

Zagadnienie dwóch ciał i równanie orbity

W fizyce (lekcja 5) orbity pojawiły się jako prawa Keplera i bilans energii. Tu wyprowadzamy je od początku jako rozwiązanie równania ruchu: dwa ciała sprowadzamy do jednego, znajdujemy trzy wielkości, które się nie zmieniają, i z nich dostajemy równanie orbity bez całkowania. Na końcu umiemy z położenia i prędkości satelity w jednej chwili policzyć całą jego orbitę, a obliczenie sprawdzamy symulacją numeryczną.

CZAS

ok. 2 h teorii + ok.
2 h zadań

ZADANIA

14 zadań w treści
+ 5 do
przemyślenia, z
odpowiedziami

ŹRÓDŁA

C. A. Kluever,
*Space Flight
Dynamics*, rozdz.
2; H. D. Curtis,
*Orbital Mechanics
for Engineering
Students*, rozdz. 2;
U. Walter,
Astronautics,
rozdz. o ruchu
orbitalnym

W TEJ LEKCJI

- 0 Prolog: armata Newtona
- 1 Dwa ciała, jedno równanie
- 2 Trzy stałe ruchu
- 3 Równanie orbity i krzywe stożkowe
- 4 Vis-viva i prędkości charakterystyczne
- 5 Od położenia i prędkości do orbity
- 6 Metoda i przykłady rozwiązane
- 7 Błędne intuicje
- 8 Zadania do przemyślenia
- 9 Sprawdź się
- 10 Karta wzorów i co dalej

Prolog: armata Newtona

W pracy *O systemie świata*, pomyślanej jako popularna część *Principiów*, Newton narysował górę tak wysoką, że wystaje ponad powietrze, i armatę na jej szczycie. Kula wystrzelona słabo spada blisko. Wystrzelona mocniej spada dalej, bo Ziemia zakrzywia się pod nią. Przy pewnej prędkości kula spada tak samo szybko, jak zakrzywia się Ziemia, i nigdy nie dolatuje do ziemi: okrąża ją. Przy jeszcze większej prędkości tor staje się elipsą, a w końcu kula ucieka.

Ten obrazek zawiera wszystko, co jest w tej lekcji: orbitę wyznacza wyłącznie położenie i prędkość w jednej chwili. Satelita nie „wie”, na jakiej jest orbicie; w każdej chwili po prostu spada.

Pytanie na start. Armata na wysokości 300 km strzela z prędkością 8 km/s, raz poziomo, raz 10° nad poziom. Prędkość jest ta sama, więc energia też. Czy obie kule okrążą Ziemię? Odpowiedź w części 3.

1

Dwa ciała, jedno równanie

Dwa ciała o masach m_1 i m_2 w położeniach $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ przyciągają się zgodnie z prawem grawitacji (fizyka, lekcja Dział 5: Grawitacja i orbity). Oznaczmy $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ i $r = |\mathbf{r}|$:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

Dodanie równań daje $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$: środek masy porusza się ruchem jednostajnym (fizyka, lekcja Dział 3: Pęd, zderzenia i środek masy). Odjęcie (po podzieleniu przez masy) daje równanie ruchu względnego:

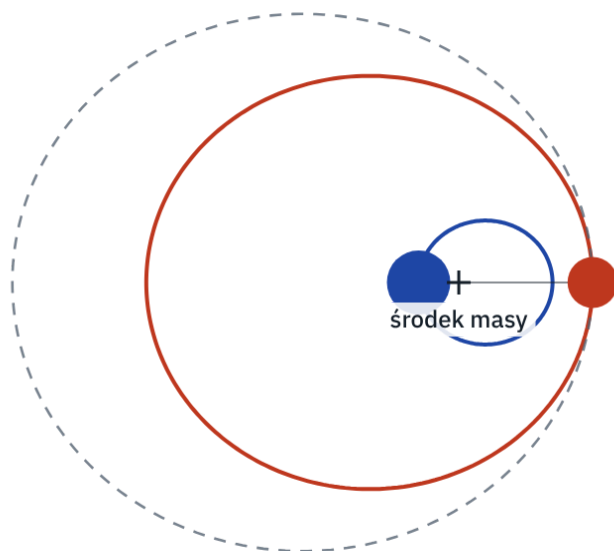
ZAGADNIENIE DWÓCH CIAŁ

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mu = G(m_1 + m_2).$$

Ruch ciała 2 względem ciała 1 jest taki, jakby ciało 1 było nieruchome i miało masę $m_1 + m_2$. Dla satelity Ziemi m_2 jest pomijalne: $\mu_\oplus = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ (znane dużo dokładniej niż osobno G i masa Ziemi).

Oba ciała krążą wokół środka masy po podobnych krzywych, zmniejszonych w stosunku mas: $\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{r}$ (w układzie środka masy). Dla Ziemi i Księżyca środek masy leży 4671 km od środka Ziemi, czyli wewnątrz Ziemi. To właśnie dlatego Ziemia kołysze się co miesiąc.

