

Wyznaczanie orientacji: czujniki, TRIAD i filtr

Zanim satelita obróci się w stronę celu, musi wiedzieć, jak jest ustawiony teraz. Nie ma pionu z akcelerometru ani kompasu w zwykłym sensie: są kierunki do Słońca, do gwiazd, do środka Ziemi i wektor pola magnetycznego, każdy z inną dokładnością, oraz żyroskopy, które mierzą tylko obroty. Ta lekcja pokazuje, jak z dwóch kierunków dostać pełną orientację (TRIAD), jak zrobić to optymalnie z wielu (problem Wahby, metoda q) i jak żyroskop połączony z trackerem gwiazd daje dokładność lepszą niż każdy z nich osobno.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, rozdz. 4–6; G. Wahba, SIAM Review 7 (1965); M. D. Shuster, S. D. Oh, „Three-axis attitude determination from vector observations” (1981)

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Hubble na jednym żyroskopie
- 1 Czujniki orientacji
- 2 Orientacja z dwóch kierunków: TRIAD
- 3 Problem Wahby i metoda q
- 4 Tracker gwiazd i żyroskop: filtr
- 5 Od czujników do systemu
- 6 Metoda i przykłady rozwiązań
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Hubble na jednym żyroskopie

Kosmiczny Teleskop Hubble'a musi utrzymać kierunek z dokładnością do kilku tysięcznych sekundy kątowej przez wiele minut ekspozycji. Robi to, łącząc żyroskopy (mierzą obrót między pomiarami) z czujnikami prowadzenia, które śledzą gwiazdy w polu widzenia. Żyroskopy się zużywają: teleskop ma ich sześć, misje serwisowe je wymieniały, a od 2024 roku NASA prowadzi obserwacje w trybie jednego żyroskopu, żeby zachować sprawne w rezerwie. Teleskop dalej działa, ale wolniej się przestawia i nie może obserwować części nieba w danym momencie.

Ta historia zawiera całą lekcję w skrócie. Czujniki kierunku (gwiazdy, Słońce, pole magnetyczne) mówią, jak satelita jest ustawiony, ale rzadko, z szumem i nie zawsze. Żyroskopy mówią, jak się obraca, często i gładko, ale z dryfem. Dobra orientacja to połączenie jednych z drugimi. Ten sam problem rozwiązywaliśmy dla samolotu (dynamika lotu, lekcja 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach); w kosmosie nie ma pionu z akcelerometru, więc zaczniemy od tego, co jest zamiast niego.

Czujniki orientacji

Czujniki dzielą się na dwie grupy. **Czujniki wektorowe** mierzą kierunek czegoś znanego w osiach satelity: jednostkowy wektor $\mathbf{b}$ w osiach ciała, który odpowiada wektorowi $\mathbf{r}$ znanemu w układzie odniesienia (np. inercjalnym). Orientacja to macierz A , dla której $\mathbf{b} = A\mathbf{r}$. **Czujniki prędkości kątowej** (żyroskopy) mierzą $\boldsymbol{\omega}$ i pozwalają przenieść znaną orientację w czasie.

Typowe dokładności (rzędy wielkości, 1σ)			
Czujnik	Co mierzy	Dokładność	Uwagi
Czujnik Słońca, zgrubny	kierunek do Słońca	ok. 1°	fotodiody na ściankach; nie działa w cieniu Ziemi
Czujnik Słońca, dokładny	kierunek do Słońca	$0,01-0,1^\circ$	maska i matryca
Czujnik horyzontu	kierunek do środka Ziemi	$0,05-0,3^\circ$	podczerwień; zakłócenia od atmosfery
Magnetometr	wektor pola magnetycznego	$0,5-3^\circ$ (z modelem pola)	ograniczony błędem modelu pola i polem własnym satelity
Tracker gwiazd	pełna orientacja	$1-10''$ w poprzek osi, kilka razy gorzej wokół osi	oślepia go Słońce, Ziemia, Księżyc
Żyroskop	prędkość kątowna	bias od 0,001 do kilku $^\circ/\text{h}$	dryf: trzeba korygować

Magnetometr mierzy pole bardzo dokładnie, ale do orientacji potrzebny jest też kierunek pola w układzie odniesienia, a ten bierze się z modelu (IGRF). Błąd modelu rzędu 100 nT przy polu ok. 30 000 nT to $0,2^\circ$; do tego dochodzi pole wytwarzane przez sam satelitę. Tracker gwiazd to kamera z katalogiem gwiazd: rozpoznaje wzór gwiazd w polu widzenia i podaje od razu całą orientację, z dokładnością rzędu sekund kątowych.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- Model pola magnetycznego ma błąd 100 nT, a pole na orbicie ma 30 000 nT. Jaki błąd kierunku to daje w najgorszym przypadku?
- Tracker ma pole widzenia 20° i matrycę 1024 piksele. Ile sekund kątowych przypada na piksel? Jak tracker osiąga lepszą dokładność?
- Żyroskop ma bias $0,01^\circ/\text{h}$, a satelita liczy orientację z samego żyroskopu przez godzinę. Jaki błąd narasta? A przy biasie $1^\circ/\text{h}$ (tani żyroskop MEMS)?

