

Sterowanie orientacją: koła reakcyjne, magnetyki i silniczki

Ostatnia lekcja kursu zamyka pętlę: satelita wie, jak jest ustawiony (lekcja 12), i musi obrócić się tam, gdzie trzeba. Ma do tego trzy rodzaje urządzeń: koła reakcyjne, które wymieniają z nim moment pędu, cewki magnetyczne, które pchają go słabo, ale za darmo, i silniczki, które pchają mocno, ale zużywają paliwo. Zobaczymy regulator na kwaternionie i jego zderzenie z nasyceniem, problem nagromadzonego momentu pędu, magnetyczne hamowanie obrotu po oddzieleniu od rakiety (B-dot) i cykl graniczny silniczków na płaszczyźnie fazowej.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

F. L. Markley, J. L. Crassidis,
Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control, rozdz. 7;
C. A. Kluever,
Space Flight Dynamics, rozdz.
o sterowaniu orientacją; B. Wie, *Space Vehicle Dynamics and Control*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Kepler traci koła
- 1 Koła reakcyjne i regulator na kwaternionie
- 2 Nasycenie: duże obroty
- 3 Rozładowanie kół
- 4 Cewki magnetyczne i B-dot
- 5 Silniczki: strefa martwa i cykl graniczny
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i koniec kursu

Prolog: Kepler traci koła

Teleskop Kepler, który szukał planet pozasłonecznych, miał cztery koła reakcyjne; do utrzymania orientacji w trzech osiach potrzebował trzech. W 2012 roku zawiodło jedno, w 2013 drugie, i główna misja się skończyła. Inżynierowie wymyślili jednak tryb K2: ustawili teleskop tak, żeby ciśnienie promieniowania słonecznego było symetryczne względem jego osi i działało jak trzecie, „wirtualne” koło, a resztę zakłóceń co kilka dni zbierały silniczki. Teleskop pracował tak jeszcze ponad cztery lata, aż skończyło się paliwo.

Ta historia zawiera główne motywy lekcji: koła wymieniają moment pędu z satelitą, ale same go nie usuwają; zakłócenia z lekcji 11 Satelita bez sterowania: wirowanie, dwuspin i gradient grawitacyjny zbierają się w kołach i ktoś musi je z nich zabrać; paliwo silniczków jest zasobem, który kończy misję.

Koła reakcyjne i regulator na kwaternionie

Koło reakcyjne to wirnik napędzany silnikiem. Gdy silnik przyspiesza koło momentem $-\mathbf{u}$, satelita dostaje moment $\mathbf{u}$; całkowity moment pędu satelity z kołami $\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}$ zmienia się tylko od zewnętrznych momentów sił:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \mathbf{M}_{\text{zew}}, \quad \dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{u}.$$

Błąd orientacji wyrażamy kwaternionem $\delta q = (\delta q_0, \delta \mathbf{q}_v)$ między orientacją a celem; dla małych błędów $2\delta \mathbf{q}_v$ to wektor kątów błędu (dynamika lotu, lekcja 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony). Najprostszy regulator to PD na kwaternionie:

REGULATOR PD NA KWATERNIONIE

$$\mathbf{u} = -K_p \text{sign}(\delta q_0) 2\delta \mathbf{q}_v - K_d \boldsymbol{\omega}, \quad K_p = \omega_n^2 I, \quad K_d = 2\zeta \omega_n I.$$

Dla małych kątów każda oś to oscylator $\ddot{\theta} + 2\zeta \omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$. Znak δq_0 wybiera krótszy z dwóch obrotów (q i $-q$ to ta sama orientacja); bez niego satelita czasem obraca się o prawie 360° (tzw. unwinding).

Typowe koło dużego satelity ma moment do ok. $0,1-0,3 \text{ N}\cdot\text{m}$ i pojemność kilku do kilkadziesiąt $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$; koła CubeSatów mają setne do tysięcznych części tego. Cztery koła w konfiguracji piramidy dają zapas, jak w Keplerze.

- 1 Satelita ma $I = 110 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ wokół osi obrotu. Dobierz K_p i K_d dla $\omega_n = 0,1 \text{ rad/s}$ i $\zeta = 0,9$.
■ ■ ■ Jaki moment trzeba na początku obrotu o 5° ?

- 2 Dlaczego $2\delta\mathbf{q}_v$, a nie $\delta\mathbf{q}_v$, jest wektorem kątów błędu?
■ ■ ■

- 3 Cel jest obrócony o 190° wokół pewnej osi względem bieżącej orientacji. Co zrobi regulator ze znakiem δq_0 , a co bez niego?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