SYMULACJA 1 Dwa ciała wokół wspólnego środka masy. Zmien stosunek mas i mimośród orbity względnej. Przerywana linia to orbita ciała 2 widziana z ciała 1: to ją opisuje równanie $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$.



— ciało 1 (cięższe) — ciało 2 - - - ruch względny: ciało 2 wokół ciała 1

odległość środka masy od ciała 1 23,1% odległości ciał

prędkość ciała 1 / ciała 2 0,30

$\mu / (G m_1) = 1 + m_2/m_1$ 1,30

okres (ten sam dla obu) $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$

Oba ciała krążą wokół środka masy po elipsach podobnych do orbity względnej, zmniejszonych w stosunku mas. Linia łącząca zawsze przechodzi przez środek masy.

Stan na rysunku: $m_2/m_1 = 0,30$, $e = 0,40$; środek masy w 23,1% odległości od ciała 1.

ZADANIA · CZĘŚĆ 1

3 zadania · ok. 20 min

- 1 Masa Księżyca to $1/81,3$ masy Ziemi, a średnia odległość 384 400 km. Gdzie leży środek masy układu? Jak głęboko pod powierzchnią Ziemi (promień 6378 km)?
- 2 Jowisz ma masę $1/1047,6$ masy Słońca i krąży w odległości 778,5 mln km. Czy środek masy układu Słońce–Jowisz leży wewnątrz Słońca (promień 696 000 km)?

- 3 Gdyby w obliczeniu okresu Księżyca użyć samego Gm_Z zamiast $G(m_Z + m_K)$, o ile pomylibyśmy się w okresie 27,32 doby?

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

2 Trzy stałe ruchu

Równanie $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$ to trzy sprzężone równania drugiego rzędu. Nie trzeba ich całkować: wystarczą wielkości, które się nie zmieniają.

Moment pędu. Niech $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ (moment pędu na jednostkę masy). Wtedy $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, bo przyspieszenie jest równoległe do $\mathbf{r}$. Stały kierunek $\mathbf{h}$ oznacza, że ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie. Stała długość $h = r^2\dot{\nu}$ to drugie prawo Keplera: pole zakreślane w jednostce czasu wynosi $h/2$.

Energia. Mnożąc równanie skalarnie przez $\mathbf{v}$, dostajemy $\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$. Stała

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

to energia mechaniczna na jednostkę masy (energia właściwa). Ujemna oznacza ruch ograniczony, dodatnia ucieczkę.

Wektor mimośrod. Trzecia stała jest mniej znana. Policzmy pochodną $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

gdzie ostatnia równość to rachunek z rozwinięciem podwójnego iloczynu wektorowego (zadanie 2.2). Stąd stały wektor

🔧 STAŁE ZAGADNIENIA DWÓCH CIAŁ

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wektor $\mathbf{e}$ leży w płaszczyźnie orbity i wskazuje perycentrum (najbliższy punkt orbity). Nie wszystkie siedem liczb jest niezależnych: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0$ i $e^2 = 1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}$.

Wektor $\mathbf{e}$ nazywa się też wektorem Laplace'a–Rungego–Lenza. Jego stałość to szczególna własność potencjału $1/r$: w polu centralnym o innej zależności od odległości perycentrum powoli się obraca (wyjątkiem jest jeszcze tylko pole sprężyny, $F \propto r$; twierdzenie Bertrand'a). Spłaszczona

Ziemia (lekcja 3 Perturbacje: spłaszczenie Ziemi, orbita heliosynchroniczna i opór) daje pole, które nie jest nawet centralne, i też obraca perycentrum.

ZADANIA · CZĘŚĆ 2

3 zadania · ok. 25 min

- 1 Stacja kosmiczna krąży po orbicie kołowej o promieniu 6778 km z prędkością 7,669 km/s. Ile wynosi h i jakie pole zakreśla promień wodzący w ciągu sekundy?
- 2 Pokaż, że $-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$. Skorzystaj z $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ i $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}$.
- 3 Satelita na wysokości 300 km ($r = 6678$ km) leci poziomo z prędkością 8 km/s. Policz h , ε i z nich e .

□ □ □ podstawowe ■ ■ □ średnie ■ ■ ■ feynmanowskie

3 Równanie orbity i krzywe stożkowe

Pomnóżmy definicję $\mathbf{e}$ skalarnie przez $\mathbf{r}$. Ponieważ $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = h^2$, dostajemy $re \cos \nu = h^2/\mu - r$, gdzie ν to kąt między $\mathbf{e}$ a $\mathbf{r}$, czyli **anomalia prawdziwa**:

RÓWNANIE ORBITY

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = \frac{h^2}{\mu}.$$

To równanie krzywej stożkowej we współrzędnych biegunowych z ogniskiem w środku przyciągania (matematyka, lekcje 0.4 Geometria analityczna i krzywe stożkowe i 3.2

Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne): $e = 0$ okrąg, $0 < e < 1$ elipsa, $e = 1$ parabola, $e > 1$ hiperbola. Parametr p to promień przy $\nu = 90^\circ$.