2 Orientacja z dwóch kierunków: TRIAD

Jeden kierunek nie wystarcza: obrót wokół samego kierunku do Słońca nie zmienia tego, co widzi czujnik Słońca. Dwa nierównoległe kierunki wyznaczają orientację jednoznacznie, a nawet z nadmiarem (cztery liczby na trzy niewiadome, bo kąt między wektorami jest taki sam w obu układach). Najprostszy algorytm, TRIAD (używany od lat 60.), buduje z obu par wektorów dwie ortonormalne trójki i składa je ze sobą.

TRIAD

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}, \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2; \quad \text{tak samo } \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \text{ z } \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2,$$

$$A = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3] [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3]^T.$$

Pierwszy wektor jest odtworzony dokładnie ($A\mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_1$); z drugiego bierze się tylko płaszczyzna. Dlatego pierwszym wektorem musi być ten dokładniejszy.

Kolejność ma znaczenie. Czujnik Słońca ($0,05^\circ$) i magnetometr (1°), wektory pod kątem 90° : ze Słońcem jako pierwszym wektorem RMS błędu wynosi $1,02^\circ$, z magnetometrem jako pierwszym $1,41^\circ$. Ponadto obrót wokół kierunku Słońca widzi tylko magnetometr, więc błąd wokół tej osi wynosi $\sigma_2 / \sin \alpha$, gdzie α to kąt między wektorami. Przy 20° to już $2,9^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 30 min

- 1 W układzie odniesienia $\mathbf{r}_1 = [1; 0; 0]$, $\mathbf{r}_2 = [0; 1; 0]$; w osiach ciała zmierzono $\mathbf{b}_1 = [0; 1; 0]$, $\mathbf{b}_2 = [-1; 0; 0]$. Policz A algorytmem TRIAD i sprawdź wynik.
- 2 Dlaczego błąd obrotu wokół kierunku Słońca wynosi $\sigma_2 / \sin \alpha$? Policz go dla $\sigma_2 = 1^\circ$ i $\alpha = 60^\circ$.
- 3 W cieniu Ziemi czujnik Słońca nie działa. Co zostaje satelicie z magnetometrem i czujnikiem Słońca?

Problem Wahby i metoda q

TRIAD nie umie wykorzystać trzech wektorów ani zważyć dwóch o podobnej dokładności. Grace Wahba postawiła w 1965 roku problem ogólnie: znaleźć macierz obrotu, która najlepiej przekształca wszystkie wektory odniesienia w zmierzone, z wagami a_i .

PROBLEM WAHBY I METODA Q DAVENPORTA

$$\min_A L(A) = \frac{1}{2} \sum_i a_i |\mathbf{b}_i - A\mathbf{r}_i|^2 = \sum_i a_i - \text{tr}(AB^T), \quad B = \sum_i a_i \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^T.$$

Z kwaternionem $q = (q_0, \mathbf{q}_v)$: $\text{tr}(AB^T) = q^T K q$, gdzie

$$K = \begin{bmatrix} \text{tr } B & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & B + B^T - \text{tr } B I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \sum_i a_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i.$$

Tu q to kwaternion obrotu ciało $\rightarrow$ odniesienie w konwencji z lekcji 1 Orientacja w 3D: macierz obrotu, kąty Eulera, oś i kąt, kwaterniony (Hamilton, skalar na początku), a $A = R(q)^T$; w podręczniku Markleya i Crassidisa konwencja jest inna i znak $\mathbf{z}$ może się różnić. Optymalny kwaternion to wektor własny K dla największej wartości własnej $\lambda_{\max}$; $L_{\min} = \sum a_i - \lambda_{\max}$. Wagi: $a_i = 1/\sigma_i^2$.

