

Satelita bez sterowania: wirowanie, dwuspin i gradient grawitacyjny

Satelita musi patrzeć w określonym kierunku: anteną na Ziemię, panelami na Słońce, kamerą na cel. Zanim zbudujemy układ sterowania orientacją, warto zapytać, co satelita robi sam. Ta lekcja zaczyna ostatnią część kursu od orientacji pasywnej: wirowania, które czyni satelitę bąkiem, rozpraszania energii, które potrafi ten bąk przewrócić, satelity dwuspinowego, który obchodzi ten problem, i gradientu grawitacji, który ustawia wydłużonego satelitę pionowo jak wahadło.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
12.4–12.7; U.
Walter,
Astronautics,
rozd. o
dynamice
orientacji; P. C.
Hughes,
*Spacecraft Attitude
Dynamics*

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: Explorer 1 się przewraca
- 1 Wirowanie bez momentów sił
- 2 Rozpraszanie energii i reguła osi największego momentu
- 3 Satelita dwuspinowy
- 4 Gradient grawitacyjny
- 5 Momenty zakłócające
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: Explorer 1 się przewraca

Pierwszy amerykański satelita, Explorer 1, wystrzelony 31 stycznia 1958 roku, był długim walcem z czterema giętkimi antenami prętowymi. Miał wirować wokół swojej długiej osi, jak pocisk karabinowy, żeby utrzymać stałą orientację. Już na pierwszej orbicie sygnał zaczął się zmieniać w sposób, który świadczył o tym, że satelita przewrócił się i obraca „bokiem”, jak koło młyńskie.

Wyjaśnienie znalazło się szybko: drgające anteny rozpraszały energię ruchu obrotowego. Moment pędu nie mógł się zmienić (nie działał żaden zewnętrzny moment siły), więc satelita przeszedł do stanu o najmniejszej energii przy tym samym momencie pędu: obrotu wokół osi o największym momencie bezwładności. Od tej pory każdy projektant satelity wirującego zna regułę: wiruj wokół osi największego momentu albo zrób coś mądrzejszego.

Tę historię znasz z lekcji 2 Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia dynamiki lotu, gdzie służyła do pokazania reguły osi największego momentu na satelicie osiowo symetrycznym. Tutaj wracamy do niej jako do punktu wyjścia projektowania: jakie środki pasywne ma satelita, którego nikt nie steruje, i kiedy one wystarczą.

1

Wirowanie bez momentów sił

Satelita bez zewnętrznych momentów sił to bryła sztywna opisana równaniami Eulera (dynamika lotu, lekcja 2 Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia): w osiach głównych

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \quad I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \quad I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2.$$

Zachowane są dwie wielkości: wektor momentu pędu $\mathbf{H}$ w przestrzeni (więc jego długość $H = |\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}|$) i energia kinetyczna $T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$. Wirowanie wokół osi 3 z prędkością Ω , lekko zaburzone, daje w osiach ciała drgania ω_1, ω_2 z częstością

☞ NUTACJA WIRUJĄCEGO SATELITY

$$\lambda = \Omega \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}.$$

Rzeczywiste λ (drgania) gdy I_3 jest największe albo najmniejsze; urojone (wykładniczy wzrost) gdy I_3 jest pośrednie. Oś wirowania krąży wtedy wokół $\mathbf{H}$ po stożku: to nutacja, a kąt stożka to kąt nutacji.

Wirowanie daje satelicie „sztywność żyroskopową”: mały moment zakłócający M obraca wektor $\mathbf{H}$ z prędkością M/H , zamiast rozkręcać satelitę. Satelita wirujący z 60 obr/min i momentem pędu $100 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ pod wpływem momentu zakłócającego $10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$ obraca oś o 10^{-7} rad/s , ok. $0,5^\circ$

na dobę. Wiele pierwszych satelitów, a dziś np. stopnie rakiet i sondy w czasie lotu, stabilizuje się po prostu wirowaniem.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Satelita o momentach $I_1 = 10$, $I_2 = 12$, $I_3 = 20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ wiruje wokół osi 3 z prędkością 1 obr/s. Jaka jest częstość nutacji w osiach ciała?
- 2 Moment zakłócający $10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$ działa prostopadle do osi satelity wirującego z momentem pędu $100 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$. Jak szybko i w którą stronę obraca się oś?
- 3 Pokaż z równań Eulera, że przy $\omega_3 = \Omega$ i małych ω_1, ω_2 dostaje się $\ddot{\omega}_1 = -\lambda^2 \omega_1$ z λ jak w ramce.

