek stopnia od pionu, a potem ciąg jest stale skierowany wzdłuż prędkości. Grawitacja sama zakrzywia tor. Kąt natarcia jest zerowy, więc siły poprzeczne od powietrza są najmniejsze; to ważne, bo smukła rakieta jest bardzo wrażliwa na obciążenia boczne w okolicy największego ciśnienia dynamicznego.

✎ RÓWNANIA LOTU NAD KULISTĄ ZIEMIĄ (W PŁASZCZYŹNIE)

$$\dot{v} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma, \quad v \dot{\gamma} = \frac{T \sin \alpha}{m} - \left(g - \frac{v^2}{r} \right) \cos \gamma,$$
$$\dot{r} = v \sin \gamma, \quad \dot{m} = -\frac{T}{I_{sp} g_0}.$$

Zakręt grawitacyjny: $\alpha = 0$. Wtedy $\dot{\gamma} < 0$, dopóki $v^2/r < g$, czyli dopóki prędkość jest mniejsza od kołowej: tor się kładzie.

Wielkość początkowego odchylenia decyduje o całym locie: za małe i rakieta za długo leci stromo (duże straty grawitacyjne, wysokie, ale za wolne wejście na orbitę), za duże i rakieta kładzie się w gęstej atmosferze (duży opór, ryzyko upadku). Prawdziwe rakiety nie latają czystym zakrętem grawitacyjnym przez cały czas: górny stopień, już poza atmosferą, jest sterowany według programu, który doprowadza go do zadanej orbity (dynamika lotu, lekcja 12 Naprowadzanie: trajektoria nominalna i śledzenie odchyłek).

✍ ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Z równania na $\dot{\gamma}$ przy $\alpha = 0$: przy jakiej prędkości poziomy lot ($\gamma = 0$) nie zmienia kąta toru?
- 2 Wyprowadź straty grawitacyjne dla odcinka lotu pionowego: rakieta o stałym ciągu i T/W rosnącym od 1,46 przez 10 s. Ile traci w tym czasie?

- 3 W symulacji ciśnienie dynamiczne osiąga największą wartość ok. 34 kPa. Dlaczego największe q występuje po kilkudziesięciu sekundach lotu, a nie przy starcie ani wysoko?

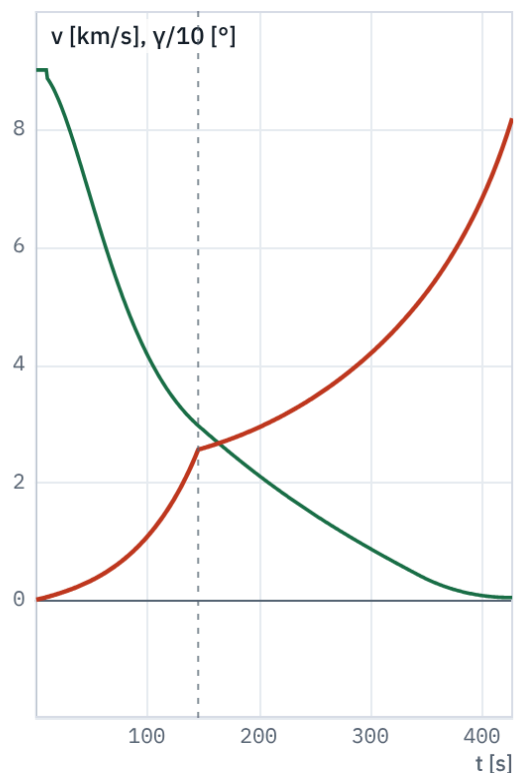
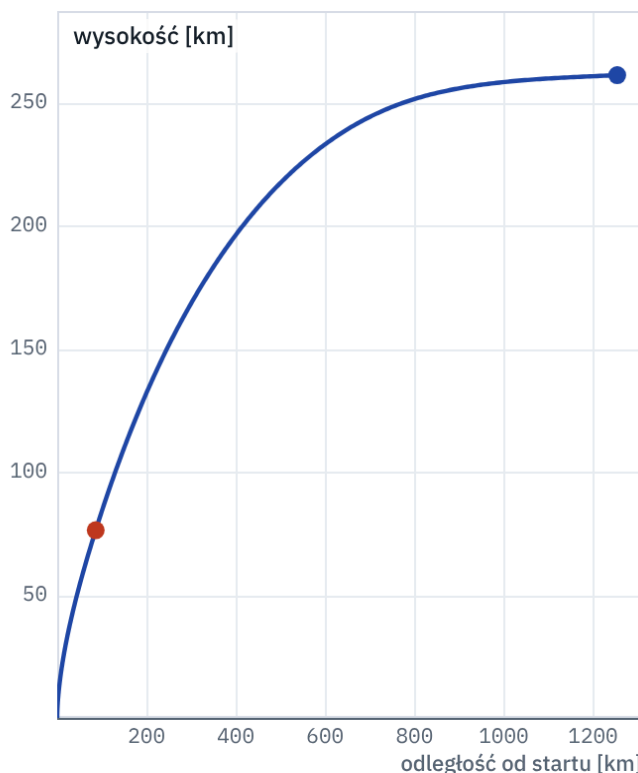
▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