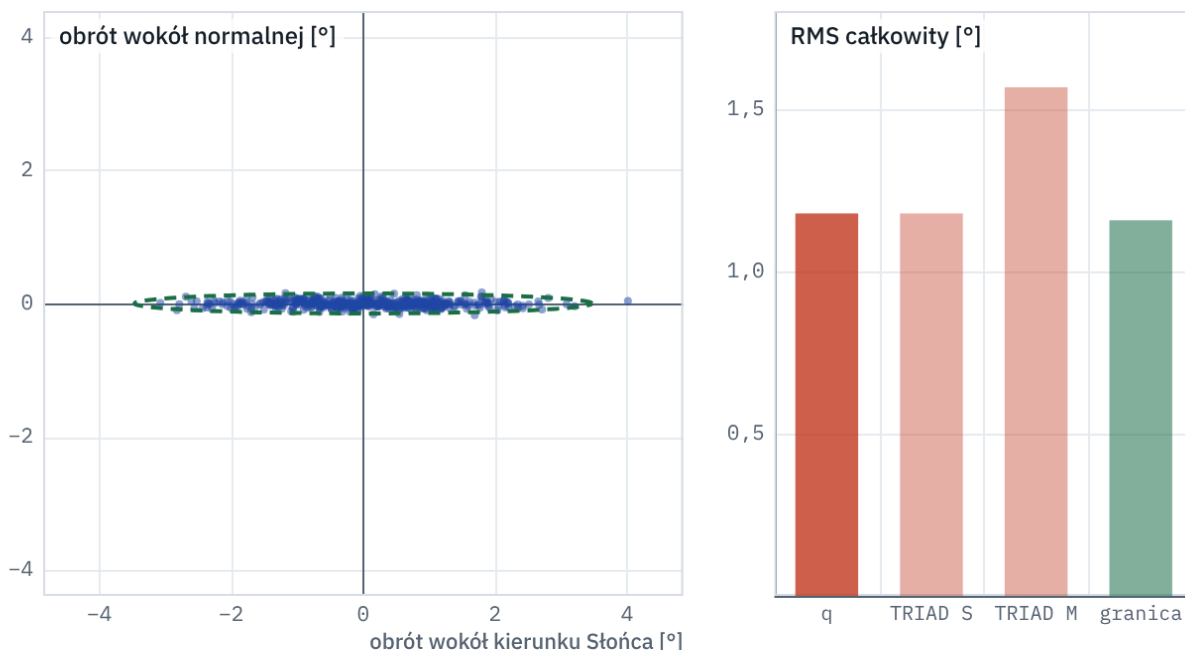
Szukanie maksimum formy kwadratowej na sferze jednostkowej to dokładnie problem wartości własnych (mnożnik Lagrange'a dla więzu $|q| = 1$). Algorytm QUEST (Shuster, 1979–1981) przyspiesza go: wie, że $\lambda_{\max}$ jest bliskie $\sum a_i$, więc szuka go kilkoma krokami metody Newtona na wielomianie charakterystycznym zamiast pełnego rozkładu. Na komputerach pokładowych lat 80. to była różnica decydująca.

Czego lepiej się nie da? Dla małych błędów kowariancja błędu orientacji optymalnego estymatora to

$$P = \left(\sum_i \frac{I - \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T}{\sigma_i^2} \right)^{-1}.$$

Każdy wektor daje informację tylko o obrotach prostopadłych do siebie (macierz $I - \mathbf{b}\mathbf{b}^T$ zeruje obrót wokół $\mathbf{b}$). Przy dwóch pomiarach po $0,5^\circ$ i kącie 60° : granica z kowariancji to $0,890^\circ$, metoda q osiąga $0,888^\circ$ (Monte Carlo, 6000 prób), TRIAD $0,955^\circ$.

SYMULACJA 1 Czujnik Słońca i magnetometr: 500 losowych orientacji z szumem pomiarów. Lewy panel: błąd orientacji (obróć wokół kierunku Słońca i wokół normalnej do obu wektorów) dla wybranej metody i elipsa 3σ z kowariancji. Prawy panel: RMS całkowitego błędu trzech metod i granica z kowariancji. Zmniejszaj kąt między wektorami i wyrównuj dokładności.



— błąd obrotu w próbach Monte Carlo — granica 3σ z kowariancji (najlepsze możliwe)
 — RMS metod (słupki)

metoda q 1,178°

TRIAD, Słońce pierwsze 1,178°

TRIAD, magnetometr pierwszy 1,567°

granica z kowariancji 1,157°

σ wokół kierunku Słońca 1,155°

Czujnik Słońca jest 20 razy dokładniejszy: TRIAD ze Słońcem jako pierwszym wektorem jest prawie optymalny, z magnetometrem jako pierwszym traci dużo. Błąd wokół kierunku Słońca zależy tylko od magnetometru: tego obrotu Słońce nie widzi.

Stan na rysunku: 500 losowych orientacji, $\sigma_1 = 0,05^\circ$, $\sigma_2 = 1,00^\circ$, kąt 60° ; wagi metody q $1/\sigma^2$; elipsa 3σ z $P = (\Sigma (I - r r^T)/\sigma^2)^{-1}$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 30 min

1 Pokaż, że $L(A) = \sum a_i - \text{tr}(AB^T)$ dla wektorów jednostkowych.

2 Dwa prostopadłe wektory: $\mathbf{b}_1 = \hat{x}$ z $\sigma_1 = 0,05^\circ$ i $\mathbf{b}_2 = \hat{y}$ z $\sigma_2 = 1^\circ$. Policz P . Wokół której osi błąd jest największy?

- 3 Bez szumu, dla trzech pomiarów z wagami 1, jaka jest $\lambda_{\max}$? Co oznacza $\lambda_{\max}$ wyrażnie mniejsze od $\sum a_i$?

