

Perturbacje: spłaszczenie Ziemi, orbita heliosynchroniczna i opór

Orbita keplerowska jest stała tylko dla punktowej Ziemi w próżni. Prawdziwa Ziemia jest spłaszczona, ma atmosferę, a Księżyc i Słońce też przyciągają. Ta lekcja (dla chętnych) pokazuje, które z tych zaburzeń są ważne i co robią z elementami orbity. Najważniejsze to spłaszczenie: obraca płaszczyznę orbity o kilka stopni na dobę, co inżynierowie zamienili w narzędzie, orbitę heliosynchroniczną. Drugie to opór: bez niego satelity na niskich orbitach latałyby wiecznie.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
1,5 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
5; U. Walter,
Astronautics,
rozdz. 12; H. D.
Curtis, *Orbital
Mechanics for
Engineering
Students*, rozdz. o
perturbacjach

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Ziemia w kształcie gruszki
- 1 Spłaszczona Ziemia: człon J_2
- 2 Obrót węzła i perygeum
- 3 Orbita heliosynchroniczna
- 4 Opór atmosfery i czas życia orbity
- 5 Hierarchia zaburzeń
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Ziemia w kształcie gruszki

Vanguard 1, mały satelita wystrzelony przez USA w marcu 1958 roku, wciąż krąży wokół Ziemi: to najstarszy sztuczny obiekt na orbicie. Jego najważniejszy wynik nie pochodził z żadnego przyrządu na pokładzie, tylko z obserwacji samej orbity. Wysokość perygeum okresowo się zmieniała w sposób, którego nie dało się wytłumaczyć symetrycznym spłaszczeniem Ziemi. Wyjaśnienie było takie, że półkula południowa jest nieco „grubsza” od północnej: Ziemia ma lekki kształt gruszki.

Satelita jest czułym przyrządem do ważenia Ziemi. Każde odstępstwo pola grawitacyjnego od pola punktowego zostawia ślad w powolnych zmianach elementów orbity. Dziś misje takie jak GRACE mierzą w ten sposób nawet przemieszczanie się wody i lodu.

Pytanie na start. *Satelita obserwacyjny ma przelatywać nad każdym miejscem zawsze o tej samej porze dnia (np. o 10:30 czasu lokalnego), przez cały rok. Płaszczyzna jego orbity musi więc obracać się o 360° na rok. Co ją obraca? Odpowiedź w części 3.*

1

Splaszczona Ziemia: człon J_2

Ziemia obraca się, więc jest splaszczona: promień równikowy (6378 km) jest o 21 km większy od biegunowego. Jej potencjał grawitacyjny różni się od $-\mu/r$ głównie członem zależnym od szerokości φ :

POTENCJAŁ SPŁASZCZONEJ ZIEMI (DO CZŁONU J_2)

$$U = -\frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2} \right], \quad J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}.$$

Przyspieszenie ($\mathbf{a} = -\nabla U$, matematyka, lekcja 3.1 Reguła łańcuchowa, ekstrema i mnożniki Lagrange'a w wielu zmiennych) w osiach ECI, z $f = 5z^2/r^2$:

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{3}{2} \frac{J_2 \mu R^2}{r^5} \begin{bmatrix} x(f-1) \\ y(f-1) \\ z(f-3) \end{bmatrix}.$$

Człon J_2 jest ok. tysiąc razy mniejszy od głównego członu, ale jego skutki się sumują. Nadmiar masy na równiku przyciąga satelitę ku płaszczyźnie równika, gdy ten jest nad nią albo pod nią. Ten moment siły działa na orbitę jak na wirujący bąk (fizyka, lekcja Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna): orbita nie przechyla się, tylko jej płaszczyzna wykonuje precesję wokół osi Ziemi. Pozostałe harmoniczne (J_3 od „gruszki”, J_4 i dalsze, zależności od długości geograficznej) są kilkaset razy mniejsze od J_2 .

- 1 Ile wynosi czynnik $(3 \sin^2 \varphi - 1)/2$ na równiku i na biegunie? Gdzie spłaszczenie zwiększa przyciąganie, a gdzie je zmniejsza (na tej samej odległości od środka)?
- 2 Ile wynosi przyspieszenie od J_2 na równiku na wysokości 700 km ($r = 7078$ km) w porównaniu z głównym przyspieszeniem grawitacyjnym?
- 3 Dlaczego zaburzenie od J_2 nie zmienia (średnio) wielkiej półosi ani energii orbity, a zmienia jej orientację?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2 Obrót węzła i perygeum

Uśredniając wpływ J_2 po jednym obiegu (rachunek z równań Lagrange'a dla elementów, pomijamy go), dostaje się stałe tempo zmian trzech elementów; a , e , i średnio się nie zmieniają:

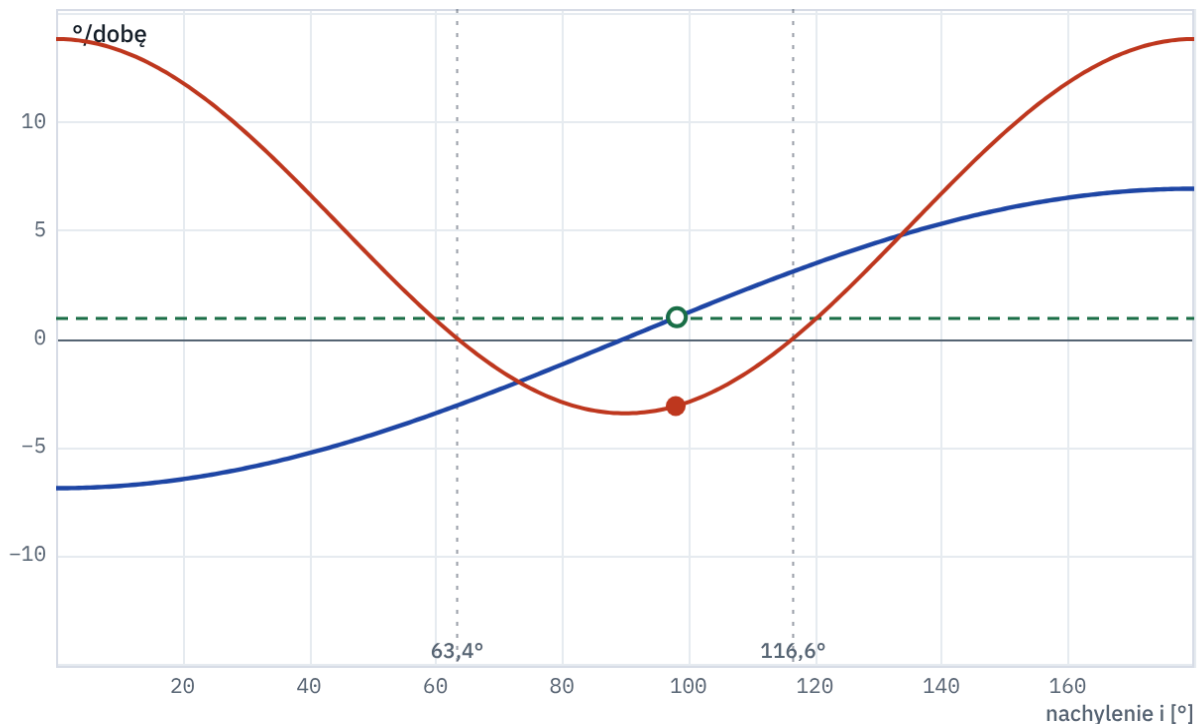
⚙️ WIEKOWE ZMIANY OD J_2

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{p} \right)^2 \cos i, \quad \dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1), \quad p = a(1 - e^2).$$

Orbita prosta ($i < 90^\circ$): węzeł cofa się na zachód. Orbita biegunowa: węzeł stoi.
Nachylenie krytyczne $\cos^2 i = 1/5$, $i = 63,43^\circ$ lub $116,57^\circ$: perygeum stoi.

Dla stacji kosmicznej (420 km, $51,64^\circ$): $\dot{\Omega} = -4,95^\circ/\text{dobę}$ i $\dot{\omega} = +3,69^\circ/\text{dobę}$. W ciągu 73 dób płaszczyzna orbity obraca się o pełne 360° . Sprawdzenie numeryczne: całkowanie RK4 z przyspieszeniem $\mathbf{a}_{J_2}$ dla orbity 700 km o nachyleniu $98,19^\circ$ daje po 10 dobach obrót węzła o $9,91^\circ$, wzór $9,86^\circ$. Różnica 0,5% bierze się stąd, że elementy policzone z chwilowych ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$) (oskulacyjne) różnią się od średnich o wielkości rzędu J_2 .

SYMULACJA 1 Tempo obrotu węzła $\dot{\Omega}$ i perygeum $\dot{\omega}$ od spłaszczenia Ziemi w funkcji nachylenia. Zielona linia to tempo potrzebne do orbity heliosynchronicznej (pusty zielony punkt: nachylenie, które je daje). Pionowe kreski: nachylenia krytyczne.



— $\dot{\Omega}$ (węzeł) — $\dot{\omega}$ (perygeum) — — heliosynchroniczna: $+0,9856^\circ/\text{dobę}$

$\dot{\Omega}$ (obrot węzła) $+0,963^\circ/\text{dobę}$

$\dot{\omega}$ (obrot perygeum) $-3,125^\circ/\text{dobę}$

pełny obrót węzła 374 dób

nachylenie heliosynchroniczne dla tej orbity $98,19^\circ$

Orbita heliosynchroniczna: płaszczyzna orbity obraca się o 360° na rok, razem z kierunkiem do Słońca. Satelita przelatuje nad każdym miejscem o tej samej porze lokalnego czasu słonecznego.