5 Rakieta modelowa: liczby z symulacji

Symulacja używa wymyślonej rakiety dwustopniowej o rozmiarach zbliżonych do rakiet średniej klasy. Stopień 1: 390 t paliwa, 26 t konstrukcji, ciąg 7,6 MN, $I_{sp} = 290$ s (średnio między poziomem morza a próżnią). Stopień 2: 100 t paliwa, 4 t konstrukcji, 1,2 MN, 345 s. Atmosfera wykładnicza (skala 8,5 km), $C_D A = 5,25$ m², start bez obrotu Ziemi. Pierwszy stopień leci czystym zakrętem grawitacyjnym, drugi według prostego programu prowadzącego kąt toru do zera.

Z ładunkiem 15 t (masa startowa 535 t, $T/W = 1,45$) i odchyleniem 1,2°: rozdzielenie stopni po 146 s na wysokości 76 km przy 2,6 km/s; koniec pracy drugiego stopnia na 261 km z prędkością 8,23 km/s, orbita 259 × 2230 km. Straty: grawitacyjne 1,64 km/s, opór 35 m/s, sterowanie 13 m/s. Prędkość idealna z równania Ciołkowskiego to 9,92 km/s, i bilans się zgadza: 9924 – 1643 – 35 – 13 = 8233 m/s. Przy odchyleniu 1,8° ta sama rakieta spada: kładzie się za wcześnie i wpada w gęste warstwy atmosfery.

SYMULACJA 2 Start rakiety modelowej: zakręt grawitacyjny pierwszego stopnia i sterowany lot drugiego. Kropki na torze: rozdzielenie stopni i koniec pracy. Dobierz odchylenie od pionu i ładunek tak, żeby uzyskać orbitę z perygeum powyżej 150 km.



— tor: wysokość od odległości — prędkość [km/s] — kąt toru lotu γ [°/10]

koniec pracy 2. stopnia 261 km, 8233 m/s, $\gamma = 0,4^\circ$

orbita: perygeum / apogeum 259 / 2230 km

Δv idealne (Ciołkowski) 9924 m/s

straty: grawitacja / opór / sterowanie 1643 / 35 / 13 m/s

rozdzielenie stopni 76 km, 2555 m/s, $\gamma = 30^\circ$

największe ciśnienie dynamiczne 34,2 kPa

Orbita osiągnięta. Straty grawitacyjne to 1643 m/s: tyle kosztuje unoszenie rakiety w pionie, zanim nabierze prędkości poziomej. Mniejsze odchylenie daje stromszy tor i większe straty, większe – płaski tor w gęstym powietrzu.

Stan na rysunku: odchylenie $1,20^\circ$ w 10. s, ładunek 15 t; rakieta modelowa: stopień 1 (390 t paliwa, 26 t konstrukcji, 7,6 MN, 290 s), stopień 2 (100 t, 4 t, 1,2 MN, 345 s).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

1 Policz idealne Δv obu stopni rakiety modelowej z ładunkiem 15 t i porównaj z liczbą z symulacji.

2 Rakieta z ładunkiem 15 t kończy pracę na 261 km z prędkością 8233 m/s. Ile ma nadmiaru prędkości ponad kołową na tej wysokości i co z nim zrobić?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: WSTĘPNY PROJEKT RAKIETY

1. Budżet Δv : prędkość orbitalna + straty (ok. 1,5–2 km/s) – obrót Ziemi.
2. Liczba stopni z ϵ i c : czy jeden stopień w ogóle starcza? Zwykle 2–3.
3. Podział Δv między stopnie (mnożniki Lagrange'a); masy od góry: ładunek $\rightarrow$ ostatni stopień $\rightarrow$ niższe.
4. Ciąg: T/W na starcie 1,2–1,5, górny stopień mniej.
5. Sprawdzenie symulacją toru: straty, ciśnienie dynamiczne, orbita końcowa.

