

Elementy orbitalne, równanie Keplera i ślad naziemny

Lekcja 1 dała kształt orbity w jej własnej płaszczyźnie. Tu ustawiamy tę płaszczyznę w przestrzeni sześcioma elementami orbitalnymi, uczymy się przechodzić między elementami a wektorami położenia i prędkości, rozwiązujemy równanie Keplera (gdzie jest satelita po czasie t ?) i rysujemy jego ślad na obracającej się Ziemi. Na koniec porównujemy dwa sposoby numerycznej propagacji orbity i widzimy, że metoda „zachowująca energię” nie musi być dokładniejsza.

CZAS

ok. 2,5 h teorii +
ok. 2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz. 3–
4; C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*; E.
Hairer, C. Lubich,
G. Wanner,
*Geometric
Numerical
Integration*, rozdz.
I i IX

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Gauss odnajduje Ceres
- 1 Sześć elementów orbitalnych
- 2 Od wektorów do elementów i z powrotem
- 3 Czas na orbicie: równanie Keplera
- 4 Ślad naziemny
- 5 Propagacja numeryczna: RK4 kontra metoda symplektyczna
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Gauss odnajduje Ceres

1 stycznia 1801 roku Giuseppe Piazzi w Palermo zauważył nową „gwiazdę”, która przesuwiała się między gwiazdami. Obserwował ją przez kilka tygodni, aż zginęła w blasku Słońca. Miał pomiary obejmujące niewielki łuk orbity i nikt nie umiał z nich przewidzieć, gdzie szukać obiektu za kilka miesięcy. Dwudziestoczteroletni Carl Friedrich Gauss wymyślił metodę wyznaczania orbity z trzech obserwacji, policzył elementy orbity i przewidział położenie. W ostatnich dniach roku Franz von Zach odnalazł Ceres prawie dokładnie tam, gdzie wskazał Gauss.

Gauss musiał rozwiązać dokładnie te problemy, którymi zajmuje się ta lekcja: opisać orbitę w przestrzeni kilkoma liczbami i z nich policzyć położenie w dowolnej chwili. Dziś robi to każdy odbiornik GPS dla każdego satelity, kilka razy na sekundę.

Pytanie na start. *Stacja kosmiczna ma orbitę nachyloną o $51,6^\circ$ do równika. Warszawa leży na szerokości $52,2^\circ$. Czy stacja kiedykolwiek przeleci dokładnie nad Warszawą? Odpowiedź w części 4.*

Sześć elementów orbitalnych

Orbitę opisujemy w układzie inercjalnym związanym z Ziemią (ECI): początek w środku Ziemi, oś z wzdłuż osi obrotu na północ, oś x w płaszczyźnie równika w kierunku punktu Barana (gdzie Słońce przecina równik niebieski w równonocy wiosennej), oś y dopełnia układ prawoskrętny. Układ się nie obraca razem z Ziemią. Orbitę opisuje sześć liczb, klasycznych elementów orbitalnych:

KLASYCZNE ELEMENTY ORBITALNE

Kształt i rozmiar: wielka półoś a i mimośród e (lekcja 1 Zagadnienie dwóch ciał i równanie orbity).

Płaszczyzna orbity: nachylenie i (kąt między $\mathbf{h}$ a osią z , od 0° do 180°) i rektascensja węzła wstępującego Ω (kąt od osi x do punktu, w którym satelita przecina równik, lecąc na północ).

Orientacja elipsy w płaszczyźnie: argument perygeum ω (kąt od węzła wstępującego do perygeum, w kierunku ruchu).

Położenie na orbicie: anomalia prawdziwa ν albo anomalia średnia M w danej chwili (część 3).

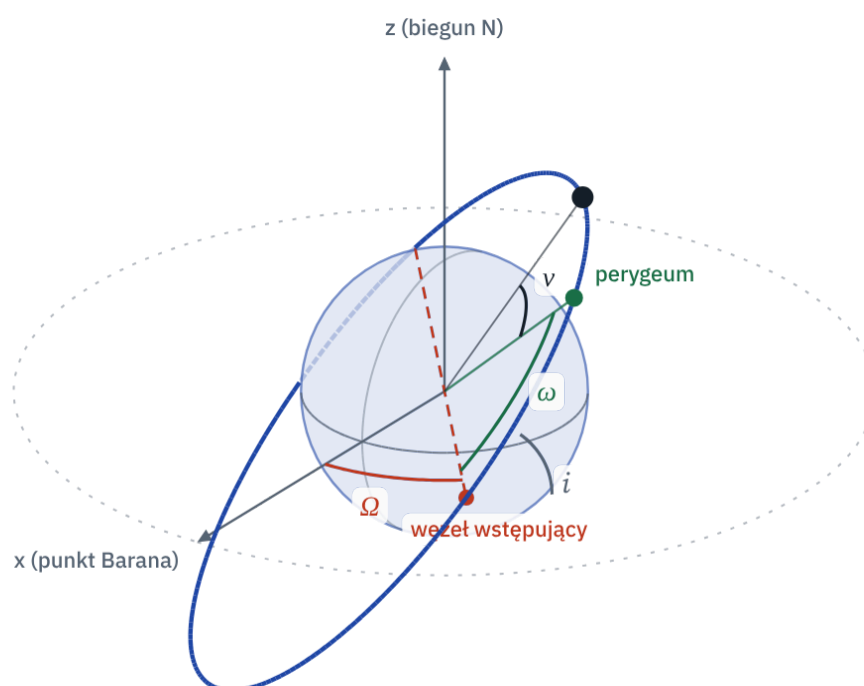
Przejście z układu peryfokalnego (oś p do perygeum, q w płaszczyźnie orbity, w wzdłuż $\mathbf{h}$) do ECI: $Q = R_3(\Omega) R_1(i) R_3(\omega)$.