Stan na rysunku: perygeum 700 km, $e = 0,00$, $i = 98,0^\circ$; $\dot{\Omega} = 0,963^\circ/\text{d}$, $\dot{\omega} = -3,125^\circ/\text{d}$ ($J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz $\dot{\Omega}$ dla stacji kosmicznej: $a = 6798$ km, $e = 0$, $i = 51,64^\circ$, $n = 1,126 \cdot 10^{-3}$ rad/s.

2 Satelity GPS krążą na wysokości 20 200 km z nachyleniem 55° , w sześciu płaszczyznach. Ile wynosi ich $\dot{\Omega}$? Dlaczego ważne jest, żeby wszystkie miały to samo nachylenie i wysokość?

- 3 O ile stopni na rok obracałoby się perygeum orbity Mołnia ($a = 26\,554\text{ km}$, $e = 0,74$), gdyby miała nachylenie 55° zamiast $63,4^\circ$?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

3 Orbita heliosynchroniczna

Odpowiedź na pytanie z prologu: płaszczyznę orbity obraca spłaszczenie Ziemi. Ziemia obiega Słońce o 360° w ciągu 365,24 doby, czyli kierunek do Słońca obraca się o $0,9856^\circ$ na dobę na wschód. Jeśli węzeł orbity obraca się w tym samym tempie, kąt między płaszczyzną orbity a kierunkiem do Słońca jest stały i satelita przecina każdą szerokość geograficzną o tej samej porze lokalnego czasu słonecznego. Warunek:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \cos i = +0,9856^\circ/\text{dobę} \Rightarrow \cos i < 0.$$

Orbita musi być lekko wsteczna. Dla orbit kołowych: $500\text{ km} \rightarrow 97,40^\circ$, $600\text{ km} \rightarrow 97,79^\circ$, $700\text{ km} \rightarrow 98,19^\circ$, $800\text{ km} \rightarrow 98,60^\circ$, $1000\text{ km} \rightarrow 99,48^\circ$. Takich orbit używa większość satelitów obserwacji Ziemi: oświetlenie każdego zdjęcia jest podobne, a moc z paneli słonecznych przewidywalna. Szczególny przypadek to orbita „świt–zmrzch”: płaszczyzna prostopadła do kierunku do Słońca, satelita prawie nigdy nie wchodzi w cień Ziemi.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Jakie nachylenie musi mieć orbita heliosynchroniczna na wysokości 800 km? Jaka największą szerokość geograficzną obserwuje (bezpośrednio pod sobą)?
- 2 Satelita heliosynchroniczny przelatuje przez węzeł zstępujący o 10:30 czasu lokalnego. O której przelatuje przez węzeł wstępujący po drugiej stronie Ziemi?
- 3 Czy orbita heliosynchroniczna istnieje na każdej wysokości? Znajdź największą wysokość orbity kołowej, dla której jest to możliwe.

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

Opór atmosfery i czas życia orbity

Atmosfera nie kończy się nagle. Na wysokości 400 km gęstość to ok. $4 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$, czyli $3 \cdot 10^{-12}$ gęstości przy ziemi, ale satelita leci z prędkością 7,7 km/s, a opór rośnie z kwadratem prędkości (fizyka, lekcja Dział 10: Płyiny: ciśnienie, przepływ, lepkość i siły aerodynamiczne). Z równania energii dla orbity kołowej wynika tempo obniżania orbity:

OPÓR I OBNIŻANIE ORBITY KOŁOWEJ

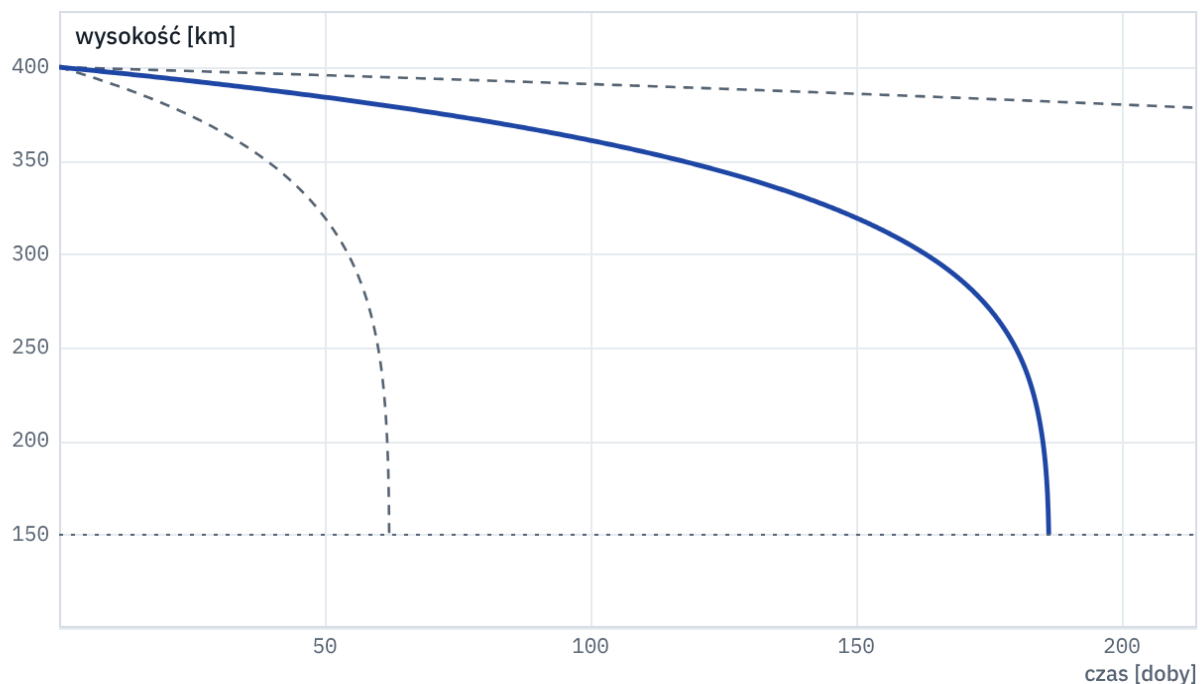
$$\mathbf{a}_D = -\frac{1}{2} \frac{\rho v^2}{B} \hat{\mathbf{v}}, \quad B = \frac{m}{C_D A}, \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\rho \sqrt{\mu a}}{B}.$$

B to współczynnik balistyczny (kg/m^2), $C_D \approx 2,2$ dla satelitów. Gęstość w przybliżeniu wykładniczo: $\rho = \rho_0 e^{-(h-h_0)/H}$, z wysokością skali H od ok. 40 km (200 km) do ok. 60 km (400 km).

Wzór na da/dt wyprowadza się z $\dot{\varepsilon} = \mathbf{a}_D \cdot \mathbf{v} = -\rho v^3/(2B)$ i $\varepsilon = -\mu/(2a)$. Ponieważ gęstość rośnie wykładniczo w dół, obniżanie się przyspiesza: satelita spędza większość czasu życia blisko wysokości początkowej, a ostatnie kilkadziesiąt kilometrów pokonuje w kilka dni. Dla satelity typu CubeSat 3U ($m = 4 \text{ kg}$, $A = 0,03 \text{ m}^2$, $B = 61 \text{ kg/m}^2$) z modelem wykładniczym przy średniej aktywności Słońca: z 300 km ok. 23 dni, z 400 km ok. pół roku, z 500 km ok. 3 lata, z 600 km kilkanaście lat.

Te liczby trzeba brać z dużą ostrożnością. Gęstość górnej atmosfery zmienia się kilkukrotnie z aktywnością Słońca (promieniowanie ultrafioletowe nagrzewa i „puchnie” termosferę), a aktywność w perspektywie lat da się przewidzieć tylko statystycznie. Dla tego samego CubeSata z 400 km przy gęstości trzy razy mniejszej i trzy razy większej: 620 i 62 doby. Stacja kosmiczna (współczynnik balistyczny rzędu 150 kg/m^2) traci w modelu ok. 100 m wysokości na dobę i jest regularnie podnoszona silnikami.

SYMULACJA 2 Obniżanie orbity kołowej przez opór (model wykładniczy atmosfery, średnia aktywność Słońca; linie przerywane: gęstość $\times 0,3$ i $\times 3$). Czas życia liczony do 150 km, gdzie satelita spala się w ciągu kilku obiegów.



— wysokość orbity - - - przy niskiej i wysokiej aktywności Słońca

gęstość na starcie $3,73 \times 10^{-12} \text{ kg/m}^3$

spadek wysokości na starcie 278,8 m/dobę

czas do 150 km (wejście w atmosferę) 186 dób

przy niskiej / wysokiej aktywności 620 dób / 62 dób

Orbita obniża się coraz szybciej, bo gęstość rośnie wykładniczo w dół: większość czasu życia satelita spędza blisko wysokości początkowej, a ostatnie 100 km trwa kilka procent tego czasu. Niepewność gęstości (aktywność Słońca) zmienia czas życia kilkukrotnie.

Stan na rysunku: $h_0 = 400 \text{ km}$, $B = 60 \text{ kg/m}^2$, gęstość $\times 1,0$; czas do 150 km: 186 dób (model wykładniczy atmosfery, orbita kołowa).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Policz współczynnik balistyczny CubeSata 3U: 4 kg, przekrój $0,03 \text{ m}^2$, $C_D = 2,2$. Jak zmieni się czas życia, jeśli satelita rozłoży panele słoneczne i jego przekrój wzrośnie trzykrotnie?