▣▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣ feynmanowskie

4 Tracker gwiazd i żyroskop: filtr

Metody statyczne biorą pomiary z jednej chwili. Filtr łączy je w czasie: między pomiarami trackera orientację niesie żyroskop, a każdy pomiar trackera poprawia orientację i bias żyroskopu. W satelitach standardem jest multiplikatywny filtr Kalmana (MEKF), który znasz z dynamiki lotu (lekcja 3 Fuzja czujników w 3D: estymacja orientacji na kwaternionach): stanem jest mały błąd orientacji i błąd biasu, sześć liczb. Dla małych błędów trzy osie są prawie niezależne, więc wiele daje analiza jednej osi.

⚙️ FILTR JEDNEJ OSI: STAN (KĄT, BIAS)

Żyroskop: $\omega_m = \omega + b + \eta_v$, bias błędzi: $\dot{b} = \eta_u$. Szum kątowy (ARW) σ_v [rad/√s], błędzenie biasu (RRW) σ_u [rad/s^{3/2}], tracker σ_n co Δt .

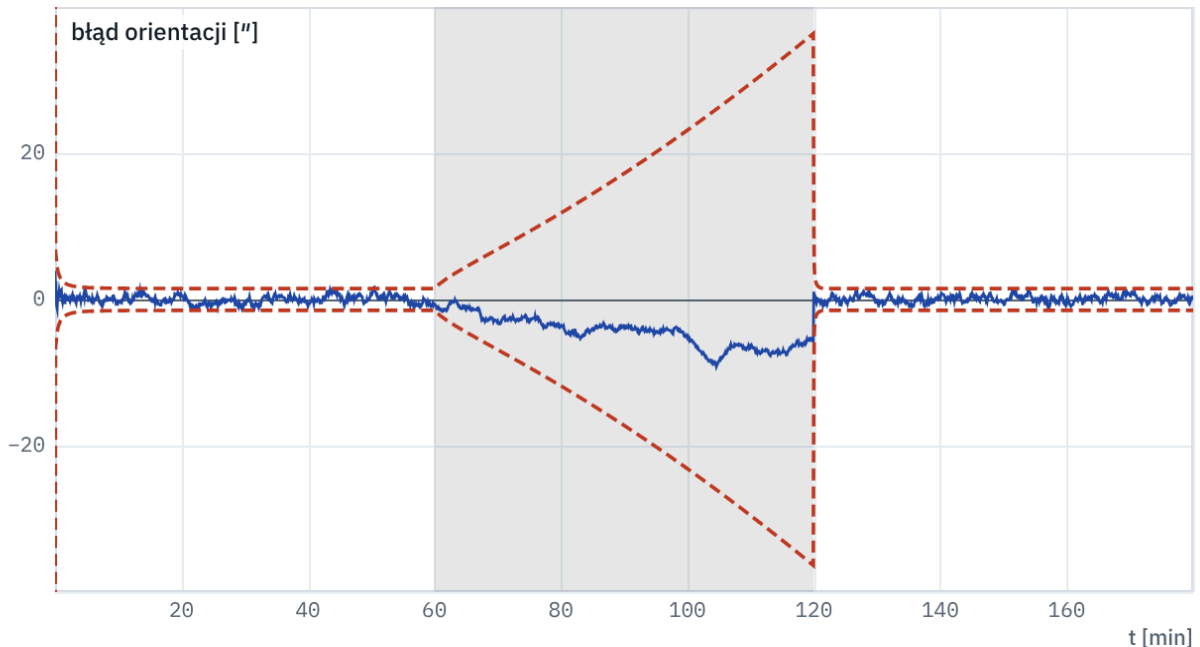
W stanie ustalonym, gdy $\sigma_v^2 \Delta t \ll \sigma_n^2$:

$$\sigma_\theta \approx \sqrt{\sigma_n \sigma_v} \Delta t^{1/4}.$$

Bez pomiarów (sam żyroskop): $\sigma_\theta^2(t) = \sigma_0^2 + \sigma_b^2 t^2 + \sigma_v^2 t + \sigma_u^2 t^3 / 3$.

Liczby (wartości z podręcznika Markleya i Crassidisa: $\sigma_v = \sqrt{10} \cdot 10^{-7}$ rad/√s, czyli $0,0011^\circ / \sqrt{\text{h}}$, $\sigma_u = \sqrt{10} \cdot 10^{-10}$ rad/s^{3/2}, tracker $\sigma_n = 17 \mu\text{rad} = 3,5''$ co 1 s): filtr daje $0,49''$, siedem razy lepiej niż pojedynczy pomiar trackera. Przybliżenie daje $0,48''$. Przy pomiarach co 10 s: $0,90''$ (przybliżenie $0,85''$), co 60 s: $1,5''$. Jeśli tracker zgaśnie (Słońce w polu widzenia), po 10 min błąd rośnie do $2,2''$, po godzinie do $12''$, po trzech do $49''$; na długich przerwach dominuje błędzenie biasu, które rośnie jak $t^{3/2}$.