Macierz Q to złożenie trzech obrotów, jak kąty Eulera w lekcji o orientacji samolotu (dynamika lotu, lekcja 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony) i obroty z

algebry liniowej (matematyka, lekcja 2.2 Przekształcenia liniowe: obroty, zmiana bazy, transformacja Lorentza): najpierw obrót o ω wokół normalnej do orbity, potem o i wokół linii węzłów, na koniec o Ω wokół osi z . Ma też te same osobliwości. Dla orbity równikowej ($i = 0$) linia węzłów nie istnieje i Ω nie jest określone; dla kołowej ($e = 0$) nie ma perygeum i nie ma ω . W takich przypadkach używa się kombinacji, które pozostają określone: argumentu szerokości $u = \omega + \nu$ (orbita kołowa) albo długości perygeum $\varpi = \Omega + \omega$ (orbita równikowa).

SYMULACJA 1

Sześć elementów orbitalnych w przestrzeni. Ziemia w środku, przerywany okrąg to płaszczyzna równika. Zmieniaj elementy po kolei i obserwuj, co każdy z nich robi. Ustaw $i = 0$ albo $e = 0$, żeby zobaczyć, który element traci sens.



— orbita — linia węzłów — perygeum i kierunek ω — satelita (v)

a 14032 km

$r = [x; y; z]$ [-6205; 3153; 7908] km

$|r|, v$ 10534 km, 6,875 km/s

szerokość pod satelitą 48,6°

ruch prosty (z obrotem Ziemi)

Ω obraca płaszczyznę orbity wokół osi Ziemi, i ją nachyla wokół linii węzłów, ω obraca elipsę w jej płaszczyźnie, a ν mówi, gdzie na niej jest satelita.

Stan na rysunku: $a = 2,2 R = 14032$ km, $e = 0,30$, $i = 51^\circ$, $\Omega = 40^\circ$, $\omega = 60^\circ$, $\nu = 45^\circ$; $r = [-6205; 3153; 7908]$ km.

- 1 Orbita ma nachylenie 98° . W którą stronę względem obrotu Ziemi leci satelita i do jakiej szerokości geograficznej sięga jego ślad?
- 2 Które elementy orbitalne nie są określone dla idealnej orbity geostacjonarnej? Czym je zastąpić?
- 3 Satelita ma $\mathbf{r} = [-6045; -3490; 2500]$ km i $\mathbf{v} = [-3,457; 6,618; 2,533]$ km/s. Wektor $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ma składowe $[-25\,385; 6670; -52\,071]$ km²/s (sprawdź jedną z nich). Policz nachylenie i rektascensję węzła wstępującego.

□ □ □ podstawowe ▣ ▣ ▣ średnie ▤ ▤ ▤ feynmanowskie

2 Od wektorów do elementów i z powrotem

Algorytm z lekcji 1 rozszerzamy o trzy kąty. Oprócz $\mathbf{h}$ i $\mathbf{e}$ potrzebny jest wektor węzłów $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}$, skierowany do węzła wstępującego.

ALGORYTM $(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \rightarrow (A, E, I, \Omega, \omega, N)$

$$1. \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}, \mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{h} / \mu - \mathbf{r} / r, a = -\mu / (2\varepsilon).$$

$$2. \cos i = h_z / h.$$

$$3. \cos \Omega = n_x / n; \text{ jeśli } n_y < 0, \text{ to } \Omega = 360^\circ - \Omega.$$

$$4. \cos \omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} / (ne); \text{ jeśli } e_z < 0, \text{ to } \omega = 360^\circ - \omega.$$

$$5. \cos \nu = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} / (er); \text{ jeśli } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} < 0, \text{ to } \nu = 360^\circ - \nu.$$

Z powrotem: $\mathbf{r}_{pf} = \frac{p}{1 + e \cos \nu} [\cos \nu; \sin \nu; 0]$, $\mathbf{v}_{pf} = \sqrt{\mu/p} [-\sin \nu; e + \cos \nu; 0]$, $\mathbf{r} = Q\mathbf{r}_{pf}$, $\mathbf{v} = Q\mathbf{v}_{pf}$.

Każdy z trzech kroków z warunkiem rozstrzyga ćwiartkę, bo arccos daje kąty tylko od 0 do 180° . Pominięcie tych warunków to najczęstszy błąd w programach studentów. Dobrym testem jest obieg: elementy $\rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow$ elementy musi zwrócić te same liczby dla orbit we wszystkich ćwiartkach.

- 1 Dla satelity na orbicie kołowej $e = 0$, więc $e = 0$. Który krok algorytmu się psuje i co zrobić?
- 2 Dla tego samego satelity co w zadaniu 1.3 (dane jak w przykładzie u Curtisa) policz ε i a .
- 3 Dla tych samych danych $e = [-0,0916; -0,1422; 0,0264]$ (sprawdź, jeśli chcesz). Policz e , ω i ν , pilnując ćwiartek.

▢ podstawowe ▢ średnie ▢ feynmanowskie

3 Czas na orbicie: równanie Keplera

Satelita porusza się po elipsie nierównomiernie: szybko przy perygeum, wolno przy apogeum. Jak znaleźć ν po czasie t od przelotu przez perygeum? Kepler rozwiązał to geometrycznie. Wokół elipsy opisujemy okrąg o promieniu a i rzutujemy satelitę pionowo na ten okrąg; kąt widziany ze środka elipsy to **anomaliamimośrodkowa** E . Drugie prawo Keplera (pole $\propto$ czas) przekłada się na:

🔑 RÓWNANIE KEPLERA

$$M = E - e \sin E, \quad M = n(t - t_p), \quad n = \sqrt{\mu/a^3}.$$

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad r = a(1 - e \cos E).$$

M (anomaliasrednia) rośnie jednostajnie z czasem; n to ruch średni. Dla hiperboli:
 $M = e \sinh H - H$.