2 Policz tempo obniżania orbity na 400 km dla $B = 150 \text{ kg/m}^2$, $\rho = 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$.

- 3 **Paradoks oporu.** Opór działa przeciw ruchowi, a satelita na obniżającej się orbicie leci coraz szybciej. Jak to możliwe?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

5 Hierarchia zaburzeń

Które zaburzenia uwzględnić, zależy od wysokości. Rzędy wielkości przyspieszeń (m/s^2):

zaburzenie	700 km	GEO (35 786 km)
grawitacja główna μ/r^2	7,96	0,224
splaszczanie J_2 (na równiku)	$1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-6}$
Księżyc (różnica przyciągania, pływowa)	$1 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$
Słońce (pływowa)	$6 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$
ciśnienie promieniowania ($A/m = 0,02 \text{ m}^2/\text{kg}$)	$9 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-8}$
opór ($B = 60 \text{ kg/m}^2$, średnia aktywność)	$2 \cdot 10^{-8}$	0

Na niskich orbitach dominuje J_2 , a opór, choć mały, jako jedyny zabiera energię i decyduje o czasie życia. Na orbicie geostacjonarnej Księżyc i Słońce są tak samo ważne jak J_2 : ciągną orbitę ku płaszczyźnie swoich orbit i nachylenie satelity GEO rośnie o ok. $0,75\text{--}0,95^\circ$ na rok. Korekta tego dryfu kosztuje ok. 45 m/s rocznie i jest głównym wydatkiem paliwa satelitów GEO.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Przyspieszenie pływowe od Księżyca to $2GM_Kr/d^3$. Policz je dla GEO ($GM_K = 4903 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $d = 384\,400 \text{ km}$) i porównaj z tabelą.
- 2 Satelita GEO ma skorygować nachylenie o $0,85^\circ$ jednym manewrem w węźle. Ile kosztuje to Δv (wzór na zmianę płaszczyzny: $\Delta v = 2v \sin(\Delta i/2)$, lekcja 5)?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

☰ METODA: CZY ZABURZENIE MA ZNACZENIE?

1. Rząd wielkości przyspieszenia względem μ/r^2 (tabela w części 5).
2. Czy się sumuje? Zaburzenia wiekowe (stałe w znaku po uśrednieniu) rosną z czasem; okresowe się znoszą.
3. Skutek po czasie misji: np. $\dot{\Omega} \cdot t$, Δa z da/dt ; porównać z wymaganiami.
4. Sprawdzenie całkowaniem numerycznym z pełnym modelem sił, z elementami średnimi zamiast oskulacyjnych.

Przykład 6.1

Nachylenie heliosynchroniczne na 700 km

Wyznacz nachylenie orbity kołowej heliosynchronicznej na 700 km i sprawdź symulacją.

- 1 $a = 7078 \text{ km}$, $n = \sqrt{\mu/a^3} = 1,0602 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$, $(R/a)^2 = 0,8120$.
- 2 Wymagane $\dot{\Omega} = 0,9856^\circ/\text{dobę} = 1,991 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$.
- 3 $\cos i = -\dot{\Omega}/(\frac{3}{2}nJ_2(R/a)^2) = -1,991 \cdot 10^{-7}/1,398 \cdot 10^{-6} = -0,1424$, $i = 98,2^\circ$.

Wynik: $i = 98,19^\circ$.

Sprawdzenie: całkowanie numeryczne z J_2 przez 10 dób: obrót węzła $9,91^\circ$ wobec $9,86^\circ$ ze wzoru; różnica 0,5% wynika z użycia elementów oskulacyjnych jako średnich ✓.

Przykład 6.2

Ile żyje CubeSat?

CubeSat 3U ($B \approx 60 \text{ kg/m}^2$) wypuszczony ze stacji kosmicznej na 400 km. Oszacuj czas życia.

- 1 Na 400 km $\rho = 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$, $da/dt = -\rho\sqrt{\mu a}/B = -3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \approx -0,27 \text{ km/dobę}$.
- 2 Gdyby tempo było stałe: 250 km do 150 km w ok. 900 dób. Ale gęstość rośnie z każdym kilometrem w dół (wysokość skali ok. 55 km), więc rzeczywisty czas jest dużo krótszy.
- 3 Całkowanie numeryczne z modelem wykładniczym: 186 dób.

Wynik: ok. pół roku przy średniej aktywności Słońca; przy wysokiej ok. 2 miesiące, przy niskiej ok. 1,7 roku.

Sprawdzenie: rachunek przybliżony z jedną wysokością skali: $t \approx HB/(\rho_0\sqrt{\mu a}) = 55\,000/3,2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \approx 200 \text{ dób} \checkmark$ (zgodność rzędu wielkości; to wynik całkowania $e^{(h-h_0)/H}$ do nieskończoności).