SYMULACJA 2 Trzy godziny pracy filtru w jednej osi: tracker gwiazd i żyroskop z biasem $1^\circ/\text{h}$. Niebieska linia to prawdziwy błąd estymaty, czerwone przerywane to $\pm 3\sigma$ z kowariancji filtru. Zmieniaj szum trackera, odstęp pomiarów i jakość żyroskopu; włącz przerwę w pomiarach.



— błąd estymaty orientacji — $\pm 3\sigma$ z filtru — przerwa w pomiarach gwiazd

σ w stanie ustalonym 0,49"

przybliżenie $\sqrt{(\sigma_n \sigma_v) \cdot \Delta t^{1/4}}$ 0,49"

RMS błędu w tej próbie (40–58 min) 0,61"

σ na końcu przerwy 12,1"

W czasie przerwy filtr ma tylko żyroskop: błąd rośnie od biasu (liniowo), szumu kąтового (jak $\sqrt{t}$) i błędzenia biasu (jak $t^{1,5}$). Po 60 min $\sigma = 12,1''$, czyli 25 razy więcej niż ze trackerem. Pierwszy pomiar po przerwie od razu ściąga błąd w dół.

Stan na rysunku: jedna oś, stan (kąt, bias); $\sigma_n = 3,5''$ co 1 s, ARW $0,0011^\circ/\sqrt{\text{h}}$, RRW $0,0040^\circ/\text{h}^{1,5}$; bias prawdziwy $1^\circ/\text{h}$; 3 h symulacji, krok 1 s.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 30 min

1 Policz σ_θ z przybliżenia dla $\sigma_n = 17 \mu\text{rad}$, $\sigma_v = 3,16 \cdot 10^{-7} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$ i $\Delta t = 10 \text{ s}$.

2 Skąd przybliżenie? Rozważ sam kąt (bez biasu): między pomiarami wariancja rośnie o $q = \sigma_v^2 \Delta t$, pomiar ma wariancję $r = \sigma_n^2$. Pokaż, że dla $q \ll r$ wariancja w stanie ustalonym to ok. $\sqrt{qr}$.

- 3 W godzinnej przerwie błąd rośnie do $11,8''$. Z czego się składa, jeśli bias oszacowano z dokładnością $0,0021^\circ/\text{h}$?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

5 Od czujników do systemu

Kilka rzeczy, których nie widać we wzorach. Tracker po włączeniu nie wie nic: rozpoznaje gwiazdy, porównując kąty między nimi (trójkąty gwiazd) z katalogiem, i podaje orientację w kilka sekund bez żadnej wiedzy wstępnej (tryb „zagubiony w kosmosie”). Tracker oślepia Słońce, a także jasna Ziemia i Księżyc, w promieniu kilkudziesięciu stopni od osi, więc satelity mają zwykle dwa albo trzy trackery patrzące w różne strony. Dwa trackery prostopadłe do siebie dają też dobrą dokładność we wszystkich osiach: obrót wokół osi jednego to obrót w poprzek drugiego. Wreszcie czujniki są zamontowane z błędami ustawienia rzędu minut kątowych, więc ich kalibracja na orbicie (np. przez dodatkowe stany w filtrze) jest częścią projektu.

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Dlaczego tracker mierzy obrót wokół swojej osi kilka razy gorzej niż w poprzek?
- 2 Satelita ma jeden tracker o 30° kącie wykluczenia dla Słońca. Ile czasu na orbicie może on być oślepiony, jeśli patrzy prostopadle do płaszczyzny orbity, a Słońce leży w tej płaszczyźnie? A jeśli patrzy w zenit?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

☰ METODA: BUDŻET DOKŁADNOŚCI ORIENTACJI

1. Wymaganie w każdej osi i czujniki, które je mogą spełnić (tabela z części 1).
2. Statycznie: kowariancja $P = (\sum(I - \mathbf{b}\mathbf{b}^T)/\sigma^2)^{-1}$; uwaga na mały kąt między wektorami.
3. Z żyroskopem: $\sigma \approx \sqrt{\sigma_n \sigma_v} \Delta t^{1/4}$ w stanie ustalonym, wzrost w przerwach.
4. Geometria: kiedy czujniki są oślepione albo w cieniu; ile trwają przerwy.

Przykład 6.1

Mały satelita: Słońce i magnetometr

CubeSat ma czujnik Słońca i magnetometr, oba z dokładnością $0,5^\circ$; kąt między wektorami 60° . Jaka jest dokładność orientacji z TRIAD i z metody q ?

- 1 Granica z kowariancji: $0,89^\circ$ RMS całkowity.
- 2 Metoda q z wagami $1/\sigma^2$: $0,888^\circ$ (Monte Carlo). TRIAD: $0,955^\circ$, ok. 7% gorzej, bo zachowuje pierwszy wektor dokładnie i odrzuca część informacji z drugiego.