Przykład 6.1

Masy od góry

Ładunek 10 t. Górny stopień: $c = 3,4$ km/s, $\epsilon = 0,08$, ma dać 5,5 km/s. Ile waży?

- 1 Stosunek mas $R = e^{5,5/3,4} = 5,04$.
- 2 Masa stopnia m_s (paliwo + konstrukcja): $\frac{m_s+10}{\epsilon m_s+10} = 5,04$, czyli $m_s + 10 = 5,04(0,08m_s + 10)$, $m_s(1 - 0,403) = 40,4$, $m_s = 67,7$ t.
- 3 Paliwo $0,92 \cdot 67,7 = 62,3$ t, konstrukcja 5,4 t; masa startowa górnego stopnia z ładunkiem 77,7 t.

Wynik: 67,7 t stopnia na 10 t ładunku.

Sprawdzenie: $3,4 \ln(77,7/15,4) = 5,50$ km/s $\checkmark$. Dolny stopień musi teraz rozpędzić 77,7 t; tak buduje się raketę od góry.

Przykład 6.2

Optymalny podział między dwa różne stopnie

$c_1 = 2,9 \text{ km/s}$, $\varepsilon_1 = 0,06$; $c_2 = 3,4 \text{ km/s}$, $\varepsilon_2 = 0,04$; $\Delta v = 9,4 \text{ km/s}$. Jak podzielić?

- 1 Warunek: $\sum_i c_i \ln \frac{c_i \lambda - 1}{c_i \varepsilon_i \lambda} = 9,4$; rozwiązanie numeryczne (metoda bisekcji albo Newtona) $\lambda = 0,4088$.
- 2 $R_1 = (2,9 \cdot 0,4088 - 1)/(2,9 \cdot 0,06 \cdot 0,4088) = 2,61$, $R_2 = 7,01$.
- 3 $\Delta v_1 = 2,9 \ln 2,61 = 2,78 \text{ km/s}$, $\Delta v_2 = 3,4 \ln 7,01 = 6,62 \text{ km/s}$.

Wynik: ładunek 3,68% masy startowej; przy równym podziale (po 4,7 km/s) 3,22%.

Sprawdzenie: przeszukanie wszystkich podziałów co 1 m/s daje maksimum przy $\Delta v_1 = 2,78 \text{ km/s}$ ✓.

Przykład 6.3

Gdzie idą straty

W symulacji z ładunkiem 10 t porównaj odchylenie $0,8^\circ$ i $1,6^\circ$.

- 1 $0,8^\circ$: rozdzielenie na 97 km przy $\gamma = 50^\circ$; straty grawitacyjne 2,32 km/s, sterowanie 0,25 km/s (drugi stopień musi mocno położyć tor); orbita $423 \times 3538 \text{ km}$.
- 2 $1,6^\circ$: rozdzielenie na 68 km przy $\gamma = 22^\circ$; straty grawitacyjne 1,37 km/s, opór 43 m/s; orbita $191 \times 12\,218 \text{ km}$.
- 3 Różnica strat ok. 1 km/s przy tej samej rakiecie: płaski tor jest tańszy, dopóki rakietka nie wpada w gęste powietrze (przy $1,8^\circ$ i 15 t ładunku już spada).

Wynik: straty grawitacyjne zależą głównie od tego, jak długo tor jest stromy.

Sprawdzenie: w obu przypadkach $v_k = \Delta v_{\text{id}}$ – straty z dokładnością do 1 m/s ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Najtrudniej jest wznieść się na wysokość orbity.”

Wzniesienie na 200 km kosztuje ok. 0,2–0,3 km/s z ok. 9,4. Najtrudniej jest набrać prędkości poziomej.

× „Rakieta odpycha się od powietrza.”

Rakieta odpycha się od własnych gazów; w próżni działa lepiej, bo ciśnienie zewnętrzne nie zmniejsza ciągu.

× „Więcej stopni zawsze lepiej.”

Zysk szybko maleje, a koszt, masa połączeń i ryzyko rosną. Optimum praktyczne to 2–3 stopnie.

× „Lepiej zabrać więcej paliwa.”