Przykład 6.3

Perygeum Mołni stoi w miejscu

Sprawdź, że przy $i = 63,4^\circ$ perygeum orbity Mołnia praktycznie się nie obraca, i policz obrót węzła.

- 1 $5 \cos^2 63,4^\circ - 1 = 5 \cdot 0,2005 - 1 = 0,0024$: prawie zero.
- 2 $\dot{\omega} = 0,0004^\circ/\text{dobę}$, ok. $0,15^\circ$ na rok.
- 3 $\dot{\Omega} = -0,148^\circ/\text{dobę}$, ok. -54° na rok: płaszczyzna obraca się, ale to nie przeszkadza, bo liczy się położenie apogeum nad półkulą północną, a nie nad konkretną długością.

Wynik: perygeum stoi, węzeł się obraca.

Sprawdzenie: przy 55° : $\dot{\omega} = 0,107^\circ/\text{dobę}$ (zadanie 2.3) $\checkmark$.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Spłaszczenie Ziemi przechyla orbitę ku równikowi.”

Nachylenie średnio się nie zmienia. Moment siły od nadmiaru masy na równiku wywołuje precesję płaszczyzny orbity, jak siła ciężkości wywołuje precesję bąka zamiast jego przewrócenia.

× „Orbita heliosynchroniczna krąży w stałym położeniu względem Słońca.”

Satelita okrąża Ziemię kilkanaście razy na dobę; stałe względem Słońca jest tylko ustawienie płaszczyzny orbity.

× „Satelita na 400 km leci w próżni.”

Gęstość jest mała, ale prędkość ogromna: stacja kosmiczna traci ok. 100 m wysokości na dobę i bez silników spadałaby w ciągu roku-dwóch.

× „Czas życia orbity da się policzyć dokładnie.”

Gęstość termosfery zmienia się kilkukrotnie z aktywnością Słońca; prognozy czasu życia na lata mają niepewność rzędu dwóch-trzech razy.

× „Księżyc ciągnie satelitę, więc trzeba liczyć całą jego siłę.”

Księżyc przyspiesza też Ziemię; orbitę względem Ziemi zmienia tylko różnica przyciągań (składnik pływowy), wielokrotnie mniejsza.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Dlaczego znak minus?** Wyjaśnij jakościowo, dlaczego dla orbity prostej węzeł cofa się (na zachód), a nie przesuwa się naprzód.

2 **Zamrożona orbita.** Satelity obserwacyjne często mają „zamrożony” mimośród (np. $e \approx 0,001$, $\omega = 90^\circ$). Który człon potencjału to umożliwia i po co to robić?

3 **Elementy oskulacyjne.** Satelita na orbicie kołowej 700 km ma w każdej chwili trochę inne elementy policzone z $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Dlaczego, i jakiej wielkości są te wahania wielkiej półosi?

4 **Śmieci kosmiczne.** Odlamki po zderzeniu na 800 km mają współczynniki balistyczne od 1 do 100 kg/m². Dlaczego odlamki z niskich orbit „czyszczą się” same, a z 800 km stanowią problem na dziesięciolecia?

5 **Ważenie Ziemi orbitą.** Jak z obserwacji obrotu węzła wielu satelitów o różnych nachyleniach wyznaczyć J_2 , J_4 itd.?

▢▢ podstawowe ▢▢ średnie ▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co opisuje J_2 ?

Splaszczanie Ziemi: nadmiar masy na równiku; $J_2 = 1,08 \cdot 10^{-3}$.

2 Które elementy zmienia J_2 wiekowo?

Ω , ω (i anomalie średnią); a , e , i średnio się nie zmieniają.

3 Co to jest nachylenie krytyczne?

63,4° (lub 116,6°): perygeum się nie obraca.

4 Warunek orbity heliosynchronicznej?

$\dot{\Omega} = +0,9856^\circ/\text{dobę}$; daje nachylenie ok. 97–99° dla niskich orbit.

5 Od czego zależy tempo obniżania orbity przez opór?

$da/dt = -\rho\sqrt{\mu a}/B$: od gęstości (wysokość, aktywność Słońca) i współczynnika balistycznego.

6 Co jest głównym zaburzeniem na GEO?

Księżyc i Słońce (dryf nachylenia ok. $0,8^\circ/\text{rok}$), porównywalnie z J_2 .

SPŁASZCZENIE

$$U = -\frac{\mu}{r} [1 - J_2 (R/r)^2 (3 \sin^2 \varphi - 1)/2]$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 (R/p)^2 \cos i$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 (R/p)^2 (5 \cos^2 i - 1)$$

krytyczne $i = 63,43^\circ$; heliosynchroniczna

$$\dot{\Omega} = 0,9856^\circ/\text{d}$$

OPÓR I INNE

$$B = m/(C_D A), \quad da/dt = -\rho \sqrt{\mu a}/B$$

$$\rho \approx \rho_0 e^{-(h-h_0)/H}, \quad H \approx 40\text{--}70 \text{ km (200--600 km)}$$

pływowe od ciała M w odległości d :

$$2GMr/d^3$$

GEO: dryf i ok. $0,75\text{--}0,95^\circ/\text{rok}$, korekta ok. 45 m/s/rok

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. 5 (perturbacje, J_2 , opór); U. Walter, *Astronautics*, rozdz. 12.
- **Dla chętnych:** D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*: równania Lagrange'a i Gaussa dla elementów, modele atmosfery i tabela modelu wykładniczego użyta w tej lekcji.