Wynik: ok. 1° ; przy równych dokładnościach metoda q ma niewielką przewagę.

Sprawdzenie: przy $\sigma_1 \ll \sigma_2$ TRIAD z dokładnym wektorem jako pierwszym i metoda q dają to samo ($1,13^\circ$ i $1,13^\circ$ przy $0,05^\circ/1^\circ$) ✓.

Przykład 6.2

Satelita obserwacyjny: tracker i żyroskop

Wymaganie: $1''$ (1σ) na osi. Tracker $3,5''$ co 1 s, żyroskop ARW $0,0011^\circ/\sqrt{\text{h}}$. Czy wystarczy? A z przerwą 10 min?

- 1 Stan ustalony: $0,49''$, spełnione z zapasem.
- 2 Przerwa 10 min: $2,2''$, niespełnione; przerwa 1 min: $0,7''$, spełnione.

Wynik: trzeba drugiego trackera albo ograniczyć przerwy do minut.

Sprawdzenie: w Symulacji 2 przy tych parametrach koperta 3σ w stanie ustalonym ma ok. $1,5''$ ✓.

Przykład 6.3

Zły pomiar

Metoda q z trzema wektorami (wagi znormalizowane do sumy 1) daje $\lambda_{\max} = 0,9990$. Typowy szum to ok. $0,5^\circ$. Czy to normalne?

- 1 $L_{\min} = 1 - 0,999 = 10^{-3}$. Każdy pomiar ma dwie składowe błędy o wariancji σ^2 , więc przed dopasowaniem $L \approx \frac{1}{2} \sum a_i \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2$. Dopasowanie trzech kątów „zjada” trzy z sześciu składowych, więc oczekiwane $L_{\min} \approx \frac{6-3}{6}\sigma^2 = \frac{1}{2}(0,0087)^2 = 3,8 \cdot 10^{-5}$ (Monte Carlo: $3,86 \cdot 10^{-5}$).
- 2 $L_{\min}$ jest ok. 26 razy większe od oczekiwanego: jeden z pomiarów jest najpewniej błędny (np. magnetometr zakłócony przez prąd w satelicie).

Wynik: odrzucić pomiar o największym residuum i policzyć ponownie.

Sprawdzenie: $L_{\min}$ jest sumą kwadratów residuów, więc przy poprawnych pomiarach ma rozkład zbliżony do χ^2 (statystyka, matematyka) ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Dwa dokładne czujniki zawsze dają dokładną orientację.”

Nie, jeśli wektory są prawie równoległe: obrót wokół wspólnego kierunku widać słabo, błąd rośnie jak $1/\sin \alpha$.

× „W TRIAD kolejność wektorów jest obojętna.”

Pierwszy wektor jest zachowany dokładnie; musi to być ten dokładniejszy.

× „Filtr nie może być dokładniejszy niż jego najlepszy czujnik.”

Może: żyroskop wiąże kolejne pomiary trackera i jego szum się uśrednia (0,49" z pomiarów po 3,5").

× „Magnetometr mierzy pole dokładnie, więc kierunek też.”

Kierunek w układzie odniesienia pochodzi z modelu pola, a ten ma błąd rzędu 0,1–0,5°; do tego pole własne satelity.

× „Kwaternion można filtrować jak zwykły wektor czterech liczb.”

Więź $|q| = 1$ czyni taką kowariancję osobliwą; poprawny jest filtr błędów (MEKF), jak w dynamice lotu.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

1 Skąd wagi $1/\sigma^2$? Uzasadnij, że minimalizacja $L(A)$ z $a_i = 1/\sigma_i^2$ to estymacja największej wiarygodności przy gaussowskim szumie prostopadłym do wektora.

2 Sam magnetometr. Czy satelita z samym magnetometrem i żyroskopami może wyznaczyć pełną orientację?

- 3 **Bez żyroskopów.** Coraz więcej małych satelitów nie ma żyroskopów. Skąd biorą prędkość kątową i jaka jest cena?
- 4 **Zbyt pewny filtr.** Co się stanie, jeśli w filtrze ustawimy szum żyroskopu dziesięć razy za mały?
- 5 **TRIAD a metoda q.** Kiedy TRIAD jest równie dobry jak metoda q, a kiedy wyraźnie gorszy?

▀▀▀ podstawowe ▀▀▀ średnie ▀▀▀ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Dlaczego jeden kierunek nie wystarcza?**

Obrót wokół tego kierunku go nie zmienia; potrzeba dwóch nierównoległych.

- 2 **Który wektor dać jako pierwszy w TRIAD?**

Dokładniejszy: pierwszy jest odtwarzany dokładnie.

- 3 **Jak metoda q znajduje orientację?**

Wektor własny macierzy K dla największej wartości własnej to optymalny kwaternion.