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

2

Rozpraszanie energii i reguła osi największego momentu

Powtórka z lekcji 2 Bryła w 3D: tensor bezwładności, równania Eulera i oś pośrednia, tym razem dla satelity bez symetrii osiowej. Prawdziwy satelita nie jest bryłą sztywną: drgają anteny, przelewa się paliwo, uginają się panele. Te ruchy rozpraszają energię kinetyczną, ale nie zmieniają momentu pędu, bo są wewnętrzne. Przy stałym H energia $T = \frac{1}{2} \frac{H^2}{I_{\text{ef}}}$ jest najmniejsza dla obrotu wokół osi *największego* momentu i największa dla osi *najmniejszego*. Wirowanie wokół osi *najmniejszego* momentu jest stabilne tylko w idealnej bryle sztywnej; z rozpraszaniem energii satelita powoli przechodzi do stanu o najmniejszej energii.

REGUŁA OSI NAJWIĘKSZEGO MOMENTU

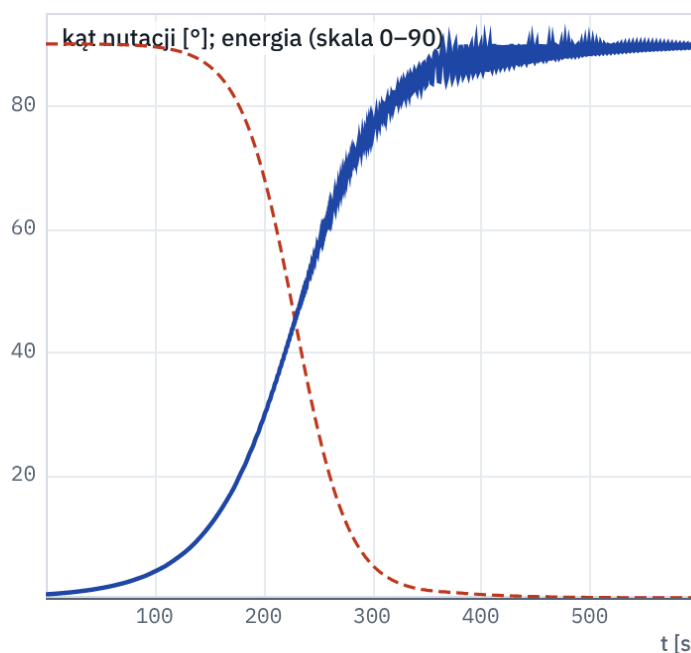
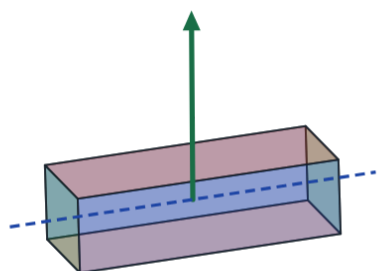
Satelita z rozpraszaniem energii wiruje stabilnie tylko wokół osi o największym momencie bezwładności. Wirowanie wokół osi *najmniejszego* momentu przechodzi w obrót „płaski” wokół osi *największego*.

Model „ujścia energii”: $\dot{\mathbf{H}}_{\text{ciało}} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} - \varepsilon(\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{H}})\hat{\mathbf{H}}): |\mathbf{H}|$ zachowany, $\dot{T} = -\varepsilon(\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{H}})^2) \leq 0$.

W symulacji satelita z $I = (1; 1,05; 0,2) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, wirujący wokół osi 3 z 10 rad/s, z rozpraszaniem $\varepsilon = 0,005$: kąt nutacji rośnie od ułamka stopnia do 10° po 143 s, 45° po 229 s i 80° po 312 s, a na

końcu satelita obraca się wokół osi 2 z energią dokładnie $H^2/(2I_{\max})$. Długość $|\mathbf{H}|$ jest zachowana do czwartej cyfry przez cały czas.

SYMULACJA 1 Satelita z rozpraszaniem energii. Lewy panel: bryła o wymiarach odpowiadających momentom bezwładności, zielona strzałka to moment pędu (stały w przestrzeni), przerywana linia to oś, wokół której satelita miał wirować. Prawy panel: kąt nutacji i energia. Porównaj wirowanie wokół osi najmniejszego i największego momentu i wyłącz rozpraszanie.