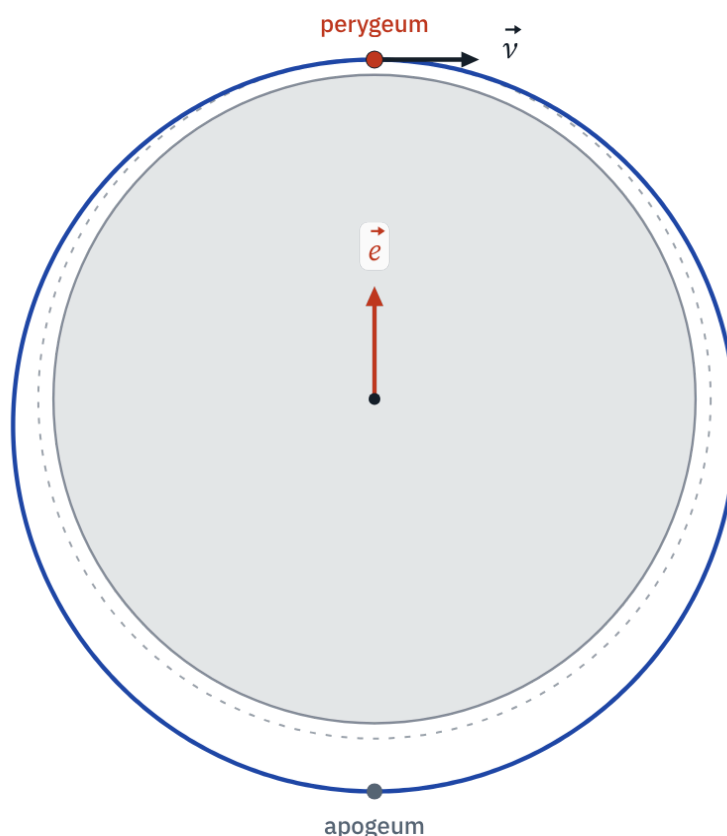
Elipsa: $a = \frac{p}{1 - e^2}$, perycentrum $r_p = a(1 - e)$, apocentrum $r_a = a(1 + e)$, $a = -\frac{\mu}{2\varepsilon}$.

Prędkość rozkłada się na składową prostopadłą do promienia, $v_\perp = h/r = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos \nu)$, i radialną, $v_r = \dot{r} = \frac{\mu}{h}e \sin \nu$. Kąt między prędkością a lokalnym poziomem (prostopadłą do $\mathbf{r}$) to kąt toru lotu:

$$\tan \gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}.$$

W perycentrum i apocentrum $\gamma = 0$: tylko tam prędkość jest pozioma. Odpowiedź na pytanie z prologu: kula wystrzelona poziomo z 8 km/s ma perygeum w punkcie startu i apogeum na wysokości 1340 km. Kula wystrzelona 10° nad poziom ma tę samą energię (ten sam a), ale mniejszy moment pędu ($h = rv \cos \gamma$), więc większe $e = 0,188$ i perygeum 531 km *pod* powierzchnią Ziemi. Najpierw się wzniesie, potem spadnie na Ziemię, zanim okrąży ją raz.

SYMULACJA 2 Orbita z jednego punktu: wysokość, prędkość i kąt toru lotu. Ciągła linia to dalszy lot satelity; jeśli orbita przecina Ziemię, część za punktem uderzenia jest przerywana. Strzałka e wskazuje perygeum. Włącz całkowanie numeryczne, żeby sprawdzić, że równanie orbity i równanie ruchu dają to samo.



— stożkowa z równania orbity — całkowanie numeryczne RK4 — wektor mimośrodu (do perygeum)

energia właściwa ε -27,69 km²/s²

mimośród e 0,0723

wielka półoś a 7198 km

perygeum (wysokość) 300 km

apogeum (wysokość) 1340 km

okres 101,3 min

$v_{\text{koł}} / v_{\text{ucieczki}}$ tutaj 7,726 / 10,926 km/s

Elipsa: ognisko w środku Ziemi, wektor mimośrodu wskazuje perygeum. Start poziomy szybciej niż kołowa: start w perygeum.

Stan na rysunku: $h = 300$ km, $v = 8,00$ km/s, $\gamma = 0^\circ$; $\varepsilon = -27,69$ km²/s², $e = 0,0723$, $r_p = 6678$ km ($\mu = 398\,600$ km³/s², $R = 6378$ km).