- 4 **Jaka jest najlepsza możliwa kowariancja z wektorów?**

$$P = (\sum(I - \mathbf{b}\mathbf{b}^\top)/\sigma^2)^{-1}.$$

- 5 **Jak dokładność filtru zależy od odstępu pomiarów?**

$$\text{Jak } \Delta t^{1/4}: \sigma \approx \sqrt{\sigma_n \sigma_v} \Delta t^{1/4}.$$

- 6 **Co dominuje w długiej przerwie w pomiarach?**

Błąd biasu (liniowo w czasie) i błędzenie biasu (jak $t^{3/2}$).

METODY STATYCZNE

$$\text{TRIAD: } A = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3][\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3]^\top$$

$$\text{Wahba: } L = \sum a_i - \text{tr}(AB^\top), B = \sum a_i \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^\top$$

$$\text{metoda q: } Kq = \lambda_{\max} q$$

$$P = (\sum(I - \mathbf{b}\mathbf{b}^\top)/\sigma^2)^{-1}$$

FILTR

$$\omega_m = \omega + \mathbf{b} + \eta_v, \dot{\mathbf{b}} = \eta_u$$

$$\sigma_\theta \approx \sqrt{\sigma_n \sigma_v} \Delta t^{1/4}$$

$$\text{przerwa: } \sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_b^2 t^2 + \sigma_v^2 t + \sigma_u^2 t^3 / 3$$

tracker: wokół osi kilka razy gorzej

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer, 2014), rozdz. 4 (czujniki), 5 (statyczne wyznaczanie orientacji: TRIAD, metoda q, QUEST), 6 (filtracja, MEKF).
- **Dla chętnych:** M. D. Shuster, S. D. Oh, „Three-axis attitude determination from vector observations”, *Journal of Guidance and Control* (1981): QUEST i model pomiaru w oryginale.

Satelita wie już, jak jest ustawiony, z dokładnością od stopnia do ułamka sekundy kątowej. Ostatnia lekcja kursu: jak go obrócić tam, gdzie trzeba, kołami reakcyjnymi, cewkami magnetycznymi i silniczkami, i co zrobić z momentem pędu, który koła zbierają od zakłóceń.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. Błąd prostopadły do pola obraca kierunek o $100/30000 = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,19^\circ$.
2. $20 \cdot 3600/1024 = 70''$ na piksel. Obraz gwiazdy jest celowo rozmyty na kilka pikseli, a jego środek (centroid) wyznacza się z dokładnością ok. $1/10$ piksela ($7''$). Uśrednienie kilkunastu gwiazd poprawia to jeszcze ok. $\sqrt{N}$ razy.
3. $0,01^\circ = 36''$ w godzinę; przy $1^\circ/\text{h}$ cały stopień. Dlatego błąd trzeba szacować na bieżąco (część 4).

Zadania • część 2

1. $\mathbf{t} = ([0; 1; 0], [0; 0; 1], [1; 0; 0])$, $\mathbf{s} = ([1; 0; 0], [0; 0; 1], [0; -1; 0])$. $A = \sum_i \mathbf{t}_i \mathbf{s}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: obrót o 90° wokół z . Sprawdzenie: $A\mathbf{r}_1 = [0; 1; 0] = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{r}_2 = [-1; 0; 0] = \mathbf{b}_2$.
2. Obrót o $\delta\phi$ wokół $\mathbf{r}_1$ przesuwa wektor $\mathbf{r}_2$ o $\delta\phi \sin \alpha$ (tylko składowa prostopadła do osi obrotu się porusza). Błąd pomiaru σ_2 odpowiada więc błędowi kąta $\sigma_2 / \sin \alpha = 1,155^\circ$.
3. Jeden kierunek (pole magnetyczne) nie wyznacza orientacji. Trzeba propagować orientację żyroskopami albo modelem dynamiki do wyjścia z cienia, albo dodać trzeci czujnik (np. horyzontu). Pole magnetyczne zmienia jednak kierunek wzdłuż orbity, więc filtr z modelem ruchu wyciąga z niego informację o wszystkich trzech osiach w dłuższym czasie.

Zadania • część 3

1. $|\mathbf{b} - A\mathbf{r}|^2 = 1 + 1 - 2\mathbf{b}^T A\mathbf{r}$ (obróć zachowuje długość). Zatem $L = \sum a_i - \sum a_i \mathbf{b}_i^T A\mathbf{r}_i$, a $\mathbf{b}^T A\mathbf{r} = \text{tr}(A\mathbf{r}\mathbf{b}^T) = \text{tr}(A(\mathbf{b}\mathbf{r}^T)^T)$. Suma daje $\text{tr}(AB^T)$.
2. $\sum (I - \mathbf{b}\mathbf{b}^T)/\sigma^2 = \text{diag}(1/\sigma_2^2, 1/\sigma_1^2, 1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)$. Odchylenia: wokół x (Słońce) $\sigma_2 = 1^\circ$, wokół y $\sigma_1 = 0,05^\circ$, wokół z $0,0499^\circ$. Największy wokół kierunku dokładnego wektora, bo ten obrót widzi tylko gorszy czujnik.
3. $\lambda_{\max} = 3$ ($L_{\min} = 0$). Duża różnica oznacza, że pomiary są niespójne: zły pomiar, błąd modelu pola, pomyłona gwiazda. To prosty test wiarygodności.