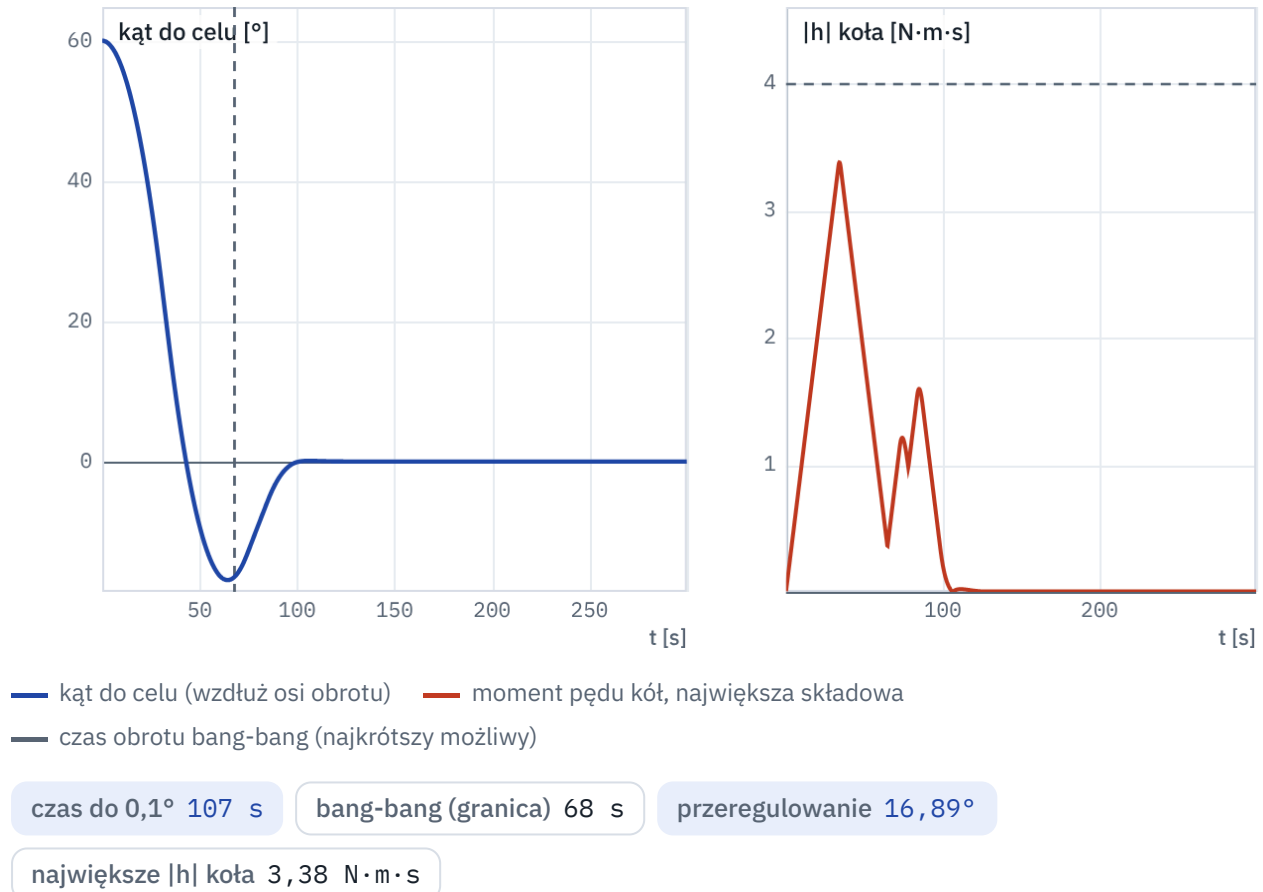
2 Nasycenie: duże obroty

Regulator liniowy zakłada, że moment może być dowolnie duży. Dla obrotu o 60° satelity o $I = 110 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ i koła $0,1 \text{ N}\cdot\text{m}$: PD z $\omega_n = 0,1 \text{ rad/s}$ kończy (błąd poniżej $0,1^\circ$) po 75 s, z $\omega_n = 0,2 \text{ rad/s}$ — po 111 s, z przeregulowaniem 17° . Większe wzmocnienie dało gorszy wynik: przez większość obrotu moment jest w nasyceniu, satelita rozpędza się do $2,3^\circ/\text{s}$, a człon D zaczyna hamować za późno. To ten sam mechanizm co w lekcji automatyki 3.3 Nieliniowa rzeczywistość: nasycenie, windup, feedforward i gain scheduling.

Najkrótszy możliwy czas obrotu z ograniczonym momentem daje sterowanie bang-bang (automatyka, lekcja 5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów): pełny moment do połowy, pełne hamowanie od połowy, $t = 2\sqrt{\theta I / u_{\max}} = 68 \text{ s}$. Praktyczne rozwiązanie zbliżone do niego: **kaskada z limitem prędkości**. Regulator położenia zadaje prędkość kątową, ograniczoną do bezpiecznej wartości, a szybka pętla prędkości ją realizuje. Z limitem $1^\circ/\text{s}$ obrót kończy się po 78 s bez przeregulowania ($0,03^\circ$), a koło zbiera tylko $1,5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$.

SYMULACJA 1 Obrót satelity kołami reakcyjnymi (pełna dynamika w trzech osiach).

Lewy panel: kąt do celu, linia przerywana to czas obrotu bang-bang. Prawy panel: moment pędu kół i jego granica. Porównaj PD przy różnych pasmach z kaskadą, duże i małe kąty.



Przeregulowanie 16,9°: przy dużym kącie moment koła jest w nasyceniu, satelita rozpędza się bardziej, niż zakłada liniowy regulator, i nie zdąży wyhamować. To ta sama nieliniowość co w lekcji automatyki 3.3; pomaga kaskada z limitem prędkości.