Dodatkowe paliwo wymaga większych zbiorników i silników, a pierwsze kilogramy paliwa idą na rozpędzanie pozostałych; zysk jest logarytmiczny, koszt liniowy.

× „Rakieta leci na orbitę pionowo.”

Pionowo tylko kilka–kilkanaście sekund; potem tor się kładzie i większość pracy silniki wykonują prawie poziomo.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Pakiet kontra wieża.** R-7 zapala wszystkie silniki na ziemi i odrzuca boczne bloki (stopniowanie równoległe). Jakie są zalety i wady w porównaniu ze stopniami ustawionymi szeregowo?

2 **Nieskończenie wiele stopni.** Pokaż, że dla $n \rightarrow \infty$ jednakowych stopni udział ładunku dąży do $e^{-\Delta v/(c(1-\epsilon))}$. Jak to interpretować?

- 3 **Dlaczego nie poziomo od razu?** Skoro straty grawitacyjne biorą się z lotu stromego, dlaczego rakietę nie leci od początku prawie poziomo?
- 4 **Ile więcej ładunku?** Rakietę modelowa z 15 t kończy pracę 480 m/s szybciej, niż trzeba na orbitę kołową 260 km. Oszacuj, o ile więcej ładunku mogłaby zabrać na tę orbitę.
- 5 **Impuls właściwy a gęstość.** Wodór daje I_{sp} o 30% większy od nafty, a mimo to pierwsze stopnie wielu rakiet używają nafty albo metanu. Dlaczego?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Napisz równanie raketowe.**

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln(m_0/m_k).$$

- 2 **Ile Δv potrzeba na niską orbitę i z czego się składa?**

Ok. 9,3–9,7 km/s: 7,8 km/s prędkości orbitalnej plus straty (grawitacyjne 1–1,5, opór, sterowanie) minus obrót Ziemi.

- 3 **Skąd straty grawitacyjne?**

$\int g \sin \gamma dt$: część ciągu idzie na unoszenie, póki tor jest stromy.

- 4 **Po co stopnie?**

Żeby nie rozpędzać pustych zbiorników i silników; pojedynczy stopień nie osiąga prędkości orbitalnej.

- 5 **Co to jest zakręt grawitacyjny?**

Lot z ciągiem wzdłuż prędkości ($\alpha = 0$) po małym początkowym odchyleniu; grawitacja kładzie tor.

6 Jak podzielić Δv między różne stopnie?

Mnożniki Lagrange'a: $R_i = (c_i \lambda - 1) / (c_i \varepsilon_i \lambda)$; stopień lepszy (wyższe c , mniejsze ε) robi więcej.

RAKIETA I STOPNIE

$$\Delta v = c \ln(m_0/m_k), c = I_{sp} g_0$$

$$n \text{ jednakowych: } \pi = \left(\frac{e^{-\Delta v/n c} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^n, n \rightarrow \infty: e^{-\Delta v/c(1-\varepsilon)}$$

$$\text{optimum: } R_i = \frac{c_i \lambda - 1}{c_i \varepsilon_i \lambda}, \sum c_i \ln R_i = \Delta v$$

$$\text{jeden stopień bez ładunku: } c \ln(1/\varepsilon)$$

WZNOSZENIE

$$\dot{v} = (T \cos \alpha - D)/m - g \sin \gamma$$

$$v \dot{\gamma} = T \sin \alpha / m - (g - v^2/r) \cos \gamma$$

$$\Delta v_{id} = v_k + \int g \sin \gamma + \int D/m + \int \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) - v_{obr}$$

$$\text{obróć Ziemi } 465 \cos \varphi \text{ m/s; LEO ok. 9,3-9,7 km/s}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. 6 (wznoszenie, stopniowanie, straty); U. Walter, *Astronautics*, rozdz. 2-3 (równanie raketowe, stopniowanie) i 6.4 (zakręt grawitacyjny).
- **Dla chętnych:** G. P. Sutton, O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*, rozdz. 4: osiągi rakiet wielostopniowych z punktu widzenia napędu.