- 1 Orbita typu Molnia ma $a = 26\,554$ km i $e = 0,74$. Na jakich wysokościach są perygeum i apogeum? Jaki jest okres?
- 2 Orbita przejściowa do geostacjonarnej (GTO) ma perygeum 250 km i apogeum na wysokości orbity geostacjonarnej ($r_a = 42\,164$ km). Policz e i kąt toru lotu przy $\nu = 90^\circ$.
- 3 Przy jakiej anomalii prawdziwej kąt toru lotu na elipsie jest największy i ile wynosi? Policz dla GTO.

podstawowe średnie feynmanowskie

4 Vis-viva i prędkości charakterystyczne

Połączenie $\varepsilon = v^2/2 - \mu/r$ z $\varepsilon = -\mu/(2a)$ daje najczęściej używany wzór astronautyki:

🔧 RÓWNANIE VIS-VIVA I PRĘDKOŚCI CHARAKTERYSTYCZNE

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Kołowa: $v_k = \sqrt{\mu/r}$. Ucieczki: $v_u = \sqrt{2\mu/r} = \sqrt{2} v_k$. Hiperbola: $v^2 = v_u^2 + v_\infty^2$, gdzie $v_\infty^2 = 2\varepsilon = C_3$ (energia charakterystyczna, km^2/s^2).

Okres elipsy (z pola πab i stałej prędkości polowej $h/2$): $T = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}$.

Wybrane liczby dla Ziemi: na wysokości 200 km $v_k = 7,78$ km/s i $T = 88,5$ min; na 400 km 7,67 km/s i 92,6 min; prędkość ucieczki z powierzchni 11,18 km/s. Orbita geostacjonarna ma okres równy dobie gwiazdowej (86 164 s), stąd $r = 42\,164$ km, 35 786 km nad równikiem, i $v = 3,07$ km/s.

Hiperbola ma ujemne a (wzory z a działają dalej, jeśli pilnować znaku) i dwie asymptoty pod kątem $\nu_\infty = \arccos(-1/e)$ od perycentrum. Kierunek prędkości obraca się w czasie przelotu o kąt $\delta = 2 \arcsin(1/e)$; to podstawa asysty grawitacyjnej (lekcja 8 Asysta grawitacyjna).

- 1 Policz promień orbity geostacjonarnej z okresu 86 164 s i $\mu = 398\,600$ km^3/s^2 . Dlaczego nie 86 400 s?

2. Ile trzeba dodać prędkości satelicie na orbicie kołowej 400 km, żeby uciekł z pola Ziemi (impulsowo, w kierunku ruchu)?
3. Sonda na wysokości 300 km leci poziomo z prędkością 11,5 km/s. Policz v_∞ , C_3 , mimośród i kąt obrotu prędkości δ .

▢▢ podstawowe ▢▢▢ średnie ▢▢▢▢ feynmanowskie

5 Od położenia i prędkości do orbity

Radar albo GPS podaje położenie i prędkość satelity w jednej chwili. Z nich stałe ruchu wyznaczają orbitę od razu:

🔧 **ALGORYTM** $(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \rightarrow \text{ORBITA}$

1. $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, $\varepsilon = v^2/2 - \mu/r$, $\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{h}/\mu - \mathbf{r}/r$.

2. $e = |\mathbf{e}|$, $p = h^2/\mu$; jeśli $e \neq 1$: $a = -\mu/(2\varepsilon)$.

3. Anomalia prawdziwa: $\cos \nu = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}/(er)$; znak ν jak znak $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ (oddalanie się od perycentrum to $\nu > 0$).

Algorytm sprawdzamy, całkując równanie ruchu numerycznie (matematyka, lekcja 6.2 Metody numeryczne: Python i C++) i porównując tor z równaniem orbity. Całkowanie RK4 ze stałym krokiem dla orbity z perygeum 300 km i $e = 0,072$: przy 100 krokach na okres satelita po 10 okresach jest 0,9 km od miejsca, w którym powinien być; przy 300 krokach 5 m. Stałe h , ε , e zachowują się do 6 cyfr przy 100 krokach, do 9 przy 300. To jest też sposób na wykrycie błędu w kodzie: jeśli stała ruchu dryfuje szybciej niż błąd metody, błąd jest w równaniach.

Python · orbita z położenia i prędkości, sprawdzenie numeryczne

```
import numpy as np
mu = 398600.4418 # km³/s²

def orbita(r, v):
    h = np.cross(r, v); R = np.linalg.norm(r)
    eps = v @ v / 2 - mu / R
    e = np.cross(v, h) / mu - r / R
    nu = np.arccos(e @ r / (np.linalg.norm(e) * R))
    if r @ v < 0: nu = -nu # zbliżamy się do perycentrum
    return np.linalg.norm(h), eps, e, -mu / (2 * eps), np.degrees(nu)

def f(x): # x = [r, v]
    r = x[:3]; return np.r_[x[3:], -mu * r / np.linalg.norm(r)**3]

def rk4(x, dt):
    k1 = f(x); k2 = f(x + dt/2*k1); k3 = f(x + dt/2*k2); k4 = f(x + dt*k3)
    return x + dt/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

r = np.array([7000.0, -1200.0, 0.0]); v = np.array([1.5, 7.6, 0.0])
print(orbita(r, v)) # h, ε, wektor e, a, ν
x = np.r_[r, v]
for k in range(1000): x = rk4(x, 10.0) # 10 000 s lotu
print(orbita(x[:3], x[3:])) # te same h, ε, e, a; inne ν
```

ZADANIA · CZĘŚĆ 5

2 zadania · ok. 25 min

- 1 Satelita ma $\mathbf{r} = [7000; -1200; 0]$ km i $\mathbf{v} = [1,5; 7,6; 0]$ km/s. Policz h , a , e i ν .