— kąt nutacji: oś wirowania a moment pędu — energia kinetyczna (między minimum a maksimum przy tym H)
— moment pędu H (stały w przestrzeni)

kąt nutacji teraz / na końcu $89,7^\circ$ / $89,7^\circ$

energia kinetyczna: początek → koniec $10,00 \rightarrow 1,91$

$|\mathbf{H}|$ (zachowany) $2,0001 \rightarrow 2,0001$

momenty bezwładności $1,00$ / $1,05$ / $0,20$

Rozpraszanie zabiera energię przy stałym momencie pędu. Najmniejszą energię przy danym H ma obrót wokół osi największego momentu, więc satelita przechodzi do „płaskiego wirowania”: kąt nutacji rośnie do 90° . Tak zachował się Explorer 1.

Stan na rysunku: $I = 1,00, 1,05, 0,20$, rozpraszanie $\varepsilon = 0,005$, chwila 600 s; kąt nutacji $89,7^\circ$.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Satelita z $I_1 = 1$, $I_2 = 1,05$, $I_3 = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ wiruje wokół osi 3 z 10 rad/s. Ile wynosi H i energia? Ile energii zostanie po przejściu do płaskiego wirowania?
■ ■ ■
- 2 Pokaż, że model „ujścia energii” zachowuje $|\mathbf{H}|$ i zmniejsza T .
■ ■ ■
- 3 Stopień rakiety z resztkami paliwa ma kształt walca i wiruje wokół długiej osi. Co się stanie i dlaczego jest to problem dla wypuszczanego satelity?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Satelita dwuspinowy

Satelita telekomunikacyjny chce mieć antenę stale skierowaną na Ziemię, a jednocześnie stabilność wirującego bąka. Rozwiązanie z lat 60.: dwie części połączone łożyskiem. Wirnik (np. z panelami słonecznymi na obwodzie) wiruje szybko i daje moment pędu, a platforma z antenami obraca się raz na obieg, zwrócona do Ziemi. Taki satelita nazywa się dwuspinowym albo żyrostatem.

Kluczowe odkrycie (A. J. Iorillo, Hughes, 1965) dotyczy rozpraszania energii. Jeśli energia rozprasza się głównie na wolno obracającej się platformie (tam montuje się tłumik nutacji), układ jest stabilny nawet przy wirowaniu wokół osi najmniejszego momentu, czyli przy wydłużonym kształcie, który mieści się pod osłoną rakiety. Rozpraszanie we wirniku działa w przeciwną stronę. Tak zbudowano całe rodziny satelitów telekomunikacyjnych (np. Intelsat IV) i sondę Galileo, która łączyła wirującą część z polami magnetycznymi i cząstek z nieobracającą się platformą kamer.

ZADANIA · CZĘŚĆ 3

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Dlaczego wirujące satelity telekomunikacyjne wcześniejszej generacji były wysokie i wąskie, choć reguła osi największego momentu wymagałaby kształtu dysku?
■ ■ ■
- 2 Wirnik dwuspinu ma moment pędu $200 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$. Platforma obraca się raz na obieg geostacjonarny. Jaki moment pędu wnosi platforma o momencie bezwładności $500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$? Która część decyduje o sztywności żyroskopowej?
■ ■ ■
- 3 Gdzie umieścić tłumik nutacji w satelicie dwuspinowym, a gdzie w zwykłym satelicie wirującym wokół osi największego momentu?
■ ■ ■

■ ■ ■ podstawowe ■ ■ ■ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

Gradient grawitacyjny

Na niskiej orbicie grawitacja słabnie z wysokością: dolny koniec wydłużonego satelity jest przyciągany odrobinę mocniej niż górny. Wynikowy moment siły ustawia najdłuższą oś pionowo, jak wahadło. W osiach orbity (LVLH: x wzdłuż toru, y prostopadle do płaszczyzny orbity, z do środka Ziemi) dla orbity kołowej o ruchu średnim n :

GRADIENT GRAWITACYJNY

$$\mathbf{M}_{gg} = 3n^2 \hat{\mathbf{r}} \times (I\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \text{ — kierunek do środka Ziemi w osiach ciała.}$$