Stan na rysunku: $I = (100, 120, 80)$ kg·m², oś obrotu w płaszczyźnie xy, 60°; $\omega_n = 0,20$ rad/s, $\zeta = 0,9$; moment koła $\leq 0,10$ N·m, $|h| \leq 4$ N·m·s na oś.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz czas obrotu bang-bang o 60° dla $I = 110$ kg·m² i $u_{\max} = 0,1$ N·m oraz największy moment pędu, jaki przejmuje koło.
- 2 Przy jakim kącie PD z $\omega_n = 0,2$ rad/s (dla $I = 110$) zaczyna się nasycać przy $u_{\max} = 0,1$ N·m?

- 3 Kaskada ma limit prędkości $\omega_{\max}$. Ile trwa obrót o θ , jeśli przyspieszanie i hamowanie są krótkie?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

3 Rozładowanie kół

Koła tylko przenoszą moment pędu między sobą a satelitą. Jeśli moment zakłócający ma składową stałą (np. gradient grawitacji przy stałej orientacji albo ciśnienie promieniowania na niesymetryczny panel), koła muszą go kompensować i ich moment pędu rośnie bez końca. Przy $10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$ koło o pojemności $4 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ nasyci się w 4,6 doby; przy $10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$ w 46 dni.

Moment pędu trzeba więc co jakiś czas oddać na zewnątrz, momentem siły zewnętrznej, zwykle w trakcie normalnej pracy. Dwa sposoby: cewki magnetyczne (moment $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, darmowy, słaby i tylko prostopadły do pola) albo silniczki (mocne, ale kosztują paliwo). Typowe prawo dla cewek: $\mathbf{m} = \frac{k}{|\mathbf{B}|^2} \Delta \mathbf{h} \times \mathbf{B}$, gdzie $\Delta \mathbf{h}$ to nadmiar momentu pędu kół. Daje ono moment zewnętrzny $-k\Delta \mathbf{h}_\perp$ (składowa prostopadła do pola); regulator orientacji trzyma satelitę w miejscu, więc ten moment pędu ubywa z kół.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Cewka ma dipol $10 \text{ A}\cdot\text{m}^2$, pole $30 \mu\text{T}$. Jaki największy moment daje i ile trwałoby rozładowanie $4 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ przy pełnym momencie?
- 2 Pokaż, że $\mathbf{m} = \frac{k}{B^2} \Delta \mathbf{h} \times \mathbf{B}$ daje moment $-k\Delta \mathbf{h}_\perp$, gdzie $\Delta \mathbf{h}_\perp$ to składowa prostopadła do pola.
- 3 Rozładowanie $4 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ silniczkami o ciągu $0,1 \text{ N}$ na ramieniu 1 m : ile trwa i ile kosztuje paliwa (hydrazyna, $I_{sp} = 220 \text{ s}$)?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

4 Cewki magnetyczne i B-dot

Po oddzieleniu od rakiety satelita zwykle się obraca, czasem kilka do kilkunastu stopni na sekundę. Zanim włączy się tracker i koła, trzeba ten obrót wytracić, najlepiej bez wiedzy o orientacji. Rozwiązuje to prawo B-dot (Stickler i Alfried, lata 70.): magnetometr mierzy pole w osiach satelity, a jego zmiana w czasie wynika głównie z obrotu satelity.

B-DOT

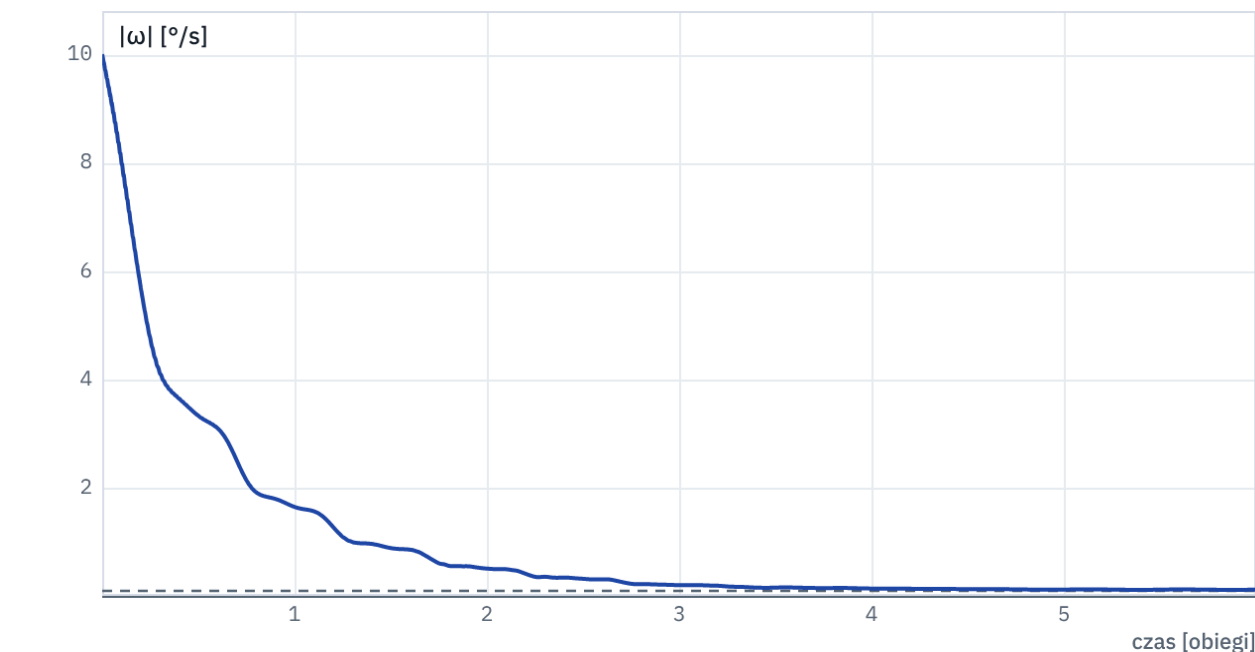
$$\mathbf{m} = -k \dot{\mathbf{B}}_{\text{ciało}}, \quad \dot{\mathbf{B}}_{\text{ciało}} \approx -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}.$$