- 2 Dla orbity bardzo bliskiej parabolicznej $\varepsilon \approx 0$. Który wzór z algorytmu przestaje działać, a który działa nadal? Jak opisać taką orbitę?


 podstawowe
  średnie
  feynmanowskie

☰ METODA: ZADANIE Z ORBITĄ

1. Co jest dane w jednym punkcie? r , v , γ (albo wektory) wystarczą do wszystkiego.
2. Energia ε daje a (rodzaj orbity, okres). Moment pędu $h = rv \cos \gamma$ daje p .
3. Mimośród z $e^2 = 1 + 2\varepsilon h^2 / \mu^2$ albo z wektora $\mathbf{e}$; $r_p = p/(1 + e)$, $r_a = p/(1 - e)$.
4. Sprawdzenie: czy $r_p > R$ (orbita nie przecina planety), czy v z vis-viva zgadza się w drugim punkcie, czy $h = r_p v_p = r_a v_a$.

Przykład 6.1

Strzał poziomy z 300 km

Satelita na wysokości 300 km ma prędkość poziomą 8,0 km/s. Wyznacz apogeum, okres i prędkość w apogeum.

- 1 $r = 6678$ km, $\varepsilon = -27,69$ km²/s², $a = -\mu/(2\varepsilon) = 7198$ km.
- 2 Start poziomy szybciej niż kołowa (7,73 km/s), więc to perygeum: $r_a = 2a - r_p = 7718$ km, wysokość 1340 km; $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p) = 0,072$.
- 3 $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} = 101,3$ min; $v_a = h/r_a = 53\,425/7718 = 6,92$ km/s.

Wynik: apogeum 1340 km, okres 101 min, w apogeum 6,92 km/s.

Sprawdzenie: vis-viva w apogeum: $\sqrt{\mu(2/7718 - 1/7198)} = 6,92$ km/s ✓.

Przykład 6.2

Ten sam strzał,

10°

w górę

Te same 300 km i 8,0 km/s, ale $\gamma = 10^\circ$. Czy satelita okrąży Ziemię?

- 1 Energia ta sama: $a = 7198$ km. Moment pędu mniejszy: $h = 6678 \cdot 8 \cos 10^\circ = 52\,613$ km²/s, $p = h^2/\mu = 6945$ km.
- 2 $e = \sqrt{1 - p/a} = \sqrt{1 - 6945/7198} = 0,188$; $r_p = a(1 - e) = 5847$ km.
- 3 $r_p < R = 6378$ km: perygeum leży 531 km pod powierzchnią. Punkt startu ma $\nu = 77,7^\circ$ (wznosi się), osiągnie apogeum ($r_a = 8549$ km) i spadnie.

Wynik: nie; tor przecina Ziemię przed pierwszym okrążeniem.

Sprawdzenie: $\cos \nu = (p/r - 1)/e = (6945/6678 - 1)/0,188 = 0,213$, $\nu = 77,7^\circ$;
 $\tan \gamma = e \sin \nu / (1 + e \cos \nu) = 0,176$, $\gamma = 10,0^\circ \checkmark$. Wniosek praktyczny: rakieta musi wejść na orbitę prawie poziomo, stąd zakręt grawitacyjny w lekcji 4 Rakieta na orbitę: równanie rakietowe, stopniowanie i zakręt grawitacyjny.

Przykład 6.3

Ucieczka z nadmiarem

Sonda startuje z orbity 300 km z prędkością 11,5 km/s. Z jaką prędkością opuści pole Ziemi i jak zakrzywi się jej tor?

- 1 $\varepsilon = 11,5^2/2 - 398\,600/6678 = 66,13 - 59,69 = 6,44 \text{ km}^2/\text{s}^2 > 0$: hiperbola.
- 2 $v_\infty = \sqrt{2\varepsilon} = 3,59 \text{ km/s}$, $C_3 = 12,9 \text{ km}^2/\text{s}^2$.
- 3 $e = 1 + r_p v_\infty^2/\mu = 1 + 6678 \cdot 12,88/398\,600 = 1,216$; asymptota pod $\nu_\infty = \arccos(-1/e) = 145,3^\circ$ od perycentrum.

Wynik: $v_\infty = 3,59 \text{ km/s}$; daleko od Ziemi sonda leci w kierunku obróconym o 145° od kierunku perygeum.