Na orbitę trzeba się jednak najpierw dostać. Kolejna lekcja zaczyna drugą część kursu: równanie raketowe, które mówi, ile paliwa kosztuje każdy kilometr na sekundę, stopniowanie, bez którego żadna raketa nie doleciałaby na orbitę, i zakręt grawitacyjny, którym raketa przechodzi z lotu pionowego do poziomego.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Równik: $-1/2$, biegun: $+1$. Na równiku $U = -\frac{\mu}{r}[1 + \frac{1}{2}J_2(R/r)^2]$: potencjał głębszy, przyciąganie silniejsze (nadmiar masy). Nad biegunem $U = -\frac{\mu}{r}[1 - J_2(R/r)^2]$: słabsze. Kąt, przy którym czynnik znika: $\sin^2 \varphi = 1/3$, $\varphi = 35,3^\circ$.
2. W płaszczyźnie równika ($z = 0$, $f = 0$): $|\mathbf{a}_{J_2}| = \frac{3}{2}J_2\mu R^2/r^4 = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$, a $\mu/r^2 = 7,96 \text{ m/s}^2$. Stosunek $\frac{3}{2}J_2(R/r)^2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$.
3. Siła od J_2 jest zachowawcza i nie zależy od czasu, więc energia całkowita (z potencjałem U) jest stała, a średnia po obiegu energia keplerowska też (stąd stałe średnie a). Potencjał nie jest jednak kulisto symetryczny, więc moment pędu nie jest zachowany: jest tylko jego składowa h_z (symetria obrotowa wokół osi z). Wektor $\mathbf{h}$ obraca się więc wokół osi z przy stałym h_z , czyli przy stałym nachyleniu: to precesja węzła.

Zadania · część 2

1. $(R/a)^2 = (6378/6798)^2 = 0,8803$; $\dot{\Omega} = -1,5 \cdot 1,126 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0826 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8803 \cdot 0,6206 = -9,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s} = -4,95^\circ/\text{dobę}$.
2. $\dot{\Omega} = -0,039^\circ/\text{dobę}$, ok. -14° na rok. Wszystkie płaszczyzny obracają się w tym samym tempie, więc ich wzajemne ułożenie (co 60°) się nie zmienia. Satelita o innym nachyleniu albo wysokości odpływałby od swojej płaszczyzny o ułamek stopnia na rok na każdy stopień nachylenia (albo każde 100 km wysokości) różnicy i z latami psuł geometrię konstelacji.
3. $\dot{\omega} = 0,107^\circ/\text{dobę}$, ok. 39° na rok. Po kilku latach apogeum przesunęłoby się z nad półkuli północnej i orbita straciłaby sens. Przy $63,4^\circ$ $\dot{\omega} \approx 0$.

Zadania · część 3

1. $98,6^\circ$ (z symulacji albo wzoru: $n = 1,0381 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$, $(R/a)^2 = 0,7895$, $\cos i = -0,1496$). Ślad sięga $180^\circ - 98,6^\circ = 81,4^\circ$: bieguny zostają poza zasięgiem, chyba że przyrząd patrzy w bok.
2. Węzły leżą naprzeciw siebie (różnica długości 180° w płaszczyźnie orbity), więc różnica czasu lokalnego to 12 h: 22:30. Satelita leci na południe po stronie dziennej i na północ po stronie nocnej. Dlatego orbitę opisuje się jedną liczbą, np. „węzeł zstępujący 10:30”.
3. $|\dot{\Omega}|$ maleje z wysokością jak $a^{-7/2}$, a największe $|\dot{\Omega}|$ daje $\cos i = -1$ (orbita równikowa wsteczna). Warunek $\frac{3}{2}nJ_2(R/a)^2 = 0,9856^\circ/\text{dobę}$ ma rozwiązanie $a = 12\,353 \text{ km}$, czyli wysokość ok. 5970 km. Wyżej spłaszczenie jest za słabe. W praktyce orbity heliosynchroniczne są niższe niż ok. 1500 km.