Zadania • część 4

1. $\sqrt{17 \cdot 10^{-6} \cdot 3,16 \cdot 10^{-7}} = 2,32 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,48''$; dla 10 s razy $10^{1/4} = 1,78$: $0,85''$. Dokładna wartość z równania Riccatiego: $0,49''$ i $0,90''$.
2. Stan ustalony przed pomiarem: $P^- = P^+ + q$, $P^+ = P^- r / (P^- + r)$. Stąd $P^-(P^- + r) - P^- r = q(P^- + r)$, czyli $(P^-)^2 = q(P^- + r)$. Dla $P^- \ll r$: $(P^-)^2 \approx qr$, $P^- \approx \sqrt{qr} = \sigma_v \sigma_n \sqrt{\Delta t}$, a $\sigma = \sqrt{P}$ daje wzór z ramki.
3. Błąd: $0,0021^\circ/\text{h} \cdot 1 \text{ h} = 7,6''$; ARW: $\sigma_v \sqrt{3600} = 3,9''$; RRW: $\sigma_u \sqrt{3600^3/3} = 8,1''$. Suma kwadratów: $\sqrt{7,6^2 + 3,9^2 + 8,1^2 + 0,5^2} = 11,8''$.

Zadania · część 5

1. Obrót w poprzek osi przesuwa wszystkie gwiazdy w polu widzenia o ten sam kąt. Obrót wokół osi przesuwa gwiazdę oddaloną od osi o ρ tylko o $\delta\phi \cdot \rho$, a ρ jest co najwyżej połową pola widzenia (np. $10^\circ = 0,17$ rad). Ten sam błąd położenia gwiazdy daje więc kilka razy większy błąd kąta wokół osi.
2. Prostopadle do orbity: kąt do Słońca stale ok. 90° , tracker nie jest oślepiany (dlatego tak się je ustawia). W zenit: oś obraca się raz na obieg i przechodzi przez Słońce; kąt mniejszy niż 30° przez 60/360 obiegu, ok. 16 min z 98, zawsze po stronie dziennej orbity.

Zadania do przemyślenia

1. Model: $\mathbf{b}_i = A\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\nu}_i$, $\boldsymbol{\nu}_i$ prostopadły do $\mathbf{b}_i$, gaussowski z wariancją σ_i^2 na składową.
2. Logarytm wiarygodności to $-\sum |\mathbf{b}_i - A\mathbf{r}_i|^2 / (2\sigma_i^2) + \text{stała}$; jego maksimum to minimum L z wagami $1/\sigma_i^2$ (Shuster nazwał to modelem pomiaru QUEST).
1. W jednej chwili nie: obrót wokół kierunku pola jest niewidoczny.
2. W czasie tak: kierunek pola w układzie inercyjnym zmienia się wzdłuż orbity (na orbicie polarnej obraca się dwa razy na obieg), a żyroskopy łączą pomiary z różnych chwil. Filtr widzi kilka różnych kierunków, czyli dostaje informację jak od kilku czujników. Dokładność jest ograniczona błędem modelu pola.
1. Z różnic kolejnych orientacji trackera (różniczkowanie) albo z modelu dynamiki w filtrze (równania Eulera ze znanymi momentami sił od kół).
2. Różniczkowanie wzmacnia szum ($\sigma_\omega \sim \sqrt{2}\sigma_n/\Delta t$); model dynamiki wymaga dobrej znajomości momentów bezwładności i zakłóceń. Przerwa w pomiarach trackera jest groźniejsza, bo nie ma czym jej przetrwać.
1. Kowariancja filtru będzie za mała, wzmocnienie Kalmana też: filtr za bardzo ufa propagacji żyroskopem i za mało poprawia pomiarami.
2. Prawdziwy błąd wyjdzie poza kopertę 3σ ; przy dużych kątach linearyzacja przestaje działać i filtr może się rozbiec. Test: znormalizowane innowacje powinny mieć wariancję 1; za duża oznacza za mały szum modelu.
1. Prawie równoważne, gdy jeden czujnik jest dużo dokładniejszy i ustawiony jako pierwszy: cała informacja o dwóch osiach pochodzi z niego, a o trzeciej z drugiego.
2. Gorszy przy podobnych dokładnościach (kilka procent), przy złej kolejności (dziesiątki procent) i przy więcej niż dwóch wektorach, których TRIAD nie umie użyć.

Astronautyka · Lekcja 12: Wyznaczanie orientacji · Źródła: F. L. Markley, J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control* (Springer, rozdz. 4–6); G. Wahba, *SIAM Review* 7 (1965); M. D. Shuster, S. D. Oh (1981). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a12.py).