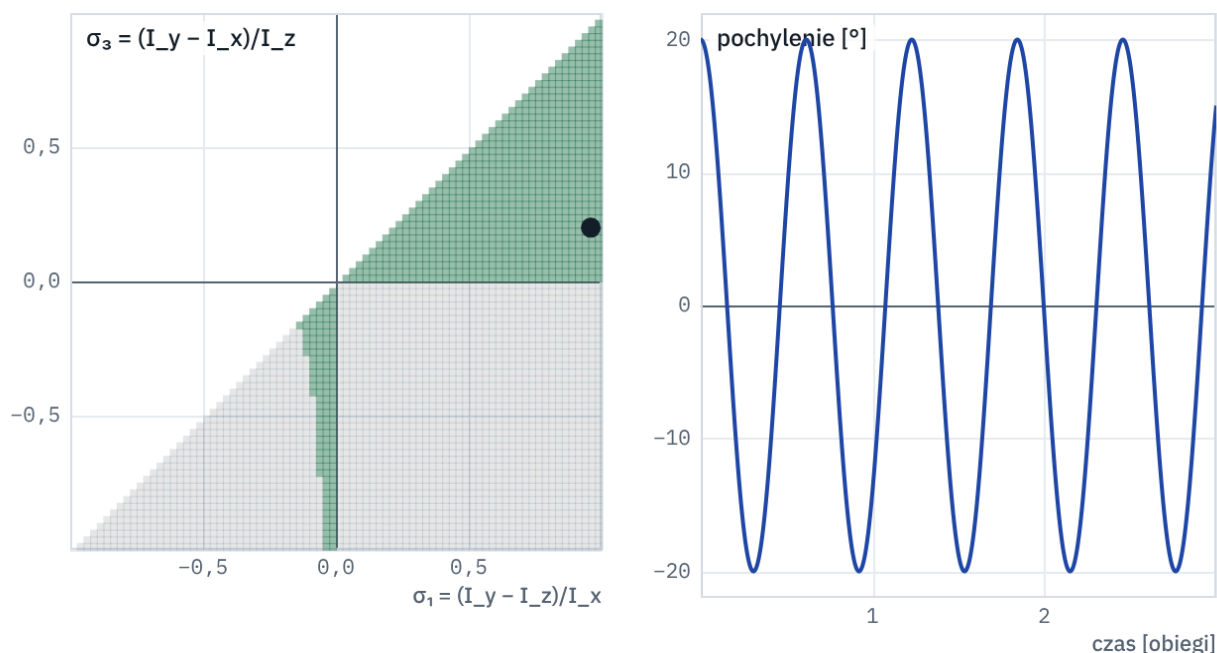
Pochylenie (wokół y): $I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z)\theta = 0$, stabilne gdy $I_x > I_z$, częstość $n\sqrt{3(I_x - I_z)/I_y}$.

Przechylenie i odchylenie (sprzężone): stabilne gdy $\sigma_1\sigma_3 > 0$ i $1 + 3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 > 4\sqrt{\sigma_1\sigma_3}$, gdzie $\sigma_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}$, $\sigma_3 = \frac{I_y - I_x}{I_z}$. Najprostszy obszar (Lagrange'a): $I_y > I_x > I_z$.

Satelita z długim masztem (moment wokół osi do Ziemi mały) na orbicie 700 km, $I = (990; 1000; 50) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$: okres libracji pochylenia 58,8 min (orbita 98,8 min); dla $I_x \approx I_y \gg I_z$ zawsze ok. $T_{\text{orb}}/\sqrt{3}$. Moment przy wychyleniu w pochyleniu o 10° to $5 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}$: mało, ale dużo więcej niż typowe zakłócenia od ciśnienia promieniowania. Wada: gradient nie tłumí drgań. Satelita bez tłumika wahałby się wokół pionu bez końca, więc dodaje się tłumiki (np. magnetyczne albo histerezowe) i zwykle maszt rozkładany na orbicie, żeby zwiększyć różnicę momentów.

SYMULACJA 2

Stabilizacja gradientem grawitacyjnym. Lewy panel: mapa stabilności w zmiennych σ_1, σ_3 (zielony: stabilne we wszystkich osiach, szary: tylko pochylenie), punkt: wybrany satelita. Prawy panel: nieliniowa libracja pochylenia bez tłumienia przez trzy obieg. Zmieniaj momenty bezwładności i sprawdź, kiedy satelita się przewraca.



— stabilne: pochylenie i przechylenie—odchylenie — stabilne tylko pochylenie — libracja pochylenia

σ_1, σ_3 0,96, 0,20

pochylenie stabilne

przechylenie i odchylenie stabilne

okres libracji pochylenia (małe kąty) 58,8 min (orbita 98,8 min)

Obszar Lagrange'a: $I_y > I_x > I_z$. Satelita jak wahadło trzyma się pionu: najdłuższą osią (najmniejszy moment) do Ziemi, największy moment prostopadle do orbity. Bez tłumienia drga jednak wokół tego położenia bez końca.