Moment $\mathbf{m} \times \mathbf{B} = k(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$; moc $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) = -k|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}|^2 \leq 0$. Energia obrotu maleje zawsze, niezależnie od orientacji.

Dla CubeSata 3U ($J = (0,042; 0,042; 0,0067)$ kg·m², cewki 0,2 A·m², orbita 500 km o nachyleniu 97,4°), z 10°/s: przy $k = 10^4$ A·m²·s/T prędkość spada poniżej 1°/s po 1,2–1,8 obiegu (zależnie od początkowej osi obrotu), a po czterech obiegach do ok. 0,15°/s. Przy $k = 10^5$ cewki są stale w nasyceniu i wystarcza 0,3–0,5 obiegu. Przy $k = 10^3$ po sześciu obiegach zostaje jeszcze 2–4°/s. B-dot nie zejdzie poniżej ok. $2n$ (0,13°/s), bo pole na orbicie polarnej samo obraca się w układzie inercyjnym mniej więcej dwa razy na obieg i prawo „śledzi” je zamiast stać w miejscu.

SYMULACJA 2

Wytracanie obrotu CubeSata 3U prawem B-dot przez sześć obiegów. Pole magnetyczne to dipol osiowy, cewki mają ograniczony dipol w każdej osi. Zmieniaj wzmocnienie, prędkość początkową i siłę cewek; linia przerywana to $2n$.



— $|\omega|$ satelity — $2n$: poziom, poniżej którego B-dot nie zejdzie

poniżej 1 °/s po 1,30 obiegu

$|\omega|$ na końcu 0,12 °/s

$2n$ 0,127 °/s

najkrótszy możliwy czas (pełny dipol) 0,22 obiegu

B-dot hamuje obrót niezależnie od orientacji: moment jest zawsze przeciwny do zmiany pola w osiach satelity. Nie zejdzie jednak poniżej ok. $2n$: pole na orbicie polarnej samo obraca się dwa razy na obieg.

Stan na rysunku: CubeSat 3U, $J = (0,042; 0,042; 0,0067)$ kg·m², orbita 500 km o nachyleniu 97,4°, pole dipola osiowego; $m = -k \cdot \dot{\mathbf{B}}$ z nasyceniem 0,20 A·m² na oś, krok 0,5 s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

1 Jaki jest najkrótszy czas wytracenia obrotu 10°/s wokół osi o $J = 0,042$ kg·m² przy dipolu 0,2 A·m² i polu 30 μT?

2 Pokaż, że $\dot{\mathbf{B}}_{\text{ciało}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} + R^T \dot{\mathbf{B}}_{\text{in}}$ i oszacuj, kiedy drugi człon można pominąć.

3 Dlaczego B-dot nie wymaga wiedzy o orientacji ani nawet żyroskopu?

5 Silniczki: strefa martwa i cykl graniczny

Silniczek albo pracuje, albo nie, i ma najkrótszy impuls (kilkadziesiąt milisekund). Sterowanie to przekaznik ze strefą martwą: dopóki kąt jest w strefie $\pm\theta_{db}$, nic się nie dzieje. Bez członu od prędkości silniczek strzela, dopóki kąt nie wróci do strefy, i dodaje za każdym razem za dużo prędkości: drgania rosną. Dlatego przełącza się na liniach $\theta + \tau_c \omega = \pm\theta_{db}$ na płaszczyźnie fazowej (automatyka, lekcja 5.1 Zasada maksimum Pontriagina, sterowanie czasooptymalne i metoda strzałów).

CYKL GRANICZNY Z NAJKRÓTSZYM IMPULSEM

Impuls zmienia prędkość o $\Delta\omega = u t_{\min}/I$. Bez zakłóceń satelita dryfuje między granicami strefy z prędkością $\Delta\omega/2$:

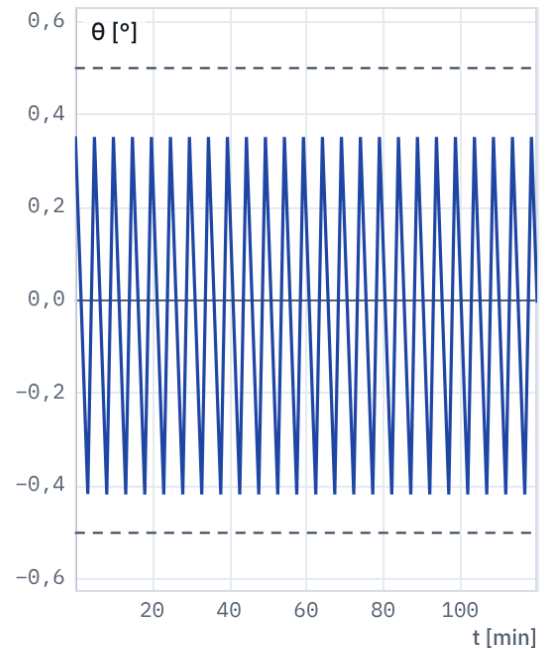
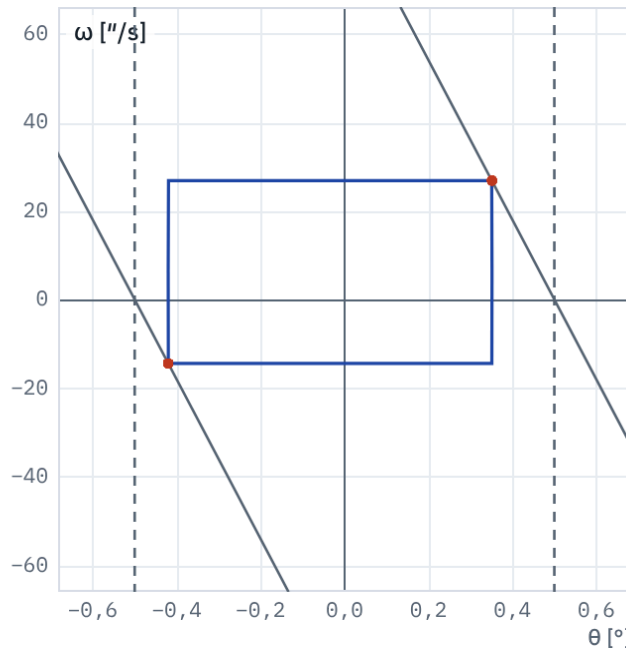
$$T = \frac{4\theta_{db}}{\Delta\omega/2}, \quad \text{impuls na okres} = 2u t_{\min} \text{ (na ramieniu).}$$

Ze stałym zakłóceniem M_d cykl staje się jednostronny, gdy $(\Delta\omega/2)^2/(2M_d/I) < 2\theta_{db}$; zużycie jest wtedy wymuszone przez zakłócenie: impuls M_d razy czas. Warunek przeciw drganiom (chattering): $\tau_c < \theta_{db}/(\Delta\omega/2)$.

Liczby: $I = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, moment $1 \text{ N}\cdot\text{m}$, impuls 20 ms , strefa $\pm 0,5^\circ$. $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$, okres 349 s , $4,6 \text{ g}$ hydrazyny na dobę. Symulacja z $\tau_c = 20 \text{ s}$ daje $5,4 \text{ g}$, bo początkowa prędkość nie jest dokładnie wielokrotnością $\Delta\omega/2$. Z $\tau_c = 100 \text{ s}$ warunek jest złamany ($\theta_{db}/(\Delta\omega/2) = 87 \text{ s}$) i silniczki strzelają na przemian: kilogramy paliwa na dobę. Z zakłóceniem $10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$ cykl jest jednostronny i zużycie ($4,0 \text{ g/dobę}$) równa się dokładnie $M_d \cdot \text{doba} / (I_{sp} g_0)$.

SYMULACJA 3

Utrzymanie orientacji silniczkami w jednej osi przez dwie godziny. Lewy panel: płaszczyzna fazowa (kąt, prędkość) z drugiej godziny, strefa martwa i linie przełączeń, punkty to impulsy. Prawy panel: kąt w czasie. Wyłącz człon od prędkości ($\tau_c = 0$), przesadź z nim, dodaj zakłócenie.



— trajektoria (druga godzina) — strefa martwa i linie przełączeń — impulsy silniczków

impulsy na godzinę 24

paliwo (hydrazyna) 5,34 g/dobę

zakres kąta $-0,42^\circ \dots 0,35^\circ$

wymuszone przez zakłócenie 0,00 g/dobę

Cykl graniczny: satelita dryfuje między granicami strefy z prędkością ok. połowy najmniejszej zmiany od impulsu. Mniejszy impuls albo szersza strefa to radsze impulsy i mniej paliwa.

Stan na rysunku: jedna oś, $I = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, moment silniczków $1 \text{ N}\cdot\text{m}$, cykl sterowania $0,1 \text{ s}$, impuls 20 ms , strefa $\pm 0,50^\circ$, $\tau_c = 20 \text{ s}$, zakłócenie $0 \text{ N}\cdot\text{m}$, $I_{sp} = 220 \text{ s}$; 2 h symulacji, wykres fazowy z drugiej godziny.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 25 min

1 Policz okres cyklu granicznego i zużycie paliwa na rok dla danych z ramki ($I_{sp} = 220 \text{ s}$).

2 Jak zmniejszyć zużycie w cyklu bez zakłóceń? Co ogranicza każdy sposób?

▣▣ podstawowe ▣▣ średnie ▣▣ feynmanowskie

☰ METODA: DOBÓR UKŁADU WYKONAWCZEGO

1. **Obroty:** czas i kąt → moment ($t = 2\sqrt{\theta I/u}$) i moment pędu ($u t/2$).
2. **Zakłócenia:** składowa stała → tempo narastania momentu pędu w kołach → częstotliwość rozładowań.
3. **Rozładowanie:** cewki ($\mathbf{m} \times \mathbf{B}$, tylko na niskich orbitach) albo silniczki (paliwo).
4. **Tryby awaryjne:** B-dot po oddzieleniu i po awarii; silniczki ze strefą martwą przy dużych zakłóceniach.