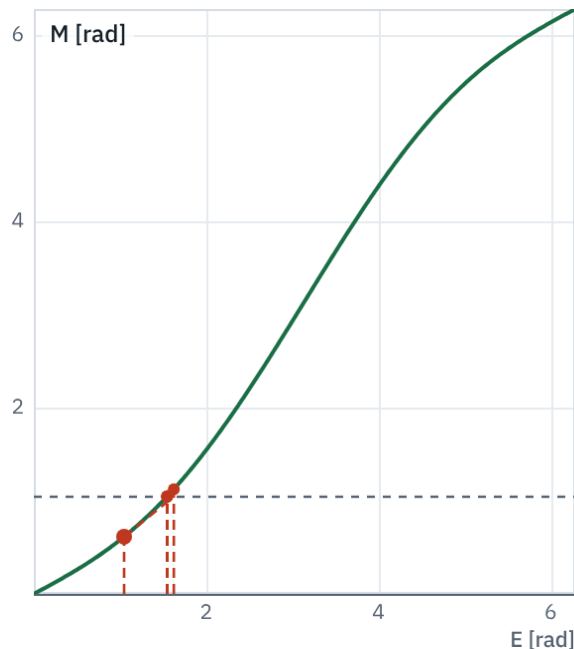
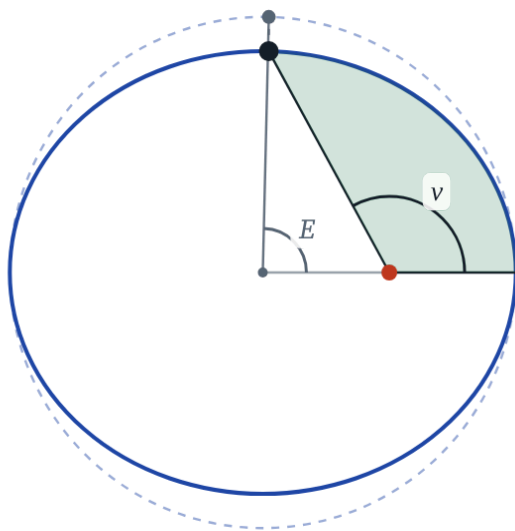
Z czasu na położenie trzeba rozwiązać równanie Keplera dla E : równanie przestępne, bez rozwiązania w postaci jawnej. Metoda Newtona (matematyka, lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++) zbiega tu kwadratowo:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k}.$$

Dla $e = 0,3$ i $M = 1$ rad: $E_0 = 1$, $E_1 = 1,3013$, $E_2 = 1,28812$, $E_3 = 1,2880913$, a E_4 zgadza się z E_3 do 10 cyfr. Start $E_0 = M$ jest dobry dla małych mimośrodków; dla dużych bezpieczniejszy jest $E_0 = \pi$, bo przy perygeum krzywa $M(E)$ jest prawie płaska i pierwszy krok Newtona potrafi skoczyć daleko.

SYMULACJA 2

Równanie Keplera. Lewy panel: elipsa z okręgiem pomocniczym, anomalie E i ν , wycinek o polu proporcjonalnym do czasu od perygeum. Prawy panel: krzywa $M(E)$ i kolejne kroki Newtona. Ustaw duży mimośród i małe M i porównaj dwa sposoby startu.



— elipsa i okrąg pomocniczy — $M(E) = E - e \sin E$ — kroki Newtona

E (anomalia mimośrodowa) **88,640°**

ν (anomalia prawdziwa) **118,815°**

$r/a = 1 - e \cos E$ **0,9881**

iteracje Newtona do 10^{-12} **5**

kolejne E **1,047198, 1,624548, 1,548518, 1,547057, 1,547057**

Zielony wycinek ma pole proporcjonalne do M , czyli do czasu od perygeum (drugie prawo Keplera).
Newton zbiega kwadratowo: liczba poprawnych cyfr podwaja się w każdym kroku.

Stan na rysunku: $e = 0,50$, $M = 60^\circ$; $E = 88,6398^\circ$, $\nu = 118,8150^\circ$, 5 iteracji (start $E_0 = M$).

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 30 min

1 Dla $e = 0,3$ i $M = 1$ rad rozwiązanie to $E = 1,28809$ rad. Policz ν i r/a .

2 Ile trwa lot po orbicie GTO (perygeum 250 km, $a = 24\,396$ km, $e = 0,728$) od perygeum do $\nu = 90^\circ$? Okres wynosi 10,53 h.

- 3 Orbita Mołnia: $e = 0,74$, okres 11,96 h. Jaką część okresu satelita spędza w „dalszej połowie” orbity, $90^\circ < \nu < 270^\circ$?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Ślad naziemny