Stan na rysunku: $I = (990, 1000, 50) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, orbita 700 km; $\sigma_1 = 0,96$, $\sigma_3 = 0,20$; libracja z 20° bez tłumienia.

ZADANIA · CZĘŚĆ 4

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Policz okres libracji pochylenia na orbicie 700 km dla $I_x = 990, I_y = 1000, I_z = 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ($n = 1,060 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$).

- 2 Wyprowadź równanie pochylenia z $\mathbf{M}_{\text{gg}} = 3n^2 \hat{\mathbf{r}} \times (I \hat{\mathbf{r}})$ dla małego kąta θ wokół osi y .

- 3 Satelita ma $I_x = 50$, $I_y = 1000$, $I_z = 990$ (maszt wzdłuż toru zamiast pionowo). Co się stanie?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

5 Momenty zakłócające

Oprócz gradientu grawitacyjnego na satelitę działają: ciśnienie promieniowania słonecznego ($4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ razy powierzchnia razy ramię między środkiem nacisku a środkiem masy), opór szczątkowej atmosfery (na niskich orbitach), oddziaływanie magnetycznego dipola satelity z polem Ziemi (prądy w kablach, magnetyzacja elementów). Dla satelity rzędu 100 kg i 1 m na orbicie 700 km: ciśnienie promieniowania $\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{m}$ (ramię 10 cm), opór $\sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{m}$, dipol szczątkowy $0,1 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ w polu $3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ daje $3 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$, gradient (różnica momentów $10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$) do $2 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$.

Momenty są maleńkie, ale działają stale: przez dobę $10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$ daje $0,09 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ momentu pędu, a przez rok kilkadziesiąt. Każdy układ sterowania orientacją musi je kompensować i co jakiś czas pozbywać się nagromadzonego momentu pędu (lekcja 13 Sterowanie orientacją: koła reakcyjne, magnetyki i silniczki).

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 20 min

- 1 Panel słoneczny 4 m^2 ma środek nacisku $0,5 \text{ m}$ od środka masy satelity. Jaki moment siły daje ciśnienie promieniowania (pełne pochłanianie) i ile momentu pędu zbiera się przez dobę, jeśli moment się nie zmienia?
- 2 Dlaczego moment od oporu atmosfery maleje z wysokością dużo szybciej niż gradient grawitacyjny?

▣▣ podstawowe ▣▣▣ średnie ▣▣▣▣ feynmanowskie

☰ METODA: CZY SATELITA UTRZYMA ORIENTACJĘ SAM?

1. **Momenty bezwładności** w osiach głównych; które części są giętke albo zawierają ciecz.
2. **Wirowanie:** wokół osi największego momentu (z rozpraszaniem) albo dwuspin z tłumikiem na platformie.
3. **Gradient:** oś najmniejszego momentu do Ziemi, największego prostopadle do orbity; sprawdzić σ_1, σ_3 ; dodać tłumik.
4. **Zakłócenia:** porównać momenty zakłócające z momentem stabilizującym; dryf M/H dla wirujących.

Przykład 6.1

Explorer w liczbach

Model: $I = (1; 1,05; 0,2) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, wirowanie wokół osi 3 z 10 rad/s , rozpraszanie $\varepsilon = 0,005$. Co się dzieje i w jakim czasie?

- 1 $H = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$, $T_0 = 10 \text{ J}$; stan końcowy: obrót wokół osi 2 z $T = 1,90 \text{ J}$.
- 2 Kąt nutacji: 10° po 143 s, 45° po 229 s, 80° po 312 s.
- 3 Na początku przyrost jest wykładniczy (mała nutacja rośnie proporcjonalnie do siebie), na końcu zwalnia przy dochodzeniu do 90° .

Wynik: przewrócenie w ciągu kilku minut (w modelu); w Explorerze 1 w czasie pierwszego obiegu.

Sprawdzenie: $|\mathbf{H}|$ zachowany (2,0001 na początku i na końcu), energia końcowa równa $H^2/(2I_{\max}) \checkmark$.

Przykład 6.2

Maszt gradientowy

Mały satelita (sześciąt 0,5 m, 50 kg, $I \approx 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ w każdej osi) dostaje maszt 6 m z masą 2 kg na końcu. Czy będzie stabilizowany gradientem na orbicie 700 km?