Rakieta zostawiła ładunek na orbicie. Teraz trzeba go przenieść tam, gdzie ma pracować: wyżej, na orbitę geostacjonarną, albo do innej płaszczyzny. Kolejna lekcja liczy, jak zrobić to najtaniej: transfer Hohmanna i zmiana płaszczyzny orbity.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $c = 300 \cdot 9,807 = 2942 \text{ m/s}$, $\Delta v = 2942 \ln 10 = 6,77 \text{ km/s}$. Przy 450 s: 10,16 km/s.
2. $e^{9400/2942} = 24,4$ (paliwo 95,9% masy) i $e^{9400/4413} = 8,4$ (88,1%). Nawet z wodorem na konstrukcję, silniki i ładunek zostaje 12%.
3. $I_{sp} = T/(\dot{m}g_0)$: ciąg w niutonach dzielony przez ciężar (w niutonach) paliwa spalane go na sekundę, czyli wynik w sekundach. To czas, przez jaki kilogram paliwa daje ciąg równy swojemu ciężarowi. Jednostka nie zależy od układu (SI czy funty), stąd popularność. Fizycznie ważna jest prędkość wylotowa $c = I_{sp}g_0$.

Zadania · część 2

1. $\Delta \varepsilon = -\mu/(2 \cdot 6578) + \mu/6378 = -30,30 + 62,50 = 32,20 \text{ km}^2/\text{s}^2$, więc $\sqrt{2 \cdot 32,20} = 8,02 \text{ km/s}$. Prędkość kołowa na 200 km to 7,78 km/s; reszta, ok. 0,24 km/s, to koszt podniesienia. (Liczy się energia, nie suma prędkości: dwa impulsy, „w górę” i „w bok”, kosztowałyby więcej.)
2. $465 \cos \varphi$: 463, 325 i 212 m/s. Start na zachód (orbita wsteczna) kosztuje tyle samo dodatkowo, dlatego np. Izrael, który musi startować nad morzem na zachód, płaci za to ładunkiem.
3. 9,8 m/s na sekundę: cały ciąg idzie na unoszenie, prędkość się nie zmienia. Większe T/W zmniejsza straty grawitacyjne, ale wymaga cięższych silników (masa silnika rośnie z ciągiem) i daje duże przyspieszenia i ciśnienie dynamiczne w gęstej atmosferze. Kompromis to ok. 1,2–1,5 na starcie; przyspieszenie i tak rośnie, bo rakieta traci masę.

Zadania · część 3

1. $3432 \ln 12,5 = 8,67 \text{ km/s}$. Potrzeba ok. 9,4 km/s: nie, nawet bez ładunku. Rakieta jednostopniowa na orbitę wymaga ε rzędu 0,05 i wodoru, co od dziesięcioleci pozostaje poza zasięgiem praktycznych konstrukcji.
2. $e^{-9,4/6,6} = 0,2407$; $(0,2407 - 0,1)/0,9 = 0,1563$; do kwadratu: 0,0244, czyli 2,44%. Z 500 t na starcie ok. 12 t na orbicie.
3. Zysk ze stopniowania to wyrzucanie pustej konstrukcji wcześniej. Przy wielu stopniach każdy jest mały i ma mały stosunek mas; czynnik $(e^{-\Delta v/nc} - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ dąży do $e^{-\Delta v/nc}$ a dokładniej każdy czynnik to ok. $1 - \frac{\Delta v}{nc(1-\varepsilon)}$, więc łączna strata od konstrukcji dąży do skończonej wartości. Ładunek dąży do granicy $e^{-\Delta v/(c(1-\varepsilon))}$ (zadanie do przemyślenia 2), czyli 4,22%; przy 5 stopniach mamy 3,71%, ok. 12% poniżej granicy, i każdy kolejny stopień zbliża nas do niej coraz mniej.

Zadania · część 4

1. $\dot{\gamma} = 0$ przy $g = v^2/r$, czyli $v = \sqrt{gr} = \sqrt{\mu/r}$: prędkość kołowa. Wolniej tor opada (rakieta „spada”), szybciej się wznosi.
2. Przy $\gamma = 90^\circ$ strata to $\int g dt \approx 9,8 \cdot 10 = 98 \text{ m/s}$, niezależnie od T/W . Większy ciąg skraca ten etap, bo rakieta szybciej osiąga prędkość, przy której warto się kłaść, ale za samą sekundę lotu pionowego zawsze płaci się 9,8 m/s.

3. $q = \frac{1}{2}\rho v^2$: przy starcie v jest małe, wysoko ρ jest małe. Prędkość rośnie mniej więcej liniowo, a gęstość maleje wykładniczo z wysokością (skala ok. 8 km), więc iloczyn ma maksimum, typowo na wysokości 10–15 km. Wiele rakiet dławi wtedy silniki, żeby ograniczyć obciążenia konstrukcji.