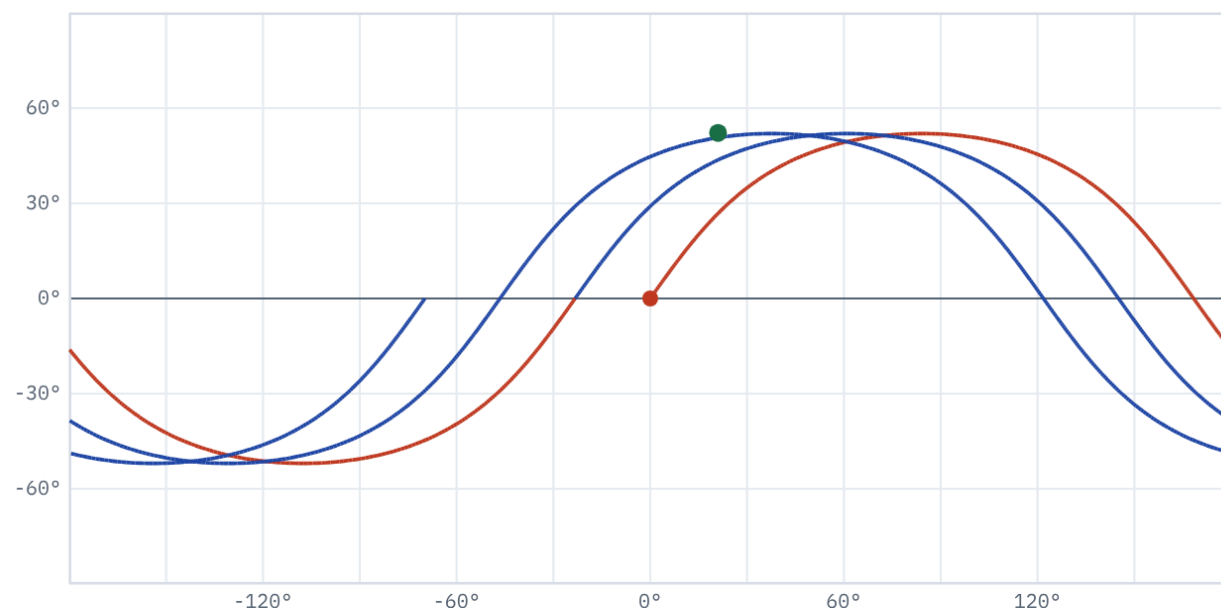
Ślad naziemny to punkt na powierzchni Ziemi bezpośrednio pod satelitą. Dla orbity kołowej, z argumentem szerokości $u = n(t - t_0)$ liczonym od węzła wstępującego (satelita jest w węźle w chwili t_0):

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad \lambda = \Omega + \arctan 2(\cos i \sin u, \cos u) - \omega_\oplus(t - t_0) - \lambda_0,$$

gdzie φ to szerokość, λ długość geograficzna, λ_0 to kąt między osią x układu ECI a południkiem Greenwich w chwili t_0 (czas gwiazdowy Greenwich), a $\omega_\oplus = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s to prędkość obrotu Ziemi (względem gwiazd). Wynikają z tego trzy reguły. Ślad sięga szerokości $\pm i$ (albo $\pm(180^\circ - i)$ dla orbit wstecznych). W czasie jednego obiegu Ziemia obraca się o $\omega_\oplus T$, więc kolejne przejścia przez równik przesuwają się na zachód: dla stacji kosmicznej na wysokości 420 km ($T = 93,0$ min) o $23,3^\circ$. Jeśli w ciągu całkowitej liczby dób gwiazdowych satelita robi całkowitą liczbę obiegów, ślad się powtarza: 15 obiegów na dobę gwiazdową to wysokość 554 km (bez poprawki na spłaszczenie Ziemi z lekcji 3).

Odpowiedź na pytanie z prologu: nie. Ślad stacji sięga szerokości $51,6^\circ$, a Warszawa leży $0,6^\circ$ (ok. 66 km) dalej na północ. W najlepszym przelocie stacja jest jednak widoczna prawie w zenicie, ok. 80° nad horyzontem (dla kulistej Ziemi; różnica szerokości geodezyjnej i geocentrycznej przesuwają te liczby o ok. 20 km, przykład 6.3).

SYMULACJA 3 Ślad naziemny orbity kołowej na mapie w rzucie walcowym (siatka co 30° , zielony punkt: Warszawa). Pierwszy obieg jest czerwony. Wyłącz obrót Ziemi, żeby zobaczyć, skąd bierze się przesunięcie, i ustaw wysokość 35 786 km z małym nachyleniem.



— ślad satelity — pierwszy obieg — Warszawa

okres 92,8 min

przesunięcie śladu na obieg 23,27° na zachód

obiegi na dobę 15,51

największa szerokość 52°

W czasie jednego obiegu Ziemia obraca się o $23,3^\circ$, więc kolejne przejścia przez równik przesuwają się na zachód. Ślad sięga szerokości $\pm 52^\circ$.

Stan na rysunku: $h = 413$ km, $i = 52^\circ$, 3 obiegi; $T = 92,8$ min, przesunięcie $23,27^\circ/\text{obieg}$.

Ślady prawdziwych satelitów liczy się z elementów publikowanych w formacie TLE (ang. *two-line element set*). To nie są elementy keplerowskie, tylko „średnie” elementy modelu SGP4, który uwzględnia spłaszczenie Ziemi i opór. Wstawienie ich do równania Keplera daje błędy rzędu kilometrów do dziesiątek kilometrów; do TLE trzeba używać SGP4 (biblioteki są dostępne dla Pythona i C++).

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Ile obiegi na dobę robi stacja kosmiczna na wysokości 420 km i o ile stopni przesuwają się jej ślady na obieg?

2 Jaka wysokość orbity kołowej daje ślad powtarzający się po 16 obiegach w ciągu doby gwiazdowej? Dlaczego takich orbit nie stosuje się w praktyce?

3 Satelita geosynchroniczny (T równe dobie gwiazdowej) ma nachylenie 10° i $e = 0$. Opisz jego ślad.

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

5 Propagacja numeryczna: RK4 kontra metoda symplektyczna

Gdy na satelitę działają siły inne niż grawitacja punktowa (lekcja 3), równania Keplera nie wystarczą i orbitę trzeba całkować numerycznie. Do tego potrzebny jest wybór metody. Porównajmy RK4 (rząd 4, cztery obliczenia przyspieszenia na krok) z metodą skokową (ang. *leapfrog*, Störmer-Verlet; rząd 2, jedno obliczenie przyspieszenia na krok), która jest **symplektyczna**: zachowuje strukturę równań Hamiltona, a w praktyce trzyma błąd energii ograniczony na zawsze.