Przykład 6.1

Dobór koła dla satelity obserwacyjnego

Satelita ($I \approx 110 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$) ma się obrócić o 60° w 90 s. Zakłócenia: $10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$ składowej stałej. Jakie koło?

1. Bang-bang w 90 s: $u = 4\theta I/t^2 = 4 \cdot 1,047 \cdot 110/8100 = 0,057 \text{ N}\cdot\text{m}$; z zapasem i kaskadą 0,1 N·m.
2. Moment pędu obrotu: kaskada z limitem $1^\circ/\text{s}$: $110 \cdot 0,0175 = 1,9 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$; zakłócenia przez dobę: 0,86 N·m·s.
3. Koło 4 N·m·s: obrót plus ok. 2 doby zakłóceń; rozładowanie cewkami codziennie.

Wynik: 0,1 N·m i 4 N·m·s, rozładowanie raz na dobę.

Sprawdzenie: Symulacja 1: kaskada $1^\circ/\text{s}$ kończy w 78 s przy 1,5 N·m·s ✓.

Przykład 6.2

Detumbling CubeSata

CubeSat 3U oddzielił się z $10^\circ/\text{s}$. Ile trwa B-dot i jakie dobrać wzmacnienie?

- 1 Granica fizyczna: 0,2 obiegu przy pełnym dipolu (zadanie 4.1).
- 2 Rząd wielkości wzmacnienia: dipol nasycy się przy $k \omega B \approx m_{\text{max}}$, czyli $k \approx 0,2 / (0,17 \cdot 3 \cdot 10^{-5}) \approx 4 \cdot 10^4$.
- 3 Symulacja: $k = 10^4 - 1,2-1,8$ obiegu do $1^\circ/\text{s}$; $k = 10^5 - 0,3-0,5$ obiegu.

Wynik: kilka godzin; prędkość końcowa ok. $2n = 0,13^\circ/\text{s}$.

Sprawdzenie: energia obrotu maleje monotonicznie w symulacji ✓ (ramka B-dot).

Przykład 6.3

Paliwo na utrzymanie orientacji

Satelita na orbicie GEO bez kół, silniczki $1 \text{ N}\cdot\text{m}$, impuls 20 ms , $I = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, strefa $\pm 0,5^\circ$, zakłócenie od ciśnienia promieniowania $10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$. Ile paliwa na 15 lat?

- 1 Czy cykl jest jednostronny: $(\Delta\omega/2)^2 / (2M_d/I) = 10^{-8} / (2 \cdot 10^{-6}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} < 2\theta_{\text{db}} = 0,017 \text{ rad}$: tak.
- 2 Zużycie: $10^{-4} \cdot 86400 / (220 \cdot 9,81) = 4,0 \text{ g/dobę}$, przez 15 lat: 22 kg.

Wynik: ok. 22 kg (na ramieniu 1 m; dłuższe ramię proporcjonalnie mniej).

Sprawdzenie: Symulacja 3 z zakłóceniem $10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$: 4,0 g/dobę ✓.

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Koła reakcyjne usuwają moment pędu satelity.”

Tylko go przejmują. Całkowity moment pędu zmieniają wyłącznie momenty zewnętrzne: cewki, silniczki, zakłócenia.

× „Większe wzmocnienie to szybszy obrót.”

Przy nasyceniu momentu nie: PD z dwa razy większym pasmem kończy obrót 60° później i z przeregulowaniem 17° .

× „Cewki magnetyczne mogą dać moment w dowolnym kierunku.”

Tylko prostopadle do pola; składowej wzdłuż pola w danej chwili nie dają wcale.

× „B-dot zatrzyma satelitę.”

Zostawi go z ok. $2n$, obracającego się razem z polem magnetycznym.

× „Węższa strefa martwa zawsze kosztuje więcej paliwa.”

Bez zakłóceń tak (zużycie $\propto 1/\theta_{db}$); przy stałym zakłóceniu i cyklu jednostronnym zużycie zależy tylko od zakłócenia.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 **Kepler na dwóch kołach.** Dlaczego dwa koła nie wystarczają do pełnej kontroli w trzech osiach i jak tryb K2 obszedł ten problem?

2 **Stabilność B-dot.** Dlaczego B-dot jest stabilny w sensie Lapunowa? Jaka jest funkcja Lapunowa?

3 **Koło w zerze obrotów.** Koło reakcyjne przechodzące przez zero obrotów źle się zachowuje (tarcie, zmiana znaku). Jak temu zapobiegają cztery koła w piramidzie?

4 **Żyroskopy momentowe.** Duże satelity i stacja kosmiczna używają żyroskopów momentowych (CMG) zamiast kół. Na czym polega różnica?

5 **Cały system.** Ułóż kolejność trybów pracy satelity od oddzielenia od rakiety do pracy naukowej, z uzasadnieniem, co dany tryb wymaga i co daje następnemu.

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

1 Co robi znak δq_0 w regulatorze na kwaternionie?

Wybiera krótszy obrót; zapobiega obrotowi o prawie 360° .

2 Dlaczego duże pasmo PD szkodzi przy dużych obrotach?

Moment jest w nasyceniu, satelita się rozpędza, a hamowanie zaczyna się za późno: przeregulowanie i dłuższy czas.