Sprawdzenie: $e = 1 + r_p v_\infty^2/\mu$ wynika z $r_p = a(1 - e)$ i $a = -\mu/v_\infty^2$; zgadza się z $e = r_p v_p^2/\mu - 1 = 1,216 \checkmark$. Energie tego rzędu, C_3 ok. $8\text{--}16 \text{ km}^2/\text{s}^2$ zależnie od roku startu, są potrzebne sondom lecącym na Marsa (lekcja 7 Sfery wpływu i podróż międzyplanetarna).

7

Błędne intuicje, których trzeba się oduczyć

× „Na orbicie nie ma grawitacji.”

Na wysokości 400 km przyspieszenie grawitacyjne to 89% wartości przy powierzchni. Astronauci są w stanie nieważkości, bo spadają razem ze stacją.

× „Większa prędkość zawsze oznacza wyższą orbitę.”

Większa energia oznacza większą półoś, ale kąt toru lotu decyduje o mimośrodzie: ta sama prędkość skierowana stromo może dać orbitę, która przecina Ziemię (przykład 6.2).

× „Satelita krąży wokół środka Ziemi.”

Wokół wspólnego środka masy, choć dla satelity różnica jest nie do zmierzenia. Dla Księżyca nie jest: środek masy leży 4671 km od środka Ziemi.

× „Prędkość ucieczki trzeba mieć, żeby polecieć w kosmos.”

Do orbity okołoziemskiej wystarczy ok. 7,8 km/s, a sama wysokość wymaga dużo mniej. Prędkość ucieczki to próg energii, przy którym orbita przestaje być zamknięta.

× „Satelita na orbicie eliptycznej przyspiesza silnikiem w perygeum.”

Przyspiesza bez silnika: spadając ku Ziemi, zamienia energię potencjalną na kinetyczną. Energia mechaniczna jest stała.

8 Zadania do przemyślenia

Te zadania wymagają więcej myślenia niż liczenia.

ZADANIA DO PRZEMYŚLENIA

5 zadań · ok. 1,5 godziny

- 1 **Ile liczb opisuje orbitę?** Stałe h , ϵ , e to siedem liczb, a stan $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ma sześć. Ile niezależnych stałych ruchu ma zagadnienie dwóch ciał i czego brakuje, żeby z nich wyznaczyć położenie satelity?
- 2 **Spadek prosto w dół.** Kamień puszczone z wysokości bez prędkości poziomej spada wzdłuż prostej. Jak to pogodzić z twierdzeniem, że orbita w polu $1/r$ jest krzywą stożkową z ogniskiem w środku Ziemi?
- 3 **Hodograf.** Pokaż, że koniec wektora prędkości (z początkiem w zerze) zakreśla okrąg o promieniu μ/h , przesunięty o $\mu e/h$ od środka. Co to mówi o prędkości w perycentrum i apocentrum?
- 4 **Nieco inna grawitacja.** Gdyby siła malała jak $1/r^{2,01}$, które stałe ruchu nadal by obowiązywały, a co by się stało z orbitą?
- 5 **Energia a kąt toru.** Dla zadanej wysokości startu i prędkości większej od kołowej istnieje największy kąt toru lotu, przy którym orbita jeszcze nie przecina Ziemi. Jak go wyznaczyć?

▯▯▯ podstawowe ▯▯▯ średnie ▯▯▯ feynmanowskie

Sprawdź się

Odpowiedz w myślach, zanim rozwiniesz odpowiedź.

- 1 Co oznacza μ w zagadnieniu dwóch ciał?

$\mu = G(m_1 + m_2)$, dla satelity praktycznie $Gm_{\oplus} = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2$.

- 2 Jakie są trzy stałe ruchu i co z każdej wynika?

h : płaski ruch i prawo pól; ε : wielkość orbity (a); e : kształt i kierunek perycentrum.

- 3 Napisz równanie orbity.

$r = p/(1 + e \cos \nu)$, $p = h^2/\mu$.

- 4 Napisz równanie vis-viva.

$v^2 = \mu(2/r - 1/a)$.

- 5 Gdzie na orbicie prędkość jest pozioma?

Tylko w perycentrum i apocentrum ($\gamma = 0$).

- 6 Czym jest C_3 ?

Kwadrat prędkości nadmiarowej $v_{\infty}^2 = 2\varepsilon$; miara energii potrzebnej do misji poza pole Ziemi.