Python · jeden krok RK4 i jeden krok metody skokowej

```
import numpy as np
mu = 398600.4418
acc = lambda r: -mu * r / np.linalg.norm(r)**3

def krok_rk4(r, v, dt):
    k1r, k1v = v, acc(r)
    k2r, k2v = v + dt/2*k1v, acc(r + dt/2*k1r)
    k3r, k3v = v + dt/2*k2v, acc(r + dt/2*k2r)
    k4r, k4v = v + dt*k3v, acc(r + dt*k3r)
    return (r + dt/6*(k1r + 2*k2r + 2*k3r + k4r),
            v + dt/6*(k1v + 2*k2v + 2*k3v + k4v))

def krok_skokowy(r, v, dt):
    # Störmer-Verlet, symplektyczny
    v = v + dt/2*acc(r)
    r = r + dt*v
    v = v + dt/2*acc(r)
    return r, v
```

C++ · ten sam krok skokowy (g++ -O2 -std=c++17)

```
#include <array>
#include <cmath>
using V3 = std::array<double, 3>;
const double mu = 398600.4418;

V3 acc(const V3& r) {
    double R = std::sqrt(r[0]*r[0] + r[1]*r[1] + r[2]*r[2]), k = -mu / (R*R*R);
    return {k*r[0], k*r[1], k*r[2]};
}

void krok_skokowy(V3& r, V3& v, double dt) {
    V3 a = acc(r);
    for (int j = 0; j < 3; ++j) { v[j] += dt/2*a[j]; r[j] += dt*v[j]; }
    a = acc(r);
    for (int j = 0; j < 3; ++j) v[j] += dt/2*a[j];
}
```

Test: orbita z $a = 8000$ km i $e = 0,2$, 200 kroków na okres, 1000 okresów (ok. 82 doby). Wyniki:

	RK4	metoda skokowa
największy błąd energii, okresy 1–10	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
największy błąd energii, okresy 991–1000	$1,6 \cdot 10^{-5}$ (rośnie)	$2,6 \cdot 10^{-4}$ (nie rośnie)
błąd położenia na orbicie po 1000 okresach	$6,7^\circ$ (przed)	251° (za)

Metoda symplektyczna rzeczywiście nie pozwala energii dryfować: satelita nie spada i nie ucieka, nawet po bardzo długim czasie (teoria gwarantuje czasy wykładniczo długie względem $1/\Delta t$). Ale faza, czyli położenie satelity na orbicie, rozjeżdża się w niej szybciej niż w RK4, bo jej błąd jest drugiego rzędu. Do śledzenia satelity liczy się faza, więc w praktyce używa się metod wysokiego rzędu z adaptacyjnym krokiem (np. Dormanda–Prince’a) albo rozwiązania Keplera z dodanymi poprawkami od zaburzeń. Metody symplektyczne są w swoim żywiole przy badaniu długoterminowej stabilności, np. Układu Słonecznego przez miliony lat.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 25 min

- 1 Metoda Eulera $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \Delta t \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_k)$ dla orbity kołowej. Pokaż, że prędkość rośnie w każdym kroku, i powiedz, jak będzie wyglądał numeryczny tor.
- 2 Przy równej liczbie obliczeń przyspieszenia metoda skokowa może zrobić cztery razy więcej kroków niż RK4. Czy przy 800 krokach na okres dogoni RK4 z 200 krokami w błędzie fazy (251° wobec $6,7^\circ$ przy 200 krokach)? Oszacuj z rzędów metod.

 podstawowe  średnie  feynmanowskie

☰ METODA: GDZIE JEST SATELITA W CHWILI T ?

1. Elementy a, e, i, Ω, ω i chwila przelotu przez perygeum t_p (albo M_0 w epoce t_0).
2. Anomalia średnia: $M = M_0 + n(t - t_0)$, sprowadzona do $[0, 2\pi)$.
3. Równanie Keplera metodą Newtona: E ; potem ν i $r = a(1 - e \cos E)$.
4. Wektory: $\mathbf{r}_{pf}, \mathbf{v}_{pf}$, a potem $\mathbf{r} = Q\mathbf{r}_{pf}$; dla śladu jeszcze obrót o $-\omega_{\oplus}t$ wokół osi z i przejście na szerokość i długość.
5. Sprawdzenie: obieg elementy $\rightarrow$ wektory $\rightarrow$ elementy; $|\mathbf{r}|$ z vis-viva.

Przykład 6.1

GTO godzinę po perygeum

Satelita na GTO ($r_p = 6628 \text{ km}$, $r_a = 42\,164 \text{ km}$) minął perygeum godzinę temu. Gdzie jest i jak szybko leci?

- 1 $a = 24\,396 \text{ km}$, $e = 0,7283$, $n = \sqrt{\mu/a^3} = 1,657 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$; $M = n \cdot 3600 = 0,5965 \text{ rad}$.
- 2 Newton od $E_0 = M$: po 6 krokach $E = 1,2978 \text{ rad}$.
- 3 $\nu = 2 \arctan \left(\sqrt{1,7283/0,2717} \tan 0,6489 \right) = 124,8^\circ$; $r = a(1 - e \cos E) = 19\,606 \text{ km}$.

Wynik: po godzinie (9,5% okresu) satelita jest 13 228 km nad Ziemią, 125° za perygeum, z prędkością $v = \sqrt{\mu(2/r - 1/a)} = 4,93 \text{ km/s}$.

Sprawdzenie: $r = p/(1 + e \cos \nu) = 11\,455/(1 - 0,4157) = 19\,604 \text{ km} \checkmark$ (zgodnie z zaokrągleniami).

Przykład 6.2

Wektory na elementy

Zbierz wyniki zadań 1.3, 2.2 i 2.3 w pełny zestaw elementów i sprawdź obiegiem.