- 1 Masa na końcu dodaje do I_x i I_y ok. $2 \cdot 6^2 = 72 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, do I_z (oś masztu) nic: $I \approx (74; 74; 2)$.
- 2 Żeby być w obszarze Lagrange'a, trzeba $I_y > I_x$: np. panele rozłożone wzdłuż toru zwiększają I_y (i I_z) o kilka $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.
- 3 Okres libracji pochylenia: $T_{\text{orb}}/\sqrt{3} \approx 57 \text{ min}$; moment przy 10° : $1,5n^2 \cdot 72 \sin 20^\circ = 4 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}$.

Wynik: tak, jeśli I_y jest choć trochę większe od I_x ; potrzebny tłumik.

Sprawdzenie: moment stabilizujący jest o rzędy wielkości większy od zakłóceń z części 5 ($\sim 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$), ale zakłócenia przesuną położenie równowagi o ułamek stopnia ✓.

Przykład 6.3

Dryf osi wirującego satelity

Satelita wiruje z 10 obr/min, $I_3 = 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Moment zakłócający od ciśnienia promieniowania ma $5 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$. Ile stopni na dobę dryfuje oś?

- 1 $H = 50 \cdot 1,047 = 52,4 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$.
- 2 $M/H = 9,5 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 0,47^\circ$ na dobę.

Wynik: ok. $0,5^\circ$ na dobę: korekta co kilka dni.

Sprawdzenie: szybciej wirujący satelita dryfuje wolniej (M/H) ✓.

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Wirowanie wokół długiej osi jest stabilne, jak u pocisku.”

Tylko w bryle sztywnej; z rozpraszaniem energii stabilna jest jedynie oś największego momentu (pocisk wiruje krótko, a jego wirowanie przeciwdziała destabilizującemu momentowi aerodynamicznemu).

× „Rozpraszanie energii zawsze stabilizuje.”

Stabilizuje obrót wokół osi największego momentu, a destabilizuje wokół najmniejszego; w dwuspinie zależy, w której części zachodzi.

× „Gradient grawitacyjny ustawia satelitę cięższym końcem do Ziemi.”

Ustawia oś najmniejszego momentu wzdłuż pionu, obojętnie, który koniec jest na dole; równowagi są dwie.

× „Stabilizacja gradientem utrzyma satelitę dokładnie pionowo.”

Bez tłumienia satelita drga wokół pionu; z tłumieniem i zakłóceniami trzyma się w granicach kilku stopni. Do precyzyjnego celowania to za mało.

× „Mały moment zakłócający nic nie robi.”

Działa stale: $10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$ przez rok to kilkadziesiąt $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$, więcej niż pojemność kół reakcyjnych małego satelity.

Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Dlaczego energia, a nie moment pędu?** Wyjaśnij, dlaczego rozpraszanie wewnętrzne nie zmienia $\mathbf{H}$, a zmienia T , i dlaczego stan końcowy jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do znaku).

- 2 **Sonda wirująca w drrodze.** Pioneery 10 i 11 i wiele sond wirowało w czasie lotu. Jakie są zalety i wady wirowania dla sondy planetarnej?
- 3 **Gradient na orbicie geostacjonarnej.** Czy gradient grawitacyjny nadaje się do stabilizacji satelity geostacjonarnego?
- 4 **Ciecz w zbiorniku.** Dlaczego ruch paliwa w zbiorniku jest szczególnie groźnym źródłem rozpraszania energii i jak się mu przeciwdziela?
- 5 **Obszar DeBry–Delpa.** Mapa stabilności ma drugi obszar stabilny przy $\sigma_1, \sigma_3 < 0$. Dlaczego jest on rzadko używany?

□□□ podstawowe ▣▣▣ średnie ▤▤▤ feynmanowskie

9 Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 **Wokół których osi bryła sztywna wiruje stabilnie?**
Wokół osi największego i najmniejszego momentu; wokół pośredniej niestabilnie.
- 2 **Co zmienia rozpraszanie energii?**
Stabilna zostaje tylko oś największego momentu (reguła osi największego momentu).
- 3 **Jak dwuspin obchodzi tę regułę?**
Tłumik na wolno obracającej się platformie stabilizuje wirowanie nawet wokół osi najmniejszego momentu.
- 4 **Jak gradient grawitacyjny ustawia satelitę?**
Oś najmniejszego momentu wzdłuż pionu, oś największego prostopadle do orbity (obszar Lagrange'a $I_y > I_x > I_z$).
- 5 **Jaki jest okres libracji pochylenia?**
 $2\pi / (n \sqrt{3(I_x - I_z)/I_y})$; dla wydłużonego satelity ok. $T_{\text{orb}}/\sqrt{3}$.