STAŁE RUCHU

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \mathbf{r}/r^3, \mu = G(m_1 + m_2)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \varepsilon = v^2/2 - \mu/r = -\mu/(2a)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{h}/\mu - \mathbf{r}/r, e^2 = 1 + 2\varepsilon h^2/\mu^2$$

$$r = p/(1 + e \cos \nu), p = h^2/\mu = a(1 - e^2)$$

$$\tan \gamma = e \sin \nu / (1 + e \cos \nu), \sin \gamma_{\max} = e$$

PRĘDKOŚCI I CZASY

$$v^2 = \mu(2/r - 1/a), v_k = \sqrt{\mu/r}, v_u = \sqrt{2} v_k$$

$$v_{\perp} = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos \nu), v_r = \frac{\mu}{h}e \sin \nu$$

$$T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$$

$$\text{hiperbola: } v_{\infty}^2 = C_3 = 2\varepsilon, \delta = 2 \arcsin(1/e) \\ , e = 1 + r_p v_{\infty}^2/\mu$$

$$\text{Ziemia: } \mu = 398\,600 \text{ km}^3/\text{s}^2, R = 6378 \text{ km}, \\ \text{GEO } 42\,164 \text{ km}$$

Do przeczytania

- **Obowiązkowo:** H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, rozdz. 2 (zagadnienie dwóch ciał, wyprowadzenie z wektorem mimośrodowym i dużo przykładów liczbowych); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics*, rozdz. 2.
- **Dla chętnych:** R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics* (Dover), rozdz. 1: klasyczny, zwięzły wykład zagadnienia dwóch ciał.

Mamy orbitę jako krzywą w płaszczyźnie. Brakuje dwóch rzeczy: gdzie ta płaszczyzna leży w przestrzeni i gdzie na orbicie jest satelita w danej chwili. Kolejna lekcja wprowadza sześć elementów orbitalnych, rozwiązuje równanie Keplera i rysuje ślad satelity na obracającej się Ziemi.



Odpowiedzi

Zadania • część 1

1. $d \cdot \frac{m_K}{m_Z + m_K} = 384\,400/82,3 = 4671$ km od środka Ziemi, czyli $6378 - 4671 = 1707$ km pod powierzchnią.
2. $778,5 \cdot 10^6/1048,6 = 742\,400$ km od środka Słońca: ok. 46 000 km nad jego powierzchnią. Słońce krąży wokół punktu poza sobą; z takiego kołysania gwiazd wykrywa się planety pozasłoneczne.
3. $T \propto \mu^{-1/2}$, więc stosunek okresów to $\sqrt{1 + 1/81,3} = 1,0061$: okres wyszedłby o 0,61% za długi, ok. 4 godziny. Dla satelity o masie kilku ton błąd jest rzędu 10^{-22} .

Zadania • część 2

1. $h = rv = 6778 \cdot 7,669 = 51\,980$ km²/s; pole na sekundę $h/2 = 25\,990$ km².
2. $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}(r\dot{r}) - \mathbf{v}r^2$, więc lewa strona to $\mu \left(\frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} \right)$. Z drugiej strony $\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2}$. To samo.
3. $h = 6678 \cdot 8 = 53\,425$ km²/s; $\varepsilon = 32 - 398\,600/6678 = -27,69$ km²/s². $e^2 = 1 + 2\varepsilon h^2/\mu^2 = 1 - 0,9948 = 0,0052$, $e = 0,072$. Przy e bliskim zera wzór odejmuje bliskie liczby; lepiej liczyć e z wektora $\mathbf{e}$ albo z $e = rv^2/\mu - 1$ (start poziomy).

Zadania • część 3

1. $r_p = 26\,554 \cdot 0,26 = 6904$ km, czyli 526 km wysokości; $r_a = 46\,204$ km, czyli 39 826 km wysokości. $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu} = 43\,060$ s = 11,96 h: dwa obiegi na dobę, z długim „zawiśnięciem” w apogeum nad północną półkulą.
2. $r_p = 6628$ km, $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p) = 0,728$. Przy $\nu = 90^\circ$: $\tan \gamma = e/1 = 0,728$, $\gamma = 36,1^\circ$. Satelita oddala się od Ziemi, lecąc pod kątem ponad 36° do lokalnego poziomu.
3. Pochodna $\tan \gamma$ po ν znika, gdy $\cos \nu(1 + e \cos \nu) + e \sin^2 \nu = 0$, czyli $\cos \nu = -e$. Wtedy $\tan \gamma = e/\sqrt{1 - e^2}$, czyli $\sin \gamma_{\max} = e$. Dla GTO $\gamma_{\max} = \arcsin 0,728 = 46,7^\circ$ przy $\nu = 136,7^\circ$.

Zadania • część 4

1. $r = (\mu T^2/4\pi^2)^{1/3} = 42\,164$ km. Satelita ma nadażać za obrotem Ziemi względem gwiazd (doba gwiazdowa), a nie względem Słońca: 86 400 s zawiera dodatkowy obrót o ok. 1° , potrzebny, bo Ziemia przesuwa się po orbicie.
2. $v_u - v_k = (\sqrt{2} - 1)v_k = 0,414 \cdot 7,669 = 3,18$ km/s. To mniej niż połowa prędkości orbitalnej: najtrudniejsza część to dostać się na orbitę.
3. $v_u = \sqrt{2\mu/r} = 10,93$ km/s; $v_\infty = \sqrt{11,5^2 - 10,93^2} = 3,59$ km/s; $C_3 = 12,9$ km²/s². Start w perycentrum: $e = rv^2/\mu - 1 = 1,216$. $\delta = 2 \arcsin(1/1,216) = 110,7^\circ$, $\nu_\infty = 145,3^\circ$.