- 1 $a = 8788 \text{ km}$, $e = 0,1712$, $i = 153,25^\circ$, $\Omega = 255,28^\circ$, $\omega = 20,07^\circ$, $\nu = 28,45^\circ$.
- 2 Z elementów: $p = a(1 - e^2) = 8530 \text{ km}$, $r = p/(1 + e \cos \nu) = 7414 \text{ km}$, a $Q\mathbf{r}_{pf}$ daje z powrotem $[-6045; -3490; 2500] \text{ km}$.

Wynik: orbita wsteczna, lekko eliptyczna, z perygeum 905 km nad Ziemią.

Sprawdzenie: te same liczby podaje Curtis (rozdz. 4) dla tych danych; skrypt a2.py wykonuje obieg elementy $\rightarrow$ wektory $\rightarrow$ elementy z dokładnością do 10^{-4} ✓.

Przykład 6.3

Stacja nad Polską

Stacja kosmiczna: 420 km , $i = 51,64^\circ$. Pod jakim kątem nad horyzontem widać ją z Warszawy ($52,23^\circ \text{ N}$) w najlepszym przelocie?

- 1 Najbliższy punkt śladu jest $0,59^\circ$ na południe, czyli $s = 0,59^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 6378 = 66 \text{ km}$ po powierzchni.
- 2 Kąt środkowy $\theta = 0,59^\circ$; satelita jest na promieniu $r_s = 6798 \text{ km}$. Względem obserwatora: w poziomie $r_s \sin \theta = 70 \text{ km}$, w pionie $r_s \cos \theta - R = 420 \text{ km}$.
- 3 Elewacja $= \arctan(420/70) = 80,5^\circ$.

Wynik: ok. 80° : prawie w zenicie, ale nigdy dokładnie.

Sprawdzenie: rachunek dla kulistej Ziemi; szerokość geograficzna Warszawy jest geodezyjna, a ślad liczony geocentrycznie, co na tej szerokości zmienia odległość o ok. 20 km. Wniosek się nie zmienia ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Satelita krąży nad równikiem, a nachylenie mówi, jak bardzo się od niego oddala.”

Płaszczyzna każdej orbity (bez zaburzeń) przechodzi przez środek Ziemi, więc rzut toru na sferę to koło wielkie: orbita przecina płaszczyznę równika dwa razy na obieg. Nachylenie mówi, jak daleko na północ i południe sięga ślad.

× „Ślad naziemny przesuwają się, bo orbita się obraca.”

Orbita (bez zaburzeń) stoi w przestrzeni; obraca się Ziemia pod nią. Spłaszczenie Ziemi rzeczywiście obraca orbitę, ale dużo wolniej (lekcja 3).

× „Anomalia średnia to średni kąt.”

To miara czasu w radianach: kąt, jaki zakreśliłby satelita poruszający się jednostajnie z tym samym okresem. Zgadza się z ν tylko w perygeum, apogeum i na orbicie kołowej.

× „Metoda symplektyczna jest dokładniejsza.”

Jest wierniejsza jakościowo (energia nie dryfuje), ale jej błąd fazy może być dużo większy niż w metodzie wyższego rzędu.

× „Elementy z TLE wstawiam do równania Keplera.”

To elementy średnie modelu SGP4; bez SGP4 wynik jest błędny o kilometry do dziesiątek kilometrów.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Zbieżność Newtona.** Dlaczego metoda Newtona dla równania Keplera zawsze zbiega przy starcie $E_0 = \pi$, a przy $E_0 = M$ i e bliskim 1 potrafi skakać?

- 2 **Czas do tego samego miejsca.** Satelita na orbicie o okresie 92,97 min przelatuje nad punktem na równiku. Kiedy następny raz przeleci dokładnie nad nim, pomijając spłaszczenie Ziemi?
- 3 **Dlaczego atan2.** W kroku 3 algorytmu zamiast arccos z warunkiem można użyć $\Omega = \text{atan2}(n_y, n_x)$. Czy podobnie da się policzyć ν i ω ? Co jest zaletą atan2 numerycznie?
- 4 **Mołnia a GEO.** Rosja ma większość terytorium na szerokościach powyżej 55° . Wyjaśnij, czemu do łączności używa orbit Mołnia zamiast geostacjonarnej, i co jest ceną.
- 5 **Trzy obserwacje Gaussa.** Obserwacja z Ziemi daje tylko kierunek (dwa kąty), nie odległość. Dlaczego do wyznaczenia orbity wystarczą trzy obserwacje?

▢▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Wymień sześć klasycznych elementów orbitalnych.**
 a, e, i, Ω, ω i ν (albo M , albo czas przelotu przez perygeum).
- 2 **Kiedy Ω nie jest określone? A ω ?**
 Ω dla orbit równikowych ($i = 0$ lub 180°); ω dla kołowych ($e = 0$).
- 3 **Napisz równanie Keplera.**
 $M = E - e \sin E, M = n(t - t_p)$.
- 4 **Do jakiej szerokości sięga ślad orbity o nachyleniu i ?**
 $\pm i$ (dla $i > 90^\circ: \pm(180^\circ - i)$).
- 5 **Dlaczego ślad przesuwa się na zachód?**
Ziemia obraca się na wschód o $\omega_\oplus T$ w czasie jednego obiegu.

6 Co zachowuje metoda symplektyczna, a czego nie?

Trzyma ograniczony błąd energii przez bardzo długi czas; nie gwarantuje małego błędu fazy.