6 Jak szybko dryfuje oś wirującego satelity pod wpływem momentu M ?

Z prędkością kątową M/H , prostopadle do „intuicyjnego” kierunku (precesja).

WIROWANIE

$$\lambda = \Omega \sqrt{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)/(I_1 I_2)}$$

$T = \frac{1}{2} \sum H_i^2 / I_i$; przy stałym H minimum wokół $I_{\max}$

dryf osi: $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$, prędkość M/H

dwuspin: tłumik na platformie

GRADIENT I ZAKŁÓCENIA

$$\mathbf{M} = 3n^2 \hat{\mathbf{r}} \times I \hat{\mathbf{r}}$$

pochylenie: $I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z)\theta = 0$

$$\sigma_1 = (I_y - I_z)/I_x, \sigma_3 = (I_y - I_x)/I_z;$$

Lagrange: $I_y > I_x > I_z$

ciśnienie promieniowania $4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. 12.4–12.7 (stabilizacja wirowaniem, dwuspin, gradient grawitacyjny); U. Walter, *Astronautics*, rozdz. o dynamice orientacji.
- **Dla chętnych:** P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics* (Dover): klasyczna, wyczerpująca monografia, z pełną analizą żyrostatów i stabilności gradientowej.

Pasywne metody utrzymują orientację z dokładnością do stopni. Teleskop albo satelita obserwacyjny potrzebuje ułamków sekundy kątowej. Zanim zaczniemy sterować, trzeba wiedzieć, jak satelita jest ustawiony. Kolejna lekcja: czujniki orientacji, algorytm TRIAD i filtr, który łączy żyroskopy z gwiazdami.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $\lambda = 2\pi \sqrt{10 \cdot 8/120} = 5,13 \text{ rad/s}$, czyli ok. 0,82 obr/s. Oś 3 jest osią największego momentu: wirowanie stabilne.
2. $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}$: wektor $\mathbf{H}$ obraca się w kierunku momentu siły z prędkością kątową $M/H = 10^{-7} \text{ rad/s}$ (0,5° na dobę), prostopadle do kierunku, w który moment „chciałby” satelitę obrócić. To precesja żyroskopowa (fizyka, lekcja Dział 4: Ruch obrotowy i bryła sztywna).
3. Przy małych ω_1, ω_2 iloczyn $\omega_1 \omega_2$ jest drugiego rzędu, więc $\omega_3 \approx \Omega$ stałe. Wtedy $\dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega \omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega \omega_1$. Różniczkując pierwsze: $\ddot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \Omega^2 \omega_1 = -\lambda^2 \omega_1$.

Zadania • część 2

1. $H = 0,2 \cdot 10 = 2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$, $T = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 100 = 10 \text{ J}$. Po przejściu: $T = H^2/(2I_2) = 4/2,1 = 1,90 \text{ J}$. Ponad 80% energii zostało rozproszone, a prędkość obrotu spadła z 10 do $2/1,05 = 1,9 \text{ rad/s}$.
2. $\frac{d}{dt} \frac{H^2}{2} = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) - \varepsilon \mathbf{H} \cdot (\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{H}})\hat{\mathbf{H}}) = 0 - \varepsilon(\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}) = 0$. $\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{H}} = -\varepsilon(\omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{H}})^2) \leq 0$, równość tylko gdy $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{H}$, czyli przy obrocie wokół osi głównej.
3. Długa oś to oś najmniejszego momentu; przelewające się paliwo rozprasza energię, więc stopień zacznie nutować i przejdzie do płaskiego wirowania. Jeśli satelita oddzieli się w trakcie narastającej nutacji, dostaje niepożądaną prędkość kątową i kierunek. Dlatego wirowanie stopni z paliwem ogranicza się w czasie albo stosuje się aktywne tłumienie nutacji.

Zadania • część 3

1. Muszą zmieścić się pod osłoną rakiety, która jest wąskim walcem. Dwuspin z tłumikiem na platformie pozwala stabilnie wirować wokół długiej osi (najmniejszego momentu), łamiąc regułę osi największego momentu, bo rozpraszanie zachodzi w części, która prawie się nie obraca.
2. $500 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} = 0,036 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$: pomijalnie mało. O sztywności decyduje wirnik.
3. W dwuspinie na platformie (wolnej): rozpraszanie tam stabilizuje nawet przy osi najmniejszego momentu. W zwykłym satelicie wirującym wokół osi największego momentu tłumik może być gdziekolwiek: rozpraszanie zawsze prowadzi do stanu o najmniejszej energii, czyli do pożądanego obrotu, i tłumii nutację.