3 Ile trwa obrót bang-bang?

$$t = 2\sqrt{\theta I / u_{\max}}.$$

4 Po co rozładowanie kół?

Stała składowa zakłóceń zbiera się w kołach; trzeba ją oddać momentem zewnętrznym (cewki, silniczki).

5 Co mówi prawo B-dot i gdzie się zatrzymuje?

$\mathbf{m} = -k\dot{\mathbf{B}}$; zawsze rozprasza energię obrotu; kończy na ok. $2n$.

6 Od czego zależy zużycie paliwa w cyklu granicznym?

Bez zakłóceń od $t_{\min}^2 / \theta_{\text{db}}$; ze stałym zakłóceniem od samego zakłócenia.

KOŁA I OBROTY

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}), \dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = -K_p \text{sign}(\delta q_0) 2\delta \mathbf{q}_v - K_d \boldsymbol{\omega}$$

$$\text{bang-bang: } t = 2\sqrt{\theta I/u}, h_{\max} = u t/2$$

$$\text{rozładowanie: } \mathbf{m} = \frac{k}{B^2} \Delta \mathbf{h} \times \mathbf{B}$$

MAGNETYKI I SILNICZKI

$$\text{B-dot: } \mathbf{m} = -k\dot{\mathbf{B}}, \dot{V} = -k|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}|^2$$

$$\Delta\omega = u t_{\min}/I, T = 8\theta_{\text{db}}/\Delta\omega$$

$$\text{bez drgań: } \tau_c < 2\theta_{\text{db}}/\Delta\omega$$

$$\text{paliwo: } m = \text{impuls}/(I_{sp}g_0)$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer, 2014), rozdz. 7 (prawa sterowania, koła, cewki, rozładowanie); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdział o sterowaniu orientacją.
- **Dla chętnych:** B. Wie, *Space Vehicle Dynamics and Control* (AIAA): obroty czasooptymalne, CMG i ich osobliwości.

To koniec kursu astronautyki. Zaczęliśmy od dwóch ciał i elipsy, przeszliśmy przez manewry, transfery, asysty, wejście w atmosferę i doszliśmy do satelity, który sam wie, gdzie patrzy, i sam się obraca. Każdy z tych tematów ma za sobą własne podręczniki; teraz wiesz, który otworzyć i co w nim znaleźć.



Odpowiedzi

Zadania · część 1

1. $K_p = 0,01 \cdot 110 = 1,1 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, $K_d = 2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 110 = 19,8 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$. Na początku $u = 1,1 \cdot 0,087 = 0,096 \text{ N}\cdot\text{m}$: na granicy koła $0,1 \text{ N}\cdot\text{m}$.
2. Kwaternion obrotu o kąt ϕ wokół $\mathbf{n}$ to $(\cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2})$. Dla małych ϕ : $\delta \mathbf{q}_v \approx \mathbf{n} \phi / 2$.
3. Obrót o 190° to ta sama orientacja co obrót o 170° w przeciwną stronę. Kwaternion błędu ma $\delta q_0 = \cos 95^\circ < 0$. Ze znakiem regulator odwraca kierunek $\delta \mathbf{q}_v$ i obraca satelitę o 170° krótszą drogą. Bez znaku obraca o 190° . Uwaga praktyczna: regulator ze znakiem, gdy błąd jest bliski 180° , przy szumie może się „wahać” między kierunkami, więc w praktyce dodaje się małą histerezę.

Zadania · część 2

1. Połowę kąta w połowie czasu: $\theta/2 = \frac{1}{2} \frac{u}{I} (t/2)^2$, więc $t = 2\sqrt{\theta I / u} = 2\sqrt{1,047 \cdot 110 / 0,1} = 68 \text{ s}$. Moment pędu w połowie: $u t/2 = 3,4 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$.
2. $K_p = 0,04 \cdot 110 = 4,4 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$; nasycenie gdy $4,4\theta > 0,1$, czyli $\theta > 0,023 \text{ rad} = 1,3^\circ$. Każdy większy obrót jest od początku poza zakresem liniowym.
3. Ok. $\theta/\omega_{\max}$ plus czas rozpędzania $I\omega_{\max}/u_{\max}$ (przyspieszanie i hamowanie razem dodają tyle, co jedno rozpędzanie). Dla 60° i $1^\circ/\text{s}$: $60 + 110 \cdot 0,0175/0,1 = 60 + 19 = 79 \text{ s}$; symulacja: 78 s.

Zadania · część 3

1. $10 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$; $4/3 \cdot 10^{-4} = 13300 \text{ s}$, ok. 3,7 h. W praktyce kilka razy dłużej, bo moment musi być prostopadły do pola, a pole zmienia kierunek wzdłuż orbity.
2. Z tożsamości $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$: $(\Delta \mathbf{h} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\Delta \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{h} B^2 = -B^2 \Delta \mathbf{h}_\perp$. Zatem $\mathbf{m} \times \mathbf{B} = -k \Delta \mathbf{h}_\perp$. Składowej wzdłuż pola w tej chwili nie da się oddać; zrobi to się później, gdy pole zmieni kierunek.
3. Moment $0,1 \text{ N}\cdot\text{m}$: 40 s. Impuls $0,1 \cdot 40 = 4 \text{ N}\cdot\text{s}$, paliwo $4/(220 \cdot 9,81) = 1,9 \text{ g}$ (para silniczków po 0,05 N, tworząca parę sił, daje ten sam moment i zużywa tyle samo paliwa: łączny impuls też $4 \text{ N}\cdot\text{s}$).