ELEMENTY I WEKTORY

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}, \cos i = h_z/h$$

$$\cos \Omega = n_x/n \quad (n_y < 0 \Rightarrow 360^\circ - \Omega)$$

$$\cos \omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}/(ne) \quad (e_z < 0 \Rightarrow 360^\circ - \omega)$$

$$\cos \nu = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}/(er) \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} < 0 \Rightarrow 360^\circ - \nu)$$

$$\mathbf{r} = Q\mathbf{r}_{pf}, Q = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)$$

CZAS I ŚLAD

$$M = n(t - t_p) = E - e \sin E, n = \sqrt{\mu/a^3}$$

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, r = a(1 - e \cos E)$$

$$\text{Newton: } E_{k+1} = E_k - \frac{E_k - e \sin E_k - M}{1 - e \cos E_k}$$

$\sin \varphi = \sin i \sin u$, przesunięcie śladu $\omega_\oplus T$
na obieg

$$\omega_\oplus = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s, doba gwiazdowa } 86\,164 \text{ s}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 3 (położenie w funkcji czasu, równanie Keplera) i 4 (orbity w przestrzeni, elementy, ślad naziemny).
- **Dla chętnych:** E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration* (Springer), rozdz. I (eksperymenty z problemem Keplera) i IX (wyjaśnienie, dlaczego metody symplektyczne zachowują energię); D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*: algorytmy z wszystkimi przypadkami szczególnymi i SGP4.

Elementy orbitalne są stałe tylko w idealnym świecie dwóch punktów. Ziemia jest spłaszczona, ma atmosferę, a Słońce i Księżyc też ciągną. Kolejna lekcja pokazuje, jak te zaburzenia powoli zmieniają elementy i jak inżynierowie zamieniają je w narzędzie: orbita heliosynchroniczna istnieje tylko dlatego, że Ziemia nie jest kulą.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. Nachylenie powyżej 90° oznacza ruch wsteczny: rzut prędkości na płaszczyznę równika jest skierowany na zachód. Ślad sięga szerokości $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$. Takie nachylenia mają orbity heliosynchroniczne (lekcja 3 Perturbacje: spłaszczenie Ziemi, orbita heliosynchroniczna i opór).
2. Orbita jest kołowa i równikowa: nie istnieje ani perygeum (ω), ani linia węzłów (Ω). Zostają a ($i = 0$, $i = 0$), a położenie podaje się jedną liczbą, długością prawdziwą $\ell = \Omega + \omega + \nu$, mierzoną od osi x . Satelity geostacjonarne opisuje się w praktyce elementami „ekwinoktialnymi”, które nie mają tych osobliwości.
3. $h = 58\,311 \text{ km}^2/\text{s}$; $\cos i = h_z/h = -0,893$, $i = 153,2^\circ$ (orbita wsteczna). Wektor węzłów $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h} = [-h_y; h_x; 0] = [-6670; -25\,385; 0]$; $\Omega = \text{atan2}(-25\,385, -6670) = 255,3^\circ$ (trzecia ćwiartka: sam $\arccos$ dałby $104,7^\circ$).

Zadania · część 2

1. Krok 4 i 5 dzielić przez e . Dla orbity kołowej przyjmuje się $\omega = 0$ i liczy argument szerokości u : $\cos u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/(nr)$, z warunkiem $r_z < 0 \Rightarrow u = 360^\circ - u$. W praktyce przy bardzo małym e (np. 10^{-4}) ω i ν są osobno źle uwarunkowane, ale ich suma u jest dokładna.
2. $r = 7414 \text{ km}$, $v^2 = 11,95 + 43,80 + 6,42 = 62,17 \text{ km}^2/\text{s}^2$. $\varepsilon = 31,08 - 53,76 = -22,68 \text{ km}^2/\text{s}^2$, $a = -\mu/(2\varepsilon) = 8788 \text{ km}$.
3. $e = 0,171$. $\cos \omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}/(ne) = (611 + 3610)/(26\,247 \cdot 0,1712) = 0,939$, $\omega = 20,1^\circ$ ($e_z > 0$, więc bez poprawki). $\cos \nu = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}/(er) = (554 + 496 + 66)/(0,1712 \cdot 7414) = 0,879$, $\nu = 28,4^\circ$ ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 4133 > 0$). Razem z zadaniem 1.3: $a = 8788 \text{ km}$, $e = 0,171$, $i = 153,2^\circ$, $\Omega = 255,3^\circ$, $\omega = 20,1^\circ$, $\nu = 28,4^\circ$.

Zadania · część 3

1. $\tan(\nu/2) = \sqrt{1,3/0,7} \tan(0,64405) = 1,3628 \cdot 0,7509 = 1,0233$, $\nu = 91,3^\circ$. $r/a = 1 - 0,3 \cos 1,28809 = 0,916$. W 16% okresu ($M = 1 \text{ rad}$) satelita przebył ponad ćwierć kąta pełnego: przy perygeum leci szybciej.
2. $\tan(E/2) = \sqrt{0,2717/1,7283} \tan 45^\circ = 0,3965$, $E = 0,7549 \text{ rad}$; $M = E - e \sin E = 0,7549 - 0,7283 \cdot 0,6852 = 0,2559 \text{ rad}$. $t = M/n = 0,2559/(1,657 \cdot 10^{-4}) = 1544 \text{ s} = 25,7 \text{ min}$. Ćwierć kąta pełnego w 4% okresu.
3. Czas od perygeum do $\nu = 90^\circ$: $\tan(E/2) = \sqrt{0,26/1,74} = 0,3866$, $E = 0,7378$, $M = 0,7378 - 0,74 \cdot 0,6727 = 0,2400 \text{ rad}$, czyli $0,2400/2\pi = 3,8\%$ okresu. Bliższa połowa trwa $2 \cdot 3,8\% = 7,6\%$, dalsza $92,4\%$: $11,05 \text{ h}$ z $11,96 \text{ h}$. Dlatego Mołnia „wisi” nad wysokimi szerokościami północnymi.