Zadania · część 4

1. $B = 4/(2,2 \cdot 0,03) = 61 \text{ kg/m}^2$. Czas życia jest proporcjonalny do B ($da/dt \propto 1/B$), więc trzykrotnie większy przekrój skraca go trzykrotnie: np. z ok. 186 do ok. 62 dób z 400 km.
2. $\sqrt{\mu a} = \sqrt{3,986 \cdot 10^{14} \cdot 6,778 \cdot 10^6} = 5,20 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$. $da/dt = -3,7 \cdot 10^{-12} \cdot 5,2 \cdot 10^{10}/150 = -1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$, czyli ok. 110 m/dobę.
3. Na orbicie kołowej $v = \sqrt{\mu/a}$, więc mniejsze a to większe v . Energia całkowita $\varepsilon = -\mu/(2a)$ maleje (opór zabiera energię), ale energia potencjalna $-\mu/a$ maleje dwa razy szybciej, a kinetyczna $\mu/(2a)$

rośnie dokładnie o tyle, ile opór zabrał. Opór hamuje, grawitacja na lekko opadającej spirali przyspiesza bardziej.

Zadania · część 5

1. $2 \cdot 4903 \cdot 42\,164/384\,400^3 = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ km/s}^2 = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2 \checkmark$. To różnica przyciągania satelity i Ziemi, bo Księżyc przyspiesza oba ciała; tylko różnica zmienia orbitę względem Ziemi.
2. $\Delta v = 2 \cdot 3075 \cdot \sin(0,425^\circ) = 45,6 \text{ m/s}$. Przez 15 lat to ok. 700 m/s, więcej niż wszystkie inne korekty razem; dlatego satelity pod koniec życia często przestają korygować nachylenie i dryfują.

Zadania do przemyślenia

1. Nadmiar masy na równiku ciągnie satelitę ku płaszczyźnie równika: gdy satelita jest na północ od równika, dostaje siłę na południe, i odwrotnie. Satelita lecący na północ po minięciu węzła wstępującego jest ściągany w dół, więc wraca do równika „wcześniej” niż na orbicie keplerowskiej.
2. Wcześniejsze przecięcie równika przy ruchu na wschód oznacza węzeł przesunięty na zachód. Moment siły $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ jest prostopadły do $\mathbf{h}$ i do osi z , więc $\mathbf{h}$ zakreśla stożek wokół osi z w kierunku przeciwnym do obrotu satelity.
2. 1. Sam J_2 obraca perygeum, więc mały mimośród krąży po okręgu w płaszczyźnie $(e \cos \omega, e \sin \omega)$. Człon J_3 („gruszka”) dodaje stałe przesunięcie tego okręgu; przy dobranym e i $\omega = 90^\circ$ środek okręgu jest punktem stałym: e i ω się nie zmieniają.
2. Wysokość satelity nad danym punktem Ziemi powtarza się wtedy w każdym przelocie, co upraszcza obrazowanie, altimetrię i porównywanie zdjęć.
3. 1. Elementy oskulacyjne opisują orbitę keplerowską, po której leciałby satelita, gdyby zaburzenie w tej chwili znikło. Siła od J_2 zależy od szerokości, więc zmienia się w czasie obiegu i chwilowa „najlepsza” elipsa się zmienia.
2. Wahania są rzędu $J_2 R^2/a$: ok. $10^{-3} \cdot 6378^2/7078 \approx 6 \text{ km}$, z okresem pół obiegu. Dlatego porównanie „wzór kontra całkowanie” wymaga elementów średnich, a nie oskulacyjnych (część 2).
4. 1. Gęstość na 800 km jest ok. 300 razy mniejsza niż na 400 km (model: $1,2 \cdot 10^{-14}$ wobec $3,7 \cdot 10^{-12} \text{ kg/m}^3$), a czas życia jest odwrotnie proporcjonalny do gęstości: dla B od 1 do 100 kg/m^2 z 400 km to dni do miesięcy, z 800 km lata do stuleci.
2. Na niskich orbitach opór usuwa odłamki w ciągu lat, na 800 km praktycznie nie. Dlatego zasady ograniczania śmieci wymagają zejścia satelity z orbity w ciągu kilkadziesiąt lat po zakończeniu misji (napęd, żagiel hamujący) albo przeniesienia go na orbitę „cmentarną”.
5. 1. Każda harmoniczna parzysta daje wkład do $\dot{\Omega}$ o innej zależności od nachylenia i od a (np. $J_2 \propto \cos i$, $J_4 \propto \cos i (\dots \sin^2 i \dots)$). Zmierzone $\dot{\Omega}$ dla wielu orbit to układ równań liniowych na $J_2, J_4, \dots$
2. Rozwiązuje się go metodą najmniejszych kwadratów (matematyka, lekcja 5.2 Statystyka pomiarów i dopasowania). Harmoniczne nieparzyste (J_3) wpływają na mimośród i perygeum (prolog: Vanguard 1).

Astronautyka · Lekcja 3: Perturbacje · Źródła: C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. 5); U. Walter, *Astronautics* (Springer, rozdz. 12); D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications* (model wykładniczy atmosfery). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a3.py).