Zadania · część 4

1. Moment $\leq 0,2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$; moment pędu $0,042 \cdot 0,175 = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$; czas $\geq 1220 \text{ s}$, ok. 0,2 obiegu. Rzeczywiście dłużej, bo moment nie zawsze jest prostopadły do pola i nie zawsze pełny.
2. $\mathbf{B}_{\text{ciało}} = R^T \mathbf{B}_{\text{in}}$, $\dot{R} = R[\boldsymbol{\omega} \times]$, więc $\dot{R}^T = -[\boldsymbol{\omega} \times] R^T$ i $\dot{\mathbf{B}}_{\text{ciało}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_{\text{ciało}} + R^T \dot{\mathbf{B}}_{\text{in}}$. Pole w układzie inercjalnym zmienia kierunek z prędkością ok. $2n$, więc drugi człon jest mały, dopóki $\omega \gg 2n$; stąd granica ok. $2n$.
3. Wystarcza pochodna pomiaru magnetometru w osiach satelity, a ta przy szybkim obrocie jest w przybliżeniu $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$; moment jest wtedy rozpraszający w każdej orientacji (ramka). To czyni go idealnym trybem awaryjnym i pierwszym trybem po oddzieleniu.

Zadania · część 5

1. $\Delta\omega = 1 \cdot 0,02/100 = 2 \cdot 10^{-4}$ rad/s; $T = 4 \cdot 0,00873/10^{-4} = 349$ s. Na dobę $2 \cdot 86400/349 = 495$ impulsów po 0,02 N·s: 9,9 N·s, 4,6 g; na rok 1,7 kg.
2. Zużycie na dobę $\propto (\Delta\omega/2) \cdot u t_{\min}/\theta_{\text{db}} \propto t_{\min}^2/\theta_{\text{db}}$. Krótszy impuls (ograniczenie: zawór i powtarzalność bardzo krótkich impulsów), szersza strefa (ograniczenie: wymagana dokładność), mniejszy moment silniczka (ograniczenie: musi pokonać zakłócenia i wykonać obroty). Przy zakłóceniu nic z tego nie pomaga: płaci się za zakłócenie.

Zadania do przemyslenia

1. Dwa koła dają moment tylko w płaszczyźnie swoich osi; trzecia oś jest wolna i każde zakłócenie wokół niej obraca satelitę.
2. K2 ustawiał teleskop tak, żeby ciśnienie promieniowania nie dawało (prawie) momentu wokół tej osi: równowaga niestabilna w jednej osi, którą co kilka godzin korygowały silniczki. Kosztem było przestawianie obserwowanego pola co ok. 80 dni, w miarę jak Ziemia i teleskop okrążały Słońce.
2. 1. $V = \frac{1}{2}\omega^T J \omega$ (energia obrotu). $\dot{V} = \omega \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) = -k|\omega \times \mathbf{B}|^2 \leq 0$ (automatyka, lekcja 4.6 Stabilność Lapunowa i sterowanie nieliniowe).
2. $\dot{V} = 0$ tylko gdy $\omega \parallel \mathbf{B}$; ponieważ pole zmienia kierunek wzdłuż orbity, ten stan nie trwa i energia dalej maleje (argument w stylu LaSalle'a), aż do poziomu, przy którym pomijany człon pola wprowadza błąd.
3. 1. Czwarte koło daje nadmiar: ten sam moment satelity można uzyskać nieskończenie wieloma kombinacjami momentów kół (przestrzeń zerowa macierzy rozkładu).
2. Dodając składową z przestrzeni zerowej, ustawia się wszystkie koła na niezerowej prędkości („bias”), bez wpływu na satelitę. Ta sama nadmiarowość pozwala przeżyć awarię jednego koła.
4. 1. Koło zmienia wartość momentu pędu; CMG ma stałą, dużą prędkość wirnika i zmienia kierunek momentu pędu, obracając wirnik w ramie. Moment $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{\Omega}_{\text{rama}} \times \mathbf{h}$ jest wtedy dużo większy przy tej samej mocy.
2. Cena: osobliwe konfiguracje, w których żaden obrót ram nie daje momentu w pewnym kierunku; trzeba je omijać w algorytmie sterowania.
5. 1. B-dot (tylko magnetometr i cewki) → wolny obrót; tryb słoneczny (czujniki Słońca, koła albo cewki) → panele na Słońce, energia; zgrubne wyznaczanie orientacji (Słońce i pole, TRIAD lub metoda q).
2. Tracker w trybie „zagubiony w kosmosie” → dokładna orientacja; filtr z żyroskopem (lekcja 12) → orientacja i bias; tryb naukowy z kołami (PD lub kaskada) i okresowe rozładowanie cewkami. Każdy błąd wraca do trybu bezpiecznego (B-dot albo słoneczny).

Astronautyka · Lekcja 13: Sterowanie orientacją · Źródła: F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer, rozdz. 7); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley); B. Wie, *Space Vehicle Dynamics and Control* (AIAA). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a13.py).