Zadania · część 4

1. $T = 2\pi\sqrt{6798^3/\mu} = 5578 \text{ s} = 92,97 \text{ min}$, $86\,400/5578 = 15,49$ obiegu na dobę. Przesunięcie: $\omega_\oplus T = 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot 5578 = 0,4068 \text{ rad} = 23,3^\circ$ na zachód.
2. $T = 86\,164/16 = 5385 \text{ s}$, $a = (\mu T^2/4\pi^2)^{1/3} = 6640 \text{ km}$, wysokość 262 km . Na takiej wysokości opór atmosfery skraca życie orbity do dni lub tygodni (lekcja 3), więc satelita musiałby stale pracować silnikiem.

3. Szerokość oscyluje między $\pm 10^\circ$ z okresem doby. Długość też oscyluje, bo rzut ruchu na równik nie jest jednostajny: kąt w płaszczyźnie równika spełnia $\tan \lambda' = \cos i \tan u$, więc $\lambda' - u$ zmienia się z amplitudą ok. $i^2/4 = 0,0076 \text{ rad} = 0,44^\circ$, dwa razy na dobę. Ślad to wąska ósemka z przecięciem na równiku, $\pm 10^\circ$ wysokości i ok. $\pm 0,44^\circ$ szerokości.

Zadania · część 5

1. W pierwszym kroku (start na orbicie kołowej) $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$, więc $|\mathbf{v}_1|^2 = v^2 + \Delta t^2 a^2 > v^2$ i $|\mathbf{r}_1|^2 = r^2 + \Delta t^2 v^2 > r^2$. Ogólniej: ruch po okręgu to dwa sprzężone oscylatory, a metoda Eulera mnoży amplitudę oscylatora w każdym kroku przez $\sqrt{1 + (n\Delta t)^2} > 1$. Energia rośnie systematycznie i satelita odlatuje po spirali na zewnątrz. Zamiana kolejności (najpierw prędkość, potem położenie z nową prędkością, czyli półjawny Euler) daje metodę symplektyczną z ograniczonym błędem energii.
2. Błąd fazy metody skokowej $\propto \Delta t^2$: czterokrotnie mniejszy krok zmniejsza go 16 razy, z 251° do ok. 16° (symulacja: 19°). To wciąż ok. trzy razy więcej niż RK4 z 200 krokami ($6,7^\circ$), przy tym samym koszcie obliczeń. Przy wymaganiu wysokiej dokładności metoda wyższego rzędu wygrywa: podwojenie kroków RK4 zmniejsza błąd 16 razy (przy 400 krokach $0,2^\circ$), metody skokowej tylko 4 razy.

Zadania do przemyślenia

1. $f(E) = E - e \sin E - M$ ma $f' = 1 - e \cos E > 0$ (rosnąca) i $f'' = e \sin E$, które na $(0, \pi)$ ma stały znak. Funkcja rosnąca i wypukła na przedziale z pierwiastkiem: start z tej strony, gdzie f i f'' mają ten sam znak, daje ciąg monotoniczny, bez przeskoków. Dla $M \in (0, \pi)$ to $E_0 = \pi$.
2. Przy $E_0 = M$ blisko zera i $e \rightarrow 1$: $f'(M) = 1 - e \cos M$ jest prawie zerem, więc pierwszy krok $-f/f'$ jest olbrzymi i może wylądować daleko za pierwiastkiem.
2. 1. Po k obiegach ślad przesunął się o $k \cdot 23,31^\circ$. Dokładny powrót nad ten sam punkt (w tym samym węźle) wymaga, żeby $k \cdot 23,31^\circ$ było wielokrotnością 360° . Przy okresie niewspółmiernym z dobą to się nigdy nie zdarza: ślad z czasem gęsto pokrywa cały pas szerokości $\pm i$.
2. Prawie-powtórzenia: $360^\circ/23,31^\circ = 15,45$; najlepsze bliskie całkowitym wielokrotności to $k = 139$ obiegów (ok. 9 dób, błąd $0,43^\circ$, czyli ok. 50 km na równiku) i $k = 278$ (18 dób, $0,87^\circ$). Satelity obserwacyjne dobiera się tak, żeby powtarzalność była dokładna (np. 15 obiegów w dobie gwiazdowej), z poprawką na spłaszczenie Ziemi z lekcji 3.
3. 1. Tak: $\nu = \text{atan2}((\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{h}}, \mathbf{e} \cdot \mathbf{r})$ i analogicznie ω z $\mathbf{n}$ i $\mathbf{e}$. Sinus ze znakiem bierze się z iloczynu wektorowego rzutowanego na normalną.
2. $\arccos$ ma nieskończoną pochodną przy ± 1 : dla kątów bliskich 0° i 180° mały błąd zaokrąglenia argumentu daje duży błąd kąta (a argument nieco powyżej 1 daje NaN). atan2 jest dobrze uwarunkowany dla wszystkich kątów.
4. 1. Satelita GEO jest nad równikiem: z szerokości 70° widać go tylko kilkanaście stopni nad horyzontem albo wcale. Można z apogeum nad półkulą północną spędza 92% okresu w dalszej połowie orbity, wysoko na niebie nad Rosją.
2. Cena: satelita się porusza, więc anteny muszą go śledzić, a ciągłość łączności wymaga 3–4 satelitów na przesuniętych orbitach. Orbita przecina też pasy radiacyjne, a perygeum jest niskie. Argument perygeum 270° wybiera się nie bez powodu: przy $i = 63,4^\circ$ spłaszczenie Ziemi go nie obraca (lekcja 3).
5. 1. Orbita ma sześć niewiadomych (elementy, w tym czas przelotu przez perygeum). Każda obserwacja daje dwa kąty i znany czas: trzy obserwacje to sześć równań.
2. Równania są silnie nieliniowe, dlatego Gauss sprowadził je do jednego równania na odległość w środkowej obserwacji, rozwiązywanego iteracyjnie. Przy krótkim łuku orbity układ jest źle uwarunkowany: małe błędy pomiaru dają duże błędy elementów, co Gauss łagodził metodą najmniejszych kwadratów, kiedy przybywało obserwacji.