Zadania · część 5

1. Stopień 1: $m_0 = 535$ t, $m_k = 145$ t, $290 \cdot 9,807 \ln(535/145) = 3713$ m/s. Stopień 2: $m_0 = 119$ t, $m_k = 19$ t, $345 \cdot 9,807 \ln(119/19) = 6207$ m/s. Razem 9920 m/s; symulacja całkuje T/m i daje 9924 m/s (różnica z dyskretyzacji).
2. $v_k = \sqrt{\mu/6639} = 7749$ m/s; nadmiar ok. 480 m/s, stąd apogeum 2230 km. Można: zabrać cięższy ładunek (zadanie do przemysłienia 4), wyłączyć silnik wcześniej, albo wykorzystać apogeum jako początek przejścia na wyższą orbitę (lekcja 5 Manewry orbitalne: transfer Hohmanna i zmiana płaszczyzny orbity).

Zadania do przemysłienia

1. Zalety: wszystkie silniki zapalone i sprawdzone przed startem (w latach 50. zapłon silnika w próżni był wielką niewiadomą), duży ciąg startowy, krótsza i sztywniejsza rakietka.
 2. Wady: centralny blok pracuje od startu, więc w chwili odrzucenia bocznych ma już mniej paliwa niż osobny górny stopień; część jego silników pracuje w gęstej atmosferze z gorszym I_{sp} . Dlatego R-7 dostała z czasem dodatkowy, szeregowy górny stopień.
2. 1. $\ln \pi = n \ln \frac{e^{-x/n} - \varepsilon}{1 - \varepsilon}$ z $x = \Delta v/c$. Dla dużego n : $e^{-x/n} \approx 1 - x/n$, więc $\frac{1 - x/n - \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{x}{n(1 - \varepsilon)}$, a $n \ln(1 - \frac{x}{n(1 - \varepsilon)}) \rightarrow -\frac{x}{1 - \varepsilon}$.
2. To rakietka, która konstrukcję wyrzuca w sposób ciągły razem z paliwem: zachowuje się jak rakietka bez konstrukcji z prędkością wylotową zmniejszoną do $c(1 - \varepsilon)$. Dla $\varepsilon = 0,1$, $c = 3,3$, $\Delta v = 9,4$: 4,2% – górna granica dla stopniowania.
3. 1. Opór i ogrzewanie: lot z prędkością kilku km/s w gęstej atmosferze kosztowałby kilometry na sekundę oporu i zniszczyłby raketę (ciśnienie dynamiczne setek kPa, w symulacji przy upadku ponad 400 kPa).
2. Optimum to szybkie wyjście ponad gęstą atmosferę (tor stromy), potem kładzenie się. Rakietki startujące z Księżyca, bez atmosfery, mogą się kłaść dużo wcześniej.
4. 1. Zmiana ładunku zmienia głównie Δv drugiego stopnia: $\partial \Delta v_2 / \partial m_L = c_2 \left(\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_k} \right) = 3384 \left(\frac{1}{119} - \frac{1}{19} \right) = -150$ m/s na tonę.
2. 480 m/s to ok. 3 t, ale straty też się zmieniają z T/W , więc trzeba to sprawdzić symulacją. Przy 18 t i odchyleniu $1,1^\circ$ orbita ma 254×303 km, prawie kołowa; przy 19 t najlepsze odchylenie ($1,2^\circ$) daje 158×340 km, na granicy. Odpowiedź: ok. 3 t, zgodnie z oszacowaniem.
5. 1. Ciekły wodór ma gęstość 70 kg/m³, nafta ok. 800: mieszanka z tlenem jest ok. trzy razy mniej gęsta, więc zbiorniki są większe i cięższe (ε rośnie), a opór większy. Na pierwszym stopniu liczy się też duży ciąg, który łatwiej uzyskać z gęstego paliwa.
2. Na górnym stopniu, gdzie każdy kilogram konstrukcji jest drogi, a Δv duże, wysoki I_{sp} wygrywa: stąd często górne stopnie wodorowe.

Astronautyka · Lekcja 4: Rakietka na orbitę · Źródła: C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. 6); U. Walter, *Astronautics* (Springer, rozdz. 2–3, 6.4); G. P. Sutton, O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements* (Wiley, rozdz. 4). Rakietka modelowa jest wymyślona. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a4.py).