Zadania • część 5

1. $h = 7000 \cdot 7,6 - (-1200) \cdot 1,5 = 55\,000$ km²/s. $r = 7102$ km, $v^2 = 60,01$, $\varepsilon = 30,01 - 56,13 = -26,12$ km²/s², $a = 7630$ km. $\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{h}/\mu - \mathbf{r}/r$: $e = 0,0736$, perycentrum w kierunku $-31,1^\circ$ od osi x . $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 1380 > 0$, więc $\nu = +21,4^\circ$: satelita minął perygeum i się oddala.
2. $a = -\mu/(2\varepsilon)$ dąży do nieskończoności (i zmienia znak przy przejściu przez parabolę), więc wszystkie wzory z a są źle uwarunkowane. Parametr $p = h^2/\mu$ i mimośród e są dobrze określone dla każdej

orbity, dlatego orbitę opisuje się przez p i e (albo $r_p = p/(1 + e)$), a nie przez a .

Zadania do przemyślenia

1. 1. Między siedmioma liczbami są dwie zależności ($\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0$ i $e^2 = 1 + 2\epsilon h^2/\mu^2$), więc niezależnych jest pięć. Opisują kształt, rozmiar i położenie orbity w przestrzeni.
2. Szósta liczba to chwila przelotu przez perycentrum: mówi, gdzie na orbicie jest satelita w danej chwili. Związek czasu z położeniem daje równanie Keplera (lekcja 2 Elementy orbitalne, równanie Keplera i ślad naziemny).
2. 1. Przy $h = 0$ mamy $p = 0$, $e = 1$: elipsa zdegenerowana do odcinka (gdy $\epsilon < 0$) o długości $2a$, z ogniskami na końcach. Równanie $r = p/(1 + e \cos \nu)$ traci sens, ale $a = -\mu/2\epsilon$ i okres $2\pi\sqrt{a^3/\mu}$ działają.
2. Czas spadku z r_0 do środka (gdyby Ziemia była punktem) to połowa okresu elipsy o $a = r_0/2$: $\pi\sqrt{r_0^3/(8\mu)}$. Z orbity Księżyca to ok. 4,8 doby.
3. 1. Z definicji $\mathbf{e}: \mathbf{v} \times \mathbf{h} = \mu(\mathbf{e} + \hat{\mathbf{r}})$. Mnożąc wektorowo przez $\mathbf{h}$ (prostopadłe do $\mathbf{v}$): $\mathbf{v} = \frac{\mu}{h} \hat{\mathbf{h}} \times (\mathbf{e} + \hat{\mathbf{r}})$. Składowik $\frac{\mu}{h} \hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{r}}$ ma stałą długość μ/h i obraca się razem z $\hat{\mathbf{r}}$; składowik $\frac{\mu}{h} \hat{\mathbf{h}} \times \mathbf{e}$ jest stały. To okrąg o promieniu μ/h przesunięty o $\mu\mathbf{e}/h$.
2. Największa prędkość to $\frac{\mu}{h}(1 + e)$ (perycentrum), najmniejsza $\frac{\mu}{h}(1 - e)$ (apocentrum). Dla $e > 1$ zero leży poza okręgiem: prędkość nigdy nie spada do zera.
4. 1. Siła jest nadal centralna i zachowawcza: $\mathbf{h}$ i energia (z innym potencjałem) się zachowują, ruch jest płaski, prawo pól obowiązuje.
2. Wektor mimośrodów nie jest już stały: orbita jest „elipsą”, której perycentrum powoli się obraca (rozeta). Stałość $\mathbf{e}$ to szczególna własność dokładnie $1/r^2$; obrót perycentrum Merkurego, którego nie tłumaczyły inne planety, był jednym z testów ogólnej teorii względności.
5. 1. Energia (czyli a) nie zależy od γ . Warunek graniczny $r_p = R$ i $r_p = a(1 - e)$ daje $e = 1 - R/a$, a stąd $p = a(1 - e^2)$.
2. Z $h = rv \cos \gamma$ i $p = h^2/\mu$: $\cos \gamma_{\max} = \sqrt{\mu p}/(rv)$. Dla 300 km i 8 km/s: $a = 7198$, $e = 0,114$, $p = 7105$ km, $\cos \gamma = 53\,217/53\,425$, $\gamma_{\max} = 5,1^\circ$ (przy pominięciu atmosfery).

Astronautyka · Lekcja 1: Zagadnienie dwóch ciał · Źródła: H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rozdz. 2); C. A. Kluever, *Space Flight Dynamics* (Wiley, rozdz. 2); R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics* (rozdz. 1). Stałe: $\mu_\oplus = 398\,600,44 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $R_\oplus = 6378,137$ km. Wszystkie liczby policzone na nowo (tools/verify/a1.py).