Zadania • część 4

1. $\omega = n \sqrt{3 \cdot 940/1000} = 1,060 \cdot 10^{-3} \cdot 1,679 = 1,780 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$; okres 3530 s = 58,8 min.
2. Po obrocie o θ wokół y kierunek do Ziemi w osiach ciała to $\hat{\mathbf{r}} \approx [-\theta; 0; 1]$. $I\hat{\mathbf{r}} = [-I_x\theta; 0; I_z]$. Składowa y iloczynu wektorowego: $(\hat{\mathbf{r}} \times I\hat{\mathbf{r}})_y = r_z(I\hat{\mathbf{r}})_x - r_x(I\hat{\mathbf{r}})_z = -I_x\theta + I_z\theta$. Moment $M_y = -3n^2(I_x - I_z)\theta$, więc $I_y\ddot{\theta} = -3n^2(I_x - I_z)\theta$.
3. $I_x < I_z$: pochylenie niestabilne; gradient obróci maszt z kierunku poziomego do pionowego (o 90° w pochyleniu). Gradient zawsze ustawia oś najmniejszego momentu pionowo, oś największego prostopadle do orbity.

Zadania · część 5

1. $4,6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 0,5 = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$; przez dobę $0,79 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$. Koło reakcyjne o pojemności kilku $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ nasyci się w kilka dni.
2. Opór $\propto \rho v^2$, a gęstość maleje wykładniczo (wysokość skali dziesiątki km, lekcja 3 Perturbacje: spłaszczenie Ziemi, orbita heliosynchroniczna i opór); gradient $\propto n^2 \propto 1/r^3$, czyli łagodnie. Między 400 a 800 km opór maleje kilkaset razy (zależnie od aktywności Słońca), gradient o ok. 15%.

Zadania do przemyslenia

1. Siły wewnętrzne występują parami (akcja i reakcja) i mają zerowy wypadkowy moment: $\mathbf{H}$ całego satelity się nie zmienia. Ale praca sił tarcia wewnętrznego zamienia energię ruchu w ciepło.
2. Przy stałym H energia jest funkcją kierunku $\mathbf{H}$ w osiach ciała: $T = \frac{1}{2} \sum H_i^2 / I_i$. Minimum jest jedno (dwa przeciwne kierunki) wzdłuż osi największego momentu, jeśli $I_{\max}$ jest pojedyncze. Rozpraszanie prowadzi do tego minimum.
2. 1. Zalety: prostota, brak paliwa na utrzymanie orientacji, równomierne nagrzewanie, przyrządy pól i cząstek „omiatają” całe niebo.
2. Wady: kamery i anteny o wąskiej wiązce muszą być na osi albo na platformie odwirowanej; zdjęcia z wirującej sondy są trudne. Stąd dwuspin Galileo i trójosiowa stabilizacja Voyagerów i Cassini.
3. 1. Moment $\propto n^2$: na GEO n jest ok. 14 razy mniejsze niż na 700 km, więc moment ok. 200 razy słabszy, a okres libracji ok. 14 h.
2. Zakłócenia od ciśnienia promieniowania (duże panele) są porównywalne albo większe. Gradient jest za słaby; satelity GEO są stabilizowane trójosiowo kołami albo (dawniej) dwuspinowo.
4. 1. Ciecz w częściowo pełnym zbiorniku ma własne mody drgań o częstościach bliskich nutacji, więc rozprasza energię skutecznie (rezonansowo) i trudno ją modelować.
2. Przeciwdziałanie: przegrody i membrany w zbiornikach, zbiorniki o kształcie ograniczającym ruch, unikanie wirowania wokół osi najmniejszego momentu z dużą ilością cieczy, aktywne tłumienie nutacji silniczkami.
5. 1. Stabilność w tym obszarze zależy od sprzężenia żyroskopowego przechylenia i odchylenia (stabilność „żyroskopowa”, a nie potencjalna): położenie równowagi nie jest minimum energii potencjalnej.
2. Rozpraszanie energii (np. tłumik, giętkość) niszczy taką stabilność, podobnie jak przy wirowaniu wokół osi najmniejszego momentu. Praktyczne satelity gradientowe projektuje się w obszarze Lagrange’a.

Astronautyka · Lekcja 11: Satelita bez sterowania · Źródła: C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. 12.4–12.7); U. Walter, *Astronautics* (Springer, rozdz. o dynamice orientacji); P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics* (Dover). Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